This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

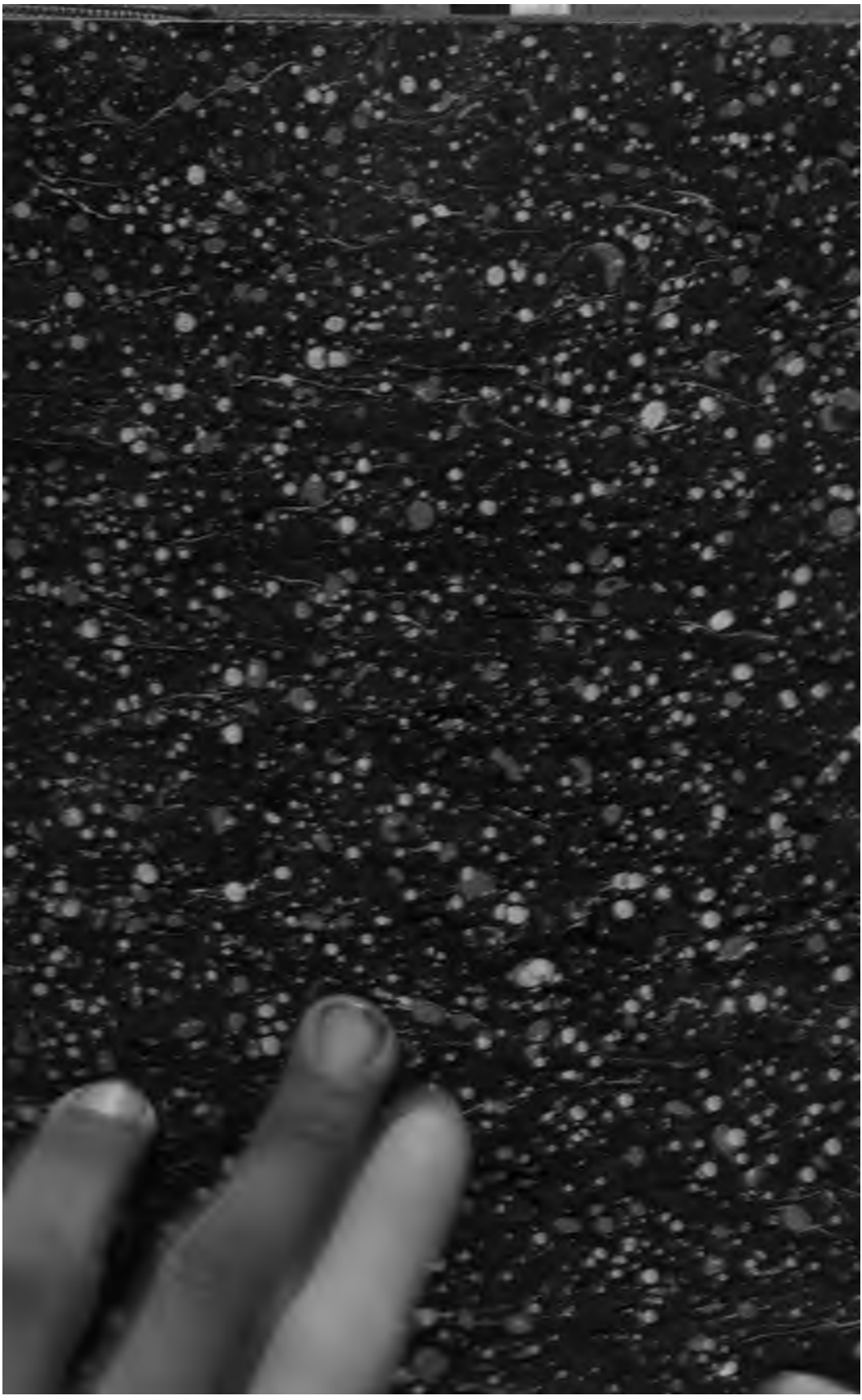
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

LELAND STANFORD JR.
UNIVERSITY
LIBRARY

The Gift of
Prof. G. A. Miller



BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

COMITÉ DE RÉDACTION

BRISSE (Ch.)
JORDAN (Camille)
LAGUERRE
LEVY (Maurice)
MANNHEIM
SARRAU

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES

TOME PREMIER — ANNÉE 1872-73

PARIS

AU SIÉGE DE LA SOCIÉTÉ

RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1873

LIBRARY
Leland Stanford, Jr.
UNIVERSITY
a 60956

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 JANVIER 1873

(Les initiales S. P. désignent les sociétaires perpétuels)

ACHARD (Marc), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
ANDRÉ (Désiré), agrégé de l'Université, à Paris.
ANTOINE (Ch.), ingénieur de la Marine, à Brest.
AOUST (L'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, à Paris.
BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BAILLAUD, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
BARBIN (H.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Lillers (Pas-de-Calais).
BEAUMONT (Élie de), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, à Paris
BERTRAND (Marcel), répétiteur auxiliaire à l'École Polytechnique, à Paris.
BÉZIER (E.), professeur au lycée de Vendôme.
BIENAYMÉ (Alexis), capitaine du Génie, à Versailles.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, à Brest.
BIENAYMÉ (J.), membre de l'Institut, à Paris.
BLEYNIE (Martial), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à Paris.
BOUCHÉ (A.), ancien élève de l'École Normale, directeur de l'École préparatoire d'Angers.
BOUFFET (M.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne.
BOURGET, agrégé de l'Université, à Paris.
BRISSE (Ch.), agrégé de l'Université, à Paris.
BRUNET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
CAHEN, sous-lieutenant du Génie, à l'École de Fontainebleau.
CAPITANEANO (Constantin), capitaine d'État-major, à Bucharest.
CATINEAU (H.), chef d'escadrons d'Artillerie en retraite, à Châtellerault.
CHARLON, directeur de *la Confiance*, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, à Paris. S. P.
CHEVALIER, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
CLAVEUX, sous-intendant de 1re classe, à Versailles.
COLLIGNON (Éd.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
COMBETTE, professeur au lycée de Versailles.
CONINCK (Gustave de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Dinan.
CORNU (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
COURCELLES (C.), professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
CUVINOT, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nantes.
DARBOUX, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.
DESBOVES, professeur au lycée Condorcet, à Paris.
DESQ (L.), lieutenant au 24e d'Artillerie, à Marseille.
DEWULF (Ed.), commandant du Génie, à Hyères.

DORMOY, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
DOSTOR (G.), docteur ès sciences, à Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DURRANDE (H.), professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.
FLYE SAINTE-MARIE (C.), capitaine d'Artillerie, à Avignon.
FONTÈS (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saint-Amand-du-Cher.
FOURET (G.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
FOURNIER (V.), ingénieur civil, à Paris.
GARIEL (M.-C.), professeur à l'École de Médecine, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire, à Paris. S. P.
GAUTIER (P.), docteur ès sciences, professeur au lycée de Versailles.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Sidi-bel-Abbès (Oran).
GERONO, professeur de Mathématiques, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
GODART, directeur de l'institution Monge, à Paris.
GOFFARD (M.), professeur au lycée de Rouen.
GOURNERIE (de la), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Paris.
GRAINDORGE (J.), docteur ès sciences, à Liége.
GROS, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris,
HALPHEN (G.), capitaine d'Artillerie, à Paris. S. P.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
HATT (Ph.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HENRY (P.), sous-lieutenant d'Artillerie, à l'École de Fontainebleau.
HÉRAUD (G.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HERMARY, capitaine au 25e d'Artillerie, à Vincennes.
HOUBIGANT (J.), chef de bataillon du Génie en retraite, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, à Paris.
HUYOT (E.), ingénieur des Mines, à Paris.
JACOMET (Ch.), inspecteur des Lignes télégraphiques, à Albi.
JACQUIER (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Brive.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, à Paris.
JAÏ (Aimé), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
JORDAN (C.), ingénieur des Mines, à Paris.
JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau.
KŒHLER, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
KRETZ, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
LAFFON DE LADÉBAT (Vice-amiral), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
LAGUERRE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAURENT (H.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille, à Paris.
LEMOINE (E.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LE VERRIER, répétiteur auxiliaire à l'École Polytechnique, à Paris.
LÉVI (Albert), secrétaire agent comptable de l'Observatoire, à Paris.
LEVY (Maurice), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
LUCAS (F.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
MALEYX (L.), professeur au Collége Stanislas, à Paris.
MANNHEIM (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
MAREL, colonel d'État-major en retraite, à Alger.
MARGERIE, sous-directeur de l'institution Monge, à Paris.
MARIE (Maximilien), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
MARSILLY (Général de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Auxerre.
MIGNON (A.), capitaine au 6e d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (G. de), lieutenant du Génie, à Sannois (Seine-et-Oise).
MOREL (A.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
MOUTARD (Th.), ingénieur des Mines, à Paris.
NICOLAIDÈS, professeur à l'Université d'Athènes.
AINVIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Descartes, à Paris.

PARMENTIER (Th.), colonel du Génie, directeur des fortifications du Havre.
PARRAN (A.), ingénieur des Mines, à Paris.
PERCIN (A.), capitaine d'Artillerie, à la Manufacture d'armes de Châtellerault.
PICQUET (H.), capitaine du Génie, à Paris.
PISTOYE (L. de), capitaine d'Artillerie, à la Manufacture d'armes de Châtellerault.
PLOCQ (A.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Dunkerque.
PLOIX (Edmond), ingénieur hydrographe de la Marine, à Paris.
POIREL (V.), inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, à Rosières-aux-Salines (Meurthe-et-Moselle).
POLIGNAC (Camille de), à Paris. S. P.
POUILLOT (J.), agrégé de l'Université, professeur à l'École normale de Cluny.
PROTCHE (F.-A.), commandant en second et directeur des études de l'École d'application de Fontainebleau.
PUTZ (H.), chef d'escadrons d'Artillerie, à Paris.
RADAU (R.), à Paris.
RENAN, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
RESAL, professeur à l'Ecole Polytechnique. à Paris.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort-sur-Mer.
RITTER (F.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Niort.
RODET, ingénieur à la Manufacture des Tabacs, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, à Paris.
ROLLIER, inspecteur général de l'Université, à Paris.
ROUART, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
ROUCHÉ (E.), professeur à l'École Centrale, à Paris.
ROUSSELIN (A.), professeur au lycée de Douai.
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, à Paris.
SAINT-GERMAIN (A. de), docteur ès sciences, à Paris.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Senlis.
SCHÖNDORFFER, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
SCRIVANOFF (Grégoire), étudiant à l'Université de Saint-Pétersbourg.
SERRET (J.-A.), membre de l'Institut, à Paris.
SERRET (Paul), docteur ès sciences, à Paris.
SIMON (Ch.), professeur au lycée Descartes, à Paris.
SOMMIEZ (C.), censeur au lycée de Nevers.
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
TANNERY, directeur des travaux du magasin des Tabacs, à Bergerac.
TARATTE (E.), ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université, à Évreux.
TARBOURIECH, agrégé de l'Université, à Paris.
TERRIER, professeur à l'Académie de Neuchâtel (Suisse).
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
TISSERAND, astronome adjoint à l'Observatoire, à Paris.
TOURNEUR (Paul), ingénieur civil des Mines, à Marnaval (Haute-Marne).
TRESCA (É.), ingénieur ordinaire des Ponts et Chaussées, à Pontivy.
TURQUAN, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lorient.
VACQUANT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur au lycée d'Alger.
WELSCH, sous-lieutenant d'Artillerie, à l'École de Fontainebleau.
WEYR (Dr Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague.
WICKERSHEIM, élève-ingénieur des Mines, à Paris.

STATUTS DE LA SOCIÉTÉ

Article premier. La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siége est à Paris.

Art. 2. Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux mathématiques.

Art. 3. La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Art. 4. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

Art. 5. Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Art. 6. L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

Art. 7. Le conseil est présidé par le président de la Société.

Art. 8. Le bureau est composé de :

1 président;
4 vice-présidents;
2 secrétaires;
2 vice-secrétaires;
1 trésorier;
1 archiviste.

Art. 9. Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

Art. 10. Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

Art. 11. Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

Art 12. Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

Art. 13. Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

Art. 14. Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

Art. 15. La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé de recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société ; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF

CHAPITRE PREMIER

CONDITIONS D'ADMISSION

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquitement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois ; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortants du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part

aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du Bulletin devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le Bulletin.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le Bulletin, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du Bulletin et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par le secrétaire; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du Bulletin et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs ;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au Bulletin des séances avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du Bulletin. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{9}{10}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V

RÉVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF

47. Toute proposition de révision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de révision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 6 NOVEMBRE 1872

PRÉSIDÉE PAR M. LAFFON DE LADÉBAT

La Société procède, par la voie du scrutin, à la nomination des membres du Bureau et du Conseil. Sont élus :

Président	M. CHASLES.
Vice-Présidents	M. LAFFON DE LADÉBAT. M. RESAL. M. DARBOUX. M. MOUTARD.
Secrétaires	M. BRISSE. M. LAGUERRE.
Vice-Secrétaires	M. LÉVY (Albert). M. LAURENT.
Trésorier	M. ANDRÉ (Désiré).
Archiviste	M. HOUBIGANT.
Membres du Conseil	M. BEAUMONT (Élie de) M. BIENAYMÉ. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. COLLIGNON. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LÉVY (Maurice). M. MANNHEIM. M. PAINVIN. M. SERRET (J.-A.).

Membres du Conseil non résidents. { M. AOUST (L'abbé). M. CLAYEUX. M. PARMENTIER. M. PROTCHE.

SÉANCE DU MERCREDI 20 NOVEMBRE 1872

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Le secrétaire annonce que MM. Chasles, Halphen, Haton de la Goupillière, Laffon de Ladébat, Camille de Polignac, se sont fait inscrire comme *sociétaires perpétuels*.

M. Brisse donne lecture, de la part de M. le docteur Émile Weyr, membre de la Société et professeur à l'École polytechnique de Prague, de *Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate*.

La discussion est ouverte sur le projet de *Statuts* et de *Règlement administratif* présenté par le Conseil; les modifications suivantes y sont apportées :

1° La Société prend le nom de *Société mathématique de France;*

2° La cotisation des membres non résidents est fixée à *quinze* francs;

3° Cette cotisation étant payable par année, le commencement de l'année est fixé, au point de vue financier, au 1er novembre.

L'ensemble des *Statuts* et du *Règlement administratif* est adopté.

SÉANCE DU MERCREDI 4 DÉCEMBRE 1872

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Le secrétaire annonce que l'Académie des sciences a décerné, dans sa dernière séance annuelle, le *prix Poncelet* et le *prix Dalmont* à deux des membres de la Société : MM. Camille Jordan et Maurice Levy.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Aron (Henri), banquier, à Paris; Bertrand (Marcel), répétiteur auxiliaire à l'École polytechnique; Capitaneano (Constantin), capitaine d'état-major, à Bucharest; Combette, professeur au lycée de Versailles; Cornu, professeur à l'École polytechnique; Croullebois, professeur à la faculté des sciences de Marseille; Fournier, ingénieur civil, à Paris; Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, à Paris; Hermary, capitaine d'artillerie, à Vincennes; Le Verrier, répétiteur auxiliaire à l'École polytechnique; Rollier, inspecteur général de l'Université; Simon (Charles), professeur au lycée

Descartes ; Tarbouriech, agrégé de l'Université, à Paris ; Théry, professeur au lycée de Douai ; Wickersheim, élève-ingénieur des mines.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Camille Jordan communique à la Société une note *Sur les substitutions orthogonales à un nombre quelconque de variables.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est le réciproque de la surface de Steiner.*

M. Moutard communique à la Société une note *Sur les propriétés d'un hyperboloïde osculateur lié aux lignes osculatrices d'une surface.*

SÉANCE DU MERCREDI 18 DÉCEMBRE 1872

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Camille Jordan donne communication d'une lettre de M. Lie annonçant qu'on s'occupe en Norvége de rééditer les œuvres d'Abel, et demandant l'appui des savants français.

La Société décide que M. Chasles écrira, au nom de la Société, pour exprimer tout l'intérêt qu'elle prend à cette publication.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Brunet, ingénieur des manufactures de l'État ; Vacquant, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis ; Vollot (Jules), professeur au lycée d'Alger.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Kœhler communique à la Société une note *Sur la construction des courbes du 5me et du 6me ordre à points multiples.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre.*

SÉANCE DU MERCREDI 8 JANVIER 1873

PRÉSIDÉE PAR M. LAFFON DE LADÉBAT

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Cahen, sous-lieutenant à l'École de Fontainebleau; Genty, ingénieur des ponts et chaussées, à Sidi-bel-Abbès (Oran); Desboves, professeur au lycée Condorcet; Lespiault, professeur à la faculté des sciences de Bordeaux; Rouart, ancien élève de l'École polytechnique, à Paris; Schöndorffer, élève-ingénieur des ponts et chaussées; Stephan, directeur de l'observatoire de Marseille.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M Darboux communique à la Société une note *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales.*

M. Émile Lemoine communique à la Société une note *Sur une question de probabilités.*

M. Camille Jordan communique à la Société un mémoire *Sur la limite de transitivité des groupes non alternés.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate; par M. Émile Weyr.

(Séance du 20 novembre 1872)

Soit O le point double d'une lemniscate L, qui est la podaire de l'hyperbole équilatère H. La lemniscate est une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe, avec trois points doubles, savoir: O et les deux points circulaires à l'infini. Les tangentes au point O sont des tangentes d'inflexion. On peut alors démontrer les théorèmes suivants:

Par chaque point X *de la lemniscate* L, *passent quatre tangentes de cette courbe (parmi elles, deux sont imaginaires), dont les points de contact sont sur une même droite* R, *et qui forment un système de quatre points équianharmoniques sur la courbe.*

La droite R *est perpendiculaire au rayon* OX, *et retranche du prolongement de ce rayon une longueur égale à* $\frac{OX}{2}$.

L'enveloppe de la droite R *est donc une hyperbole équilatère semblable, semblablement située, et concentrique avec* H, *qu'on peut obtenir en prenant la moitié des rayons de l'hyperbole* H.

Un cercle quelconque a quatre points d'intersection avec la lemniscate; soit a, b, c, d *un système de tels points. Si l'on fait passer un deuxième cercle par* a *et* b, *et un troisième par* c *et* d, *les quatre nouveaux points de rencontre de ces deux cercles avec la lemniscate sont aussi situés sur un même cercle.*

En passant aux cercles osculateurs, on trouve qu'un tel cercle, dont X *est le point de contact, coupe la lemniscate en un seul autre point* Y, *tel que* $\widehat{XYO} = \frac{\pi}{2}$, *c'est-à-dire que les cordes* XY *communes aux cercles osculateurs et à la lemniscate sont tangentes à l'hyperbole* H.

Par chaque point Y *de la courbe* L *passent trois cercles osculateurs, dont les points de contact sont en ligne droite, savoir sur la droite perpendiculaire en* Y *au rayon* OY.

Ces points de contact forment des groupes d'une involution du troisième ordre avec deux points triples, qui sont infiniment voisins du point O.

Si les quatre points X *de contact des quatre cercles osculateurs sont sur un même cercle, la même chose a lieu pour les quatre points* Y *d'intersection de ces cercles avec la lemniscate.*

Des propriétés analogues ont lieu pour les courbes planes du quatrième ordre avec trois points doubles, dont deux sont les points circulaires à l'infini.

Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre; par M. Halphen.

(Séance du 4 décembre 1872)

Dans un mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des sciences, au commencement de l'année 1870, et où il est traité de la théorie générale des courbes gauches algébriques, j'ai démontré divers théorèmes relatifs aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre. Le plus saillant d'entre eux est le suivant: *Les surfaces de degré minimum, qui passent par une ligne algébrique quelconque tracée sur une surface du second ordre, coupent cette dernière, en outre, seulement suivant des droites d'un même système.*

Je me propose de donner ici une démonstration de ce théorème, très-simple et différente de celle qui est contenue dans le mémoire précité. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Si, par l'intersection complète de deux surfaces S *et* S_1, *d'un degré égal au produit des degrés de ces surfaces, on mène une troisième surface* S_2, *de degré supérieur à celui de* S_1, *la courbe, suivant laquelle les surfaces* S *et* S_2 *se coupent en outre, est l'intersection complète de la surface* S *et d'une autre surface.*

En effet, en figurant par $S = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ les équations de ces surfaces, on a, d'après l'hypothèse, $S_2 = AS + BS_1$, A et B étant des polynômes dont le premier s'évanouit si le degré de S_2 est inférieur à celui de S. Cette relation prouve que l'intersection de S_2 et de S se compose de celles de cette dernière surface avec les surfaces $S_1 = 0$ et $B = 0$.

Cela posé, soit une courbe algébrique P, de degré p, sur une surface du second ordre. Soit q le nombre de ses points de rencontre avec les génératrices rectilignes d'un système, et, par suite, $p-q$ le nombre de ses points de rencontre avec celles de l'autre système. Si la courbe proposée est l'intersection complète de la surface du second ordre et d'une autre surface, ces deux nombres sont égaux tous deux au degré de cette dernière surface. Nous allons démontrer le théorème réciproque, c'est-à-dire que :

Si une courbe tracée sur une surface du second ordre rencontre en un même nombre de points les génératrices rectilignes des deux systèmes, elle est l'intersection complète de la surface du second ordre et d'une autre surface.

Soit donc une courbe P_1 de degré $2q$, rencontrant en q points toutes les génératrices rectilignes d'une surface du second ordre S, sur laquelle elle est tracée. Par cette courbe on peut mener une surface Σ de degré $2q-1$, par exemple un cône ayant son sommet sur la courbe. Les surfaces S et Σ se coupent, en outre, suivant une courbe P_2 de degré $2(q-1)$, qui rencontre également toutes les génératrices rectilignes de S en un même nombre de points. Admettons que le théorème soit vrai pour les courbes de degré $2(q-1)$. Il en résultera que P_2 est une intersection complète. Donc, d'après le lemme, la courbe P_1, suivant laquelle se coupent en outre les surfaces S et Σ passant par P_2, est aussi une intersection complète. Donc, si le théorème est vrai pour les surfaces de degré $2(q-1)$, il l'est aussi pour celles de degré $2q$. Or, il l'est évidemment pour celles du degré 2, qui sont planes. Donc le théorème est démontré.

Revenons maintenant à une courbe P quelconque, de degré p, rencontrant les droites de la surface respectivement en q et $p-q$ points. Soit, pour fixer les idées, q le plus grand de ces deux nombres q et $p-q$. A la courbe P adjoignons $q-(p-q)$ ou $2q-p$ droites de la surface, rencontrées chacune par cette courbe en q points. Il est clair que l'ensemble de la courbe P et de ces droites forme une ligne P_1 de degré $2q$, rencontrant en q points toutes les génératrices rectilignes. La ligne P_1 est donc une intersection complète. Il existe donc des surfaces de degré q, passant par la courbe P, et coupant en outre la surface S suivant des droites d'un même système. Il est clair d'ailleurs que l'on ne peut mener par P des surfaces de degré moindre que q, puisque cette courbe est rencontrée en q points par des droites. De plus, toute surface de degré q, menée par P, coupe, en outre, la surface du second ordre suivant une courbe P', de degré $2q-p$, qui rencontre les génératrices rectilignes d'un système en $2q-p$ points, et ne rencontre pas celles de l'autre système. Or, une courbe qui rencontre une droite en un nombre de points égal à son degré se réduit forcément à des droites. Donc toute surface de degré q menée par P coupe la surface S, en outre, suivant des droites d'un même système; ce qui démontre entièrement le théorème annoncé.

Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est a réciproque de la surface de Steiner; par M. Laguerre.

(Séance du 4 décembre 1872)

1. On dit qu'une surface S peut être représentée sur un plan P, lorsqu'à chaque point M de la surface correspond un point unique et bien déterminé du plan, et réciproquement lorsqu'à chaque point du plan correspond un point unique et bien déterminé de la surface.

Lorsque le point M de la surface décrit une courbe, le point m, qui lui correspond sur le plan, décrit une autre courbe qui est, pour ainsi dire, l'image de la première, et l'on comprend que les propriétés des courbes tracées sur la surface puissent se déduire de celles des courbes qui sont leurs images.

La projection stéréographique, qui constitue un des moyens que l'on peut employer pour représenter, dans le sens que je viens d'indiquer, la sphère sur le plan, a déjà depuis longtemps familiarisé les géomètres avec ces considérations qui permettent non-seulement de transporter à la sphère les propriétés descriptives et métriques des figures planes, mais encore, en sortant de la sphère, d'établir des propriétés importantes des figures dans l'espace.

Le but de cette note est d'appliquer la même méthode à l'étude d'une surface remarquable du troisième ordre, que j'ai déjà étudiée analytiquement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*).

2. Il est facile de voir qu'une surface quelconque du troisième ordre peut être représentée sur un plan.

Une telle surface contient en général 27 droites; soient D et D′ deux de ces droites qui ne sont pas dans un même plan.

Par un point M de la surface, on peut mener une droite unique et bien déterminée qui s'appuie sur D et D′, cette droite rencontrera un plan P arbitrairement choisi en un point bien déterminé m; réciproquement le point m étant donné, on ne pourra mener par ce point qu'une droite s'appuyant sur D et D′; cette droite rencontrera la surface du troisième ordre en deux points situés respectivement sur D et D′, et en un troisième point M distinct de ces points et parfaitement déterminé.

On obtient ainsi, on le voit, une représentation de la surface sur le plan P; on aurait évidemment pu, dans le même but, employer au lieu des droites D et D′ une cubique gauche quelconque tracée sur la surface, car une

(*) *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner;* t. XI, 2e série, 1872.

des propriétés caractéristiques de cette courbe consiste en ce que, par chaque point de l'espace, on ne peut mener qu'une seule droite qui la rencontre en deux points (*).

3. Dans ce qui suit, je m'occuperai spécialement de la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre S qui contient les six arêtes d'un tétraèdre T.

En prenant ce tétraèdre pour tétraèdre de référence, on voit que l'équation d'une pareille surface est de la forme

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{u}=0.$$

La surface qui lui est réciproque (c'est-à-dire la surface qui est, par rapport à une surface du second degré, le lieu des pôles des plans qui lui sont tangents) est une surface du quatrième ordre; et cette nouvelle surface jouit de la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, c'est donc la *surface* dite *de Steiner*.

On en conclut que, si l'on considère un cône circonscrit à S, et ayant pour sommet un point de cette surface, ce cône se compose de deux cônes du second degré ; la courbe de contact se décompose aussi en deux courbes distinctes qui sont évidemment des cubiques gauches.

4. Quand on étudie la représentation sur un plan de la surface S, on voit facilement que l'on peut effectuer la représentation de telle sorte qu'à toute courbe plane de S corresponde, sur le plan, une cubique passant par six points fixes (Π) qui sont les sommets d'un quadrilatère complet Q, et qui correspondent d'ailleurs aux six arêtes du tétraèdre situé sur S.

Cela posé, soient A et B deux points de S, et a, b les points qui leur correspondent sur le plan; soient de plus C le troisième point où la droite AB rencontre S, et c le point correspondant.

Toutes les sections planes de S, qui passent par A et B, passent également par le point C; les cubiques qui sont leurs images passent donc aussi toutes par le point c, d'où il suit que ce point est le *neuvième point* commun aux cubiques qui passent par les points a et b, et les six sommets du quadrilatère Q.

Pour déterminer facilement ce neuvième point, supposons, pour un instant, que les points a et b soient les ombilics du plan, c'est-à-dire les points de l'infini où se croisent tous les cercles de ce plan. Si l'on met de côté un

(*) Sur la représentation sur un plan d'une surface du troisième ordre, voir le beau mémoire de M. Cremona *Sur les surfaces du troisième ordre*, et la *Géométrie de situation* de M. Reye, p. 172 et 299.

M. Cremona a aussi publié (*Comptes rendus de l'Institut lombard*, 1867) un mémoire sur la représentation sur un plan de la surface de Steiner, mais je n'ai pu en prendre connaissance.

des côtés du quadrilatère Q, les trois autres côtés déterminent un triangle, et le cercle circonscrit à ce triangle constitue, avec le côté dont j'ai parlé, une cubique passant par les huit points a, b et (Π); ce cercle passe donc par le neuvième point.

D'où cette proposition : « En prenant, trois à trois, les quatre côtés d'un quadrilatère complet, on détermine quatre triangles; les cercles circonscrits à ces triangles se coupent en un même point O, qui est le neuvième point commun aux cubiques qui passent par les ombilics du plan et les six sommets du quadrilatère. »

Imaginons la parabole inscrite dans ce quadrilatère, les quatre triangles dont je viens de parler lui sont circonscrits, et l'on sait que le cercle circonscrit à un triangle, circonscrit lui-même à une parabole, passe par le foyer de cette courbe.

Le point O est donc le foyer de cette parabole, ou encore le point de rencontre des tangentes qu'on peut lui mener par les ombilics.

5. Revenant maintenant au cas général, nous voyons que pour construire le neuvième point commun aux courbes du troisième ordre, qui passent par les six sommets d'un quadrilatère complet et deux points donnés a et b, il suffit d'inscrire dans le quadrilatère une conique tangente à ab, et par les points a et b de mener des tangentes à cette courbe; le point d'intersection de ces droites est le point cherché.

En d'autres termes, *si trois points* A, B *et* C *de la surface* S *sont en ligne droite, leurs images* a, b *et* c *sur le plan forment un triangle dans lequel on peut inscrire une conique inscrite dans le quadrilatère* Q.

Pour abréger, j'appellerai simplement *coniques du faisceau* les coniques inscrites dans le quadrilatère Q.

6. Considérons une droite tangente au point A à la suface S, ou, si l'on veut, passant par le point A et le point infiniment voisin A′; si l'on désigne par a et a' les images des points A et A′, on voit que, pour obtenir l'image du troisième point où la tangente rencontre la surface, il suffit de construire une conique du faisceau tangente à aa', et de mener par a la seconde tangente à cette conique, le point de contact b de cette tangente est l'image du point cherché.

D'où les conséquences suivantes :

1° *Le plan mené au point* A, *tangentiellement à* S, *coupe cette surface suivant une courbe du troisième ordre à point double, lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point* a *aux coniques du faisceau.*

2° *Les lignes asymptotiques de la surface* S *ont pour images les coniques du faisceau.*

En effet, soit t une tangente à l'une de ces coniques et touchant cette courbe au point a, le point de contact de la deuxième tangente, qu'on peut

mener du point a à la conique se confond avec le point lui-même, la proposition est donc démontrée (*).

3° *Si l'on circonscrit à la surface les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* A *de cette surface, les deux cubiques de contact ont pour images les tangentes aux deux coniques du réseau qui se croisent au point* a.

7. Soit z une conique du réseau représentant l'asymptotique Z de la surface S et M un point de cette asymptotique; il est le sommet de deux cônes du second degré circonscrits à S et qui la touchent suivant deux cubiques gauches dont l'une est représentée par la tangente menée en m à la cubique z; je dirai que cette cubique *appartient* à l'asymptotique Z, en sorte que l'ensemble des cubiques appartenant à cette courbe sera représenté par l'ensemble des droites tangentes à z.

En se reportant au n° 7, on déduira facilement de cette définition la proposition suivante :

La surface développable, qui a pour arête de rebroussement une cubique appartenant à une asymptotique Z, *coupe la surface suivant cette asymptotique.*

D'où encore :

Si l'on circonscrit à S *les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* M *de cette surface, les surfaces développables dont les courbes de contact sont les arêtes de rebroussement coupent* S *suivant les asymptotiques qui se croisent au point* M.

8. Soit une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z et A l'un de ses points; joignons A à un autre point quelconque B de la cubique, la droite ainsi obtenue rencontre S en un point C dont il est facile d'avoir l'image.

En effet, a et b étant les images des points A et B et c l'image du point C, il suffit (n° 5) pour construire le point c, de considérer la conique z qui est tangente à ab et de mener par les points a et b deux tangentes à cette courbe; le point d'intersection des ces deux droites, qui est le point c, est nécessairement sur la tangente menée par le point a; d'où cette conséquence importante :

Étant donnée une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z, *si l'on imagine un cône quelconque du second degré contenant cette cubique, il coupe la surface* S *suivant une seconde cubique qui appartient également à l'asymptotique* Z;

(*) Clebsch a le premier trouvé les asymptotiques de la surface de Steiner dont on déduit, par réciprocité, les asymptotiques de la surface donnée.

M. Darboux (*Bulletin des sciences mathématiques*, t. I, p. 355) a, d'une façon plus générale, déterminé les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'équation

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0.$$

Ou autrement :

Deux cubiques appartenant à la même asymptotique sont situées sur un même cône du second degré, ayant pour sommet le point d'intersection de ces courbes qui est distinct des sommets du tétraèdre fondamental T.

9. Lemme. — *Quand un tétraèdre est inscrit dans une cubique gauche, toute corde de la cubique coupe les faces du tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient maintenant deux cubiques quelconques appartenant à une asymptotique Z; ces deux cubiques sont toutes deux circonscrites au tétraèdre T et sont situées sur un même cône du second degré, elles ont donc une infinité de cordes communes; on déduit, de là et du lemme précédent, la proposition suivante :

Les cordes de toutes les cubiques appartenant à l'asymptotique Z *coupent les faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Leur ensemble constitue ainsi le complexe remarquable du second ordre étudié par MM. Chasles, Reye, Lie, Darboux (*).

En particulier, les tangentes aux cubiques font partie du complexe ainsi que les tangentes à l'asymptotique Z qui est l'enveloppe de ces cubiques. Par suite :

Les tangentes à une asymptotique Z *rencontrent les quatre faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est une quantité constante* ζ, *et le complexe* (Z) *des droites, qui sont partagées dans le même rapport par les faces du tétraèdre, se compose des cordes des cubiques appartenant à cette asymptotique* (**).

On déduit encore de ce qui précède les propositions suivantes :

Étant données deux cubiques gauches situées sur un même cône du second ordre, ces deux cubiques se coupent en quatre points A, B, C *et* D *distincts du sommet du cône; cela posé, les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, se coupent suivant une courbe du dixième ordre et une courbe* K *du sixième ordre et de quatrième classe; cette courbe* K, *les deux cubiques gauches et les six arêtes du tétraèdre* ABCD *sont situées sur une même surface du troisième ordre dont* K *est une asymptotique.*

Le cône du complexe ayant pour sommet un point donné de la surface S *est le cône du second degré qui contient les deux cubiques appartenant à l'asymptotique* Z *et se croisant en ce point.*

Tous les cônes circonscrits à S *et ayant leur sommet sur* Z *sont des cônes du complexe.*

10. Une droite quelconque de l'espace, rencontrant la surface fondamen-

(*) Voir notamment Reye, *Geometrie der Lage*, t. II, p. 126 et 299.

(**) Cf. Sophus Lie, *Ueber Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen;* Math. Ann., t. V.

tale S aux points A, B et C, peut être représentée par le triangle *abc*, dont les sommets sont les images des points A, B et C.

Une droite de l'espace aura donc pour image un triangle circonscriptible à une conique du faisceau.

En particulier, toutes les droites du complexe (Z) ont pour images les divers triangles que l'on peut circonscrire à la conique z.

Soient *abc* l'un de ces triangles et α, β, γ les points où z est respectivement touchée par les côtés *bc*, *ca*, *ab*. Le plan mené par A tangentiellement à S coupe cette surface (n° 6, 1°) suivant une cubique à point double qui a pour image le lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point a aux coniques du faisceau; cette courbe, et par suite le plan tangent, passe donc par les points de l'asymptotique qui ont leur image en β et γ; on démontrerait de même que les plans menés en B et C, tangentiellement à S, passent respectivement par les points de l'asymptotique dont les images sont γ, α et α, β.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si on coupe la surface S *par une droite quelconque du complexe* (Z), *les plans tangents, menés à la surface aux trois points de rencontre, forment un trièdre dont les trois arêtes rencontrent* Z.

Autrement :

Si les trois faces d'un trièdre circonscrit à la surface S *la touchent en trois points situés en ligne droite, des neuf points d'intersection des arêtes du trièdre avec la surface, il y en a trois qui sont situés sur une même asymptotique.*

Réciproquement :

Un triangle quelconque étant inscrit dans une asymptotique Z, *on peut toujours construire un trièdre dont les faces passent par les côtés de ce triangle et qui touchent la surface en trois points situés en ligne droite. Cette droite appartient au complexe* (Z).

11. Soit K une conique quelconque située dans le plan sur lequel on fait l'image de la surface; on peut construire deux coniques du faisceau C et C′ telles qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire des triangles inscrits dans K.

L'ensemble des triangles circonscrits à C représente un système de droites s'appuyant sur K en trois points; K est donc l'intersection de S par une surface réglée V. Comme, d'ailleurs, la même courbe est l'intersection de S par les droites dont l'image est formée par les triangles circonscrits à C′, on voit que la surface V admet deux systèmes de génératrices rectilignes; c'est par conséquent une surface du second ordre qui, d'ailleurs, passe par les quatre sommets du tétraèdre T.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Toute conique du plan est l'image d'une courbe du sixième ordre, inter-

section de S *et d'une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T ;

Et réciproquement :

Si l'on coupe la surface S *par une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T, *la courbe d'intersection a pour image une conique.*

12. En particulier une asymptotique Z de la surface est située sur une surface du second ordre qui admet deux systèmes de génératrices rectilignes (G) et (G').

Si l'on applique aux points de rencontre de la courbe et de ces droites la dernière proposition du n° 10, on obtient les théorèmes suivants :

Par chaque génératrice G, *on peut mener quatre plans tangents à la surface; des quatre points de contact trois sont sur une même ligne droite* D, *qui appartient au complexe* (Z) *et qui engendre une surface du second ordre* (A) *coupant* S *suivant une courbe* A ; *le quatrième point de contact décrit une courbe* A'.

Par chaque génératrice G', *on peut mener quatre plans tangents à la surface; un des points de contact est situé sur la courbe* A, *les trois autres sont sur une ligne droite* D' *qui engendre la surface du second ordre* (A') *qui contient la courbe* A'.

On déduit de là que *la surface développable circonscrite à* S *et à la surface du second ordre qui contient l'asymptotique* Z *se décompose en deux surfaces du quatrième ordre touchant* S *le long des courbes* A *et* A'.

13. Les beaux théorèmes de Poncelet sur les polygones circonscrits à une conique, tandis que leurs sommets décrivent d'autres coniques, conduisent à plusieurs propriétés intéressantes de la surface S, relativement surtout aux diverses surfaces réglées que l'on peut faire passer par des courbes tracées sur ces surfaces ; je reviendrai plus tard sur ce sujet qui, pour être convenablement traité, exige une étude préalable du théorème de Poncelet lui-même.

Sur la construction des courbes du 5me et du 6me ordre à points multiples ;

par M. Kœhler.

(Séance du 18 décembre 1872)

Quand on se propose de construire une courbe d'ordre m définie par un nombre suffisant de points, la présence de points multiples parmi les données simplifie en général le problème. Si n et n' sont les ordres des faisceaux générateurs ($n+n'=m$), et s'il y a p points doubles, on sait en effet que le nombre des points à déterminer pour compléter les bases est $x=nn'-1-p$. Mais cette formule suppose essentiellement que p ne dé-

passe pas un certain maximum relatif, savoir le nombre des points des deux bases que l'on peut faire coïncider (*). Comme les courbes d'ordre supérieur au 4me peuvent avoir un nombre de points doubles supérieur à cette limite, on peut être obligé de laisser en dehors des bases un ou plusieurs de ces points. Je me suis proposé l'étude des divers cas où cette circonstance se présente, spécialement pour les courbes du 5me et du 6me ordre.

I. — COURBES DU 5me ORDRE.

En adoptant pour faisceaux générateurs un faisceau de coniques et un faisceau de courbes du 3me ordre, on voit qu'on peut engendrer une courbe à 4 points doubles en faisant coïncider les 4 points de la première base avec 4 points de la seconde. Ici le maximum relatif dont j'ai parlé plus haut est 4; toutefois lorsqu'on donne 5 points doubles a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, et 5 points simples f, g, h, i, k, on peut encore affecter les 5 premiers points aux deux bases. Voici alors la construction :

La base des coniques étant $abcd$, on fera passer toutes les cubiques par ces 4 points; elles auront en outre le point double commun e_2. Il reste à fixer un point p de leur base. Soit O un point quelconque du plan; soient F, G, H, I, K les points de concours des secondes polaires rectilignes de O par rapport aux courbes des faisceaux e_2abcdf, e_2abcdg, etc. Au quadrilatère FGHI je circonscris une conique telle que son rapport anharmonique x(FGHI) soit égal au rapport $abcd$ (f, g, h, i). De même je circonscris à FGHK une conique capable du rapport anharmonique $abcd$ (f, g, h, k). La 4me intersection P de ces deux coniques est le point de concours des secondes polaires de O par rapport au faisceau de cubiques e_2abcdp.

Le point p lui-même se conclut de là facilement; il suffit de chercher l'intersection de la cubique e_2abcdO tangente en O à OP et de la cubique dont la seconde polaire est e_2P (**).

Supposons en second lieu que l'on donne 6 points doubles a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2 et 2 points simples g, h.

Si l'on prend comme ci-dessus $abcd$ pour base des coniques, e_2abcd pour base des courbes du 3me ordre, il restera encore un point p de leur base à déterminer de telle sorte que f_2 devienne un point double pour la courbe résultante.

Or, la cubique correspondante à $abcdf$ doit avoir avec cette conique deux points confondus en f; elle est donc tangente en f à $abcdf$, et c'est un premier lieu du point p. Menons actuellement une droite f_2d passant par f_2 et

(*) De Jonquières, *Essai sur la génération des courbes géométriques*, p. 9.

(**) On simplifiera cette dernière construction en ayant la précaution de choisir le point O sur la tangente en e à la conique $eabcd$; alors la cubique dont la seconde polaire est eP se compose de cette droite et de la conique elle-même. De la sorte on aura à chercher l'intersection de cette ligne e_2P avec la cubique e_2abcdO.

par un des points de la première base. Si l'on prend un point arbitraire p' sur la cubique définie tout à l'heure, on voit que les courbes $e_2abcdp'f$, $e_2abcdp'g$, $e_2abcdp'h$ déterminent sur f_2d trois segments en involution fF', $G'G'_1$, $H'H'_1$; on peut les faire correspondre aux points f_2, g, h où les coniques $abcdf_2$, $abcdg$, $abcdh$ coupent la droite. En cherchant les points de coïncidence des deux divisions, on aura, outre le point f_2 déjà connu, deux nouveaux points X', Y' qui seraient la 4me et la 5me intersection de fd avec la courbe du 5me ordre correspondant à la position choisie pour p'. En prenant d'autres points p'', p''',... sur la même cubique, on aurait d'autres couples X''Y'', X'''Y''',.... Tous ces couples forment une involution quadratique correspondant à la série des points π où les droites e_2p', e_2p'', e_2p''',... coupent fd. Cela est évident, puisque les courbes du 5me ordre forment un faisceau ayant pour base les 5 points doubles $a_2b_2c_2d_2e_2$ (20 points), les points simples g, h, enfin les deux points infiniment voisins f sur la conique $abcdf$. Ainsi à un point X correspond un point Y, et aussi un seul point p, savoir la 15me intersection de e_2abcdf avec la courbe du 5e ordre déterminée par X. Réciproquement, à un point p (ou π) correspond un segment unique XY.

Il suffit maintenant de chercher le segment de l'involution XY dont une extrémité est en f : on déterminera le point π correspondant à ce segment; la ligne $e_2\pi$ coupera la cubique e_2abcdf en p, et ce sera le 5me point simple de la base du second faisceau.

Chacune des cubiques ayant déjà 4 points $abcd$ communs avec la conique correspondante, il reste pour chacune d'elles 2 points d'intersection à déterminer. Leur construction peut se faire à l'aide de la ligne droite et du cercle ainsi que les constructions préliminaires.

II. — COURBES DU 6me ORDRE.

Si l'on construit la courbe au moyen de deux faisceaux du 3me ordre, on ne peut faire coïncider plus de 7 points des deux bases; le maximum relatif du nombre des points doubles est donc 7. Le maximum absolu peut atteindre 10, mais on ne peut faire entrer plus de 9 points doubles dans les données.

M. de Jonquières a donné une solution du problème pour le cas où l'on donne 7 points doubles et 6 points simples (*loc. cit.*, p. 45).

On peut faire entrer les 7 points doubles a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, et un des points simples h dans la base du premier faisceau du 3me ordre. La base du second se composera des mêmes points doubles et d'un point inconnu. Il peut se déterminer par la considération des points de concours des secondes polaires d'un même point du plan relatives aux 5 faisceaux de cubiques $abcdefg$ (i, k, l, m, n) et sa détermination entraîne celle du 9me point commun à toutes les courbes du second faisceau. On peut remarquer

en outre que le 9me point de la base du faisceau *abcdefgh* appartient nécessairement à la courbe du 6me ordre, et il en est de même pour les 9mes points des faisceaux *abcdefgi*, *abcdefgk*, etc.

Supposons qu'on donne 8 points doubles a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, h_2, et 3 points simples i, k, l.

La courbe demandée fait partie du réseau déterminé par les 7 points doubles a_2, b_2,..., g_2 et par les points simples h, i, k, l. Si l'on considère le faisceau du réseau dont toutes les courbes touchent en h une même droite hX, il déterminera sur une droite telle que a_2b_2 joignant deux des points doubles donnés une involution quadratique. Un second faisceau tangent en h à une autre droite hY déterminera une autre involution sur a_2b_2. Le segment MN commun à ces deux involutions appartient à la courbe du 6me ordre demandée. Elle sera déterminée complétement par les points doubles a_2, b_2,..., g_2 et par les 6 points h, i, k, l, M, N, h étant traité comme point simple. Il est évident que cette courbe a un point double en h, puisqu'elle a deux points infiniment voisins communs avec deux droites différentes passant en h.

On voit qu'il suffit, pour obtenir les deux involutions quadratiques, de construire deux courbes de chacun des faisceaux tangents à hX et hY.

Construction de la courbe du 6me ordre à 9 points doubles. — Si l'on donne 9 points doubles a_2, b_2,..., i_2, la solution se déduit sans difficulté de celle du problème précédent. En mettant à part le point i, le faisceau déterminé par les 8 premiers points et par une tangente quelconque iX coupe une droite telle que a_2b_2 suivant une involution quadratique. Le faisceau déterminé par une autre tangente iY donne lieu à une autre involution qui a un segment KL commun avec la première. La question est ramenée à construire la courbe passant par les 8 premiers points doubles et par les 3 points i, K, L. On a en tout 4 points simples auxiliaires à déterminer.

Lorsque les 9 points donnés forment un groupe pivotable par des cubiques, le problème est indéterminé; les courbes du 6me ordre en nombre infini, qui répondent à la question, sont toutes décomposables en deux courbes du 3me ordre.

Supposons en effet que les points donnés équivalent aux 36 intersections de deux courbes du 6me ordre, et qu'on ne puisse faire passer qu'une seule cubique par ces 9 points. Prenons un point arbitraire k sur cette courbe; par hypothèse, on peut décrire une courbe du 6me ordre passant en k et par les points doubles a, b, c,..., i. Cette courbe aurait donc 19 points communs avec la cubique *abc*... *ik*; donc la cubique en fait partie.

On traiterait d'une manière tout à fait analogue le cas où l'on donnerait un point triple et 7 points doubles. En général, si une courbe d'ordre quelconque est déterminée par $p+\delta$ points doubles (p étant le maximum relatif) et par un nombre suffisant de points simples, on aura à déterminer

$nn'-1-p$ points pour compléter les bases des faisceaux générateurs et en outre 2δ points auxiliaires.

Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre; par M. Laguerre.

(Séance du 18 décembre 1872)

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Bien que les considérations suivantes puissent être appliquées à toutes les surfaces algébriques, et en particulier au plan (*), je ne les développerai, dans ce mémoire, que relativement aux courbes que l'on peut tracer sur une surface du second ordre.

Soit S une surface du second ordre, elle possède deux systèmes de génératrices rectilignes; avec M. Chasles (*Théorie des courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe*, Comptes rendus, 1861), j'appellerai directrices les droites de l'un de ces systèmes, en réservant le nom de génératrices aux droites de l'autre système.

Prenons arbitrairement sur S une conique K que je désignerai sous le nom de conique fondamentale; cette courbe est *unicursale*, c'est-à-dire qu'on peut désigner chacun de ses points par la valeur d'un paramètre t et de telle sorte qu'à chaque valeur du paramètre corresponde un point unique de la courbe.

Soit M un point de la surface S; par ce point passe une directrice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par x; par ce même point passe une génératrice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par y. Il est clair, du reste, que le point M est complétement déterminé et sans ambiguïté par les deux quantités x et y; je les appellerai les coordonnées du point M.

L'équation d'une courbe tracée sur S sera de la forme $f(x, y)=0$; son degré p, relativement à la variable x, indiquant en combien de points elle est coupée par une génératrice quelconque, et son degré q, relativement à la variable y, indiquant en combien de points elle est coupée par une directrice. (Voy. Chasles, *loc. cit.*)

2. On connaît le procédé ingénieux employé par Plücker pour rendre homogène l'équation $f(x, y)=0$, en remplaçant les variables x et y par

(*) Le cas du plan présente naturellement un très-grand intérêt, mais demande pour l'application de la théorie quelques explications dans lesquelles je n'ai pas voulu entrer ici.

$\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; nous emploierons ici un procédé analogue en remplaçant x par $\frac{x}{x'}$ et y par $\frac{y}{y'}$. De cette façon, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur S deviendra

$$F(x, x'; y, y') = 0,$$

le polynôme F étant homogène et du degré p par rapport aux deux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'.

3. Cela posé, je rappellerai d'abord ce que l'on nomme *émanant* d'une forme binaire ou d'un polynôme algébrique homogène à deux indéterminées.

Soit $U(x, x')$ un tel polynôme; on appelle émanants de ce polynôme les divers polynômes compris dans les expressions suivantes :

$$y\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dx'},$$
$$\frac{1}{2}\left(y^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2yy'\frac{d^2U}{dxdx'} + y'^2\frac{d^2U}{dx'^2}\right),$$
$$\frac{1}{2.3}\left(y^3\frac{d^3U}{dx^3} + 3y^2y'\frac{d^3U}{dx^2dx'} + 3yy'^2\frac{d^3U}{dxdx'^2} + y'^3\frac{d^3U}{dx'^3}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont la loi est facile à saisir.

Pour abréger, je désignerai ces émanants par la notation $(U)_1$, $(U)_2$, $(U)_3$,...; la parenthèse indiquant un émanant de la forme U, et l'indice qui lui est adjoint l degré de cet émanant par rapport aux lettres y et y'.

Lorsqu'une forme est de degré pair, elle possède un émanant dans lequel les variables x et y entrent au même degré; j'appellerai cet émanant *émanant principal* de la forme, et je le désignerai par la notation (U), en omettant l'indice adjoint à la parenthèse, lorsque cela ne donnera lieu à aucune ambiguïté.

4. Il résulte de ce qui précède que tout émanant d'une forme U se réduit à cette forme lorsque l'on identifie les variables x, x' et y, y'.

Soit U la forme du degré $(p+q)$ à laquelle se réduit le polynôme $F(x, x'; y, y')$ lorsqu'on fait $x' = x$ et $y' = y$; l'expression

$$F(x, x'; y, y') - (U)_q$$

est homogène et du degré p par rapport aux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'; de plus elle s'annule lorsqu'on fait $x = x'$ et $y = y'$, elle est donc divisible par

$$yx' - xy' = \omega,$$

et l'on peut poser

$$F(x, x'; y, y') = (U)_q + \omega F_1(x, x'; y, y'),$$

F_1 désignant un polynôme du degré $p-1$ par rapport aux variables x, x', et du degré $q-1$ par rapport aux variables y, y'.

On peut appliquer au polynôme F_1 le même raisonnement et, en continuant de proche en proche, mettre l'équation d'une courbe, tracée sur la surface du second ordre S, sous la forme suivante :

$$\Phi = (U)_q + \omega(V)_{q-1} + \omega^2(W)_{q-2} + \ldots = 0,$$

où U, V, W,... désignent respectivement des polynômes entiers en x et x', des degrés $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ...

5. En particulier si l'on a $p=q$, l'équation de la courbe pourra se mettre sous la forme

$$\Phi = (U) + \omega(V) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

où U, V et W désignent respectivement des polynômes entiers en x et x', des degrés $2p$, $2(p-1)$, $2(p-2)$; et je ferai observer que, dans ce cas, Φ est homogène et du degré p par rapport aux quantités $x-y$, xy et $x+y$ (*).

6. Par la forme précédente que j'ai donnée à l'équation d'une courbe algébrique, on voit que cette équation s'obtient en égalant à zéro un polynôme Φ, qui est un covariant double des formes U, V, W, ...; on sait en effet que ω est un covariant double de toutes les formes et qu'un émanant quelconque d'une forme est un covariant double de cette forme.

De là résulte que l'étude de cette courbe se rattache intimement à l'étude simultanée de ces formes; je ne veux pas dire par là qu'elle s'y réduise, car, pour étudier complètement une courbe, il est nécessaire de la comparer avec d'autres courbes qui introduisent d'autres formes dans cette étude.

On pourra toujours néanmoins, dans un calcul relatif à un certain nombre de courbes, faire en sorte que l'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires, et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques de ce système de courbes, ou pour simplifier les opérations.

S'il s'agit, par exemple, de calculer un covariant simple, il suffira de calculer son premier terme; s'il s'agit d'un invariant, on pourra le calculer sous sa forme canonique (**).

(*) Ici, pour abréger, je fais, comme je le ferai plus communément, dans la suite de ce mémoire, $x' = y' = 1$.

(**) Voir en général, sur cette théorie des formes, l'*Algèbre supérieure* de Salmon (Paris, Gauthier-Villars).

7. Eclaircissons ceci par un exemple. Je ferai auparavant remarquer que, si O désigne le pôle du plan de la conique fondamentale K par rapport à la surface S, les coordonnées d'un point M de cette surface étant x et y, les coordonnées du point M′ où le rayon OM perce S sont y et x. De là résulte que si une courbe peut être placée sur un cône ayant pour sommet le point O, son équation doit être symétrique en x et y; elle doit être par conséquent de la forme.

$$(U) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

et ne pas contenir les puissances impaires de ω.

En particulier, considérons une biquadratique gauche tracée sur S, c'est-à-dire la courbe du quatrième ordre qui résulte de l'intersection de S par une surface du second ordre n'ayant avec elle aucune génératrice commune. Comme on peut la placer sur quatre cônes différents, son équation pourra, de quatre façons différentes, se mettre sous la forme

$$(U) + k\omega^2 = 0,$$

k désignant une constante et U un polynôme du quatrième degré; si l'on fait

$$U = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e,$$

l'équation de la courbe sera par conséquent

$$(1)\quad y^2(ax^2 + 2bx + c) + 2y(bx^2 + 2cx + d) + (cx^2 + 2dx + e) + k(y - x)^2 = 0.$$

Pour trouver les génératrices de la surface qui touchent la courbe, il faut chercher pour quelles valeurs de y, x acquiert des racines égales. Ces valeurs seront données par l'équation $F(y) = 0$, où F désigne le discriminant de l'équation précédente pris par rapport à x; de même, pour une raison de symétrie, les directrices de la surface tangentes à la courbe seront déterminées par l'équation $F(x) = 0$.

Quelle est l'équation générale des biquadratiques tangentes à quatre directrices données et pouvant être placées sur un cône dont le sommet est en O?

Il est clair que, pour résoudre cette question, il faut déterminer de la façon la plus générale le polynôme U et la constante k de telle façon que le discriminant $F(x)$ soit un polynôme donné.

On voit aussi facilement que le problème est identique avec l'intégration de l'équation différentielle d'Euler, qui sert de point de départ à la théorie des fonctions elliptiques. En effet, l'équation (1), étant successivement ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et de y, peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0 \quad \text{et} \quad M'y^2 + 2N'y + P' = 0,$$

d'où l'on déduit par la différentiation

$$(Mx + N)dx + (M'y + N')dy = 0;$$

évidemment

$$Mx + N = \sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad M'y + N' = \sqrt{F(y)},$$

l'équation devient donc

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{F(y)}};$$

et l'on voit que, pour intégrer cette équation, il faut (ce qui est précisément la méthode de Cauchy) déterminer le polynôme U et la constante k de la façon que j'ai indiquée.

Comme le discriminant $F(x)$ est un covariant de la forme U, il suffit de calculer son premier terme ; en ne conservant dans U que les termes du degré le plus élevé en x, il se réduit à $x^2(ay^2 + 2by + c + k)$, d'où l'on voit que le terme de $F(x)$ du degré le plus élevé en x est $(ac - b^2)x^4 + kax^4$; par suite on a $F(x) = H + kU$, H désignant le hessien de U.

8. Supposons maintenant que nous remplacions U par $\alpha U + 6\beta H$, α et β désignant des quantités numériques indéterminées. Sans faire de nouveau calcul, on sait, par les importantes formules dues à M. Cayley, que H devient $(\alpha\beta S + 9\beta^2 T)U + (\alpha^2 - 3\beta^2 S)H$ (*), S et T désignant les invariants fondamentaux de la forme U.

Par suite $F(x)$ devient $MU + (\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta)H$, M désignant un nombre dont il est inutile d'écrire la valeur.

Pour que le discriminant $F(x)$ prenne donc (à un facteur numérique près) une valeur donnée U, il suffit de choisir la constante k de façon que l'équation $\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta = 0$ soit satisfaite. D'où la proposition suivante :

Soit U *un polynôme quelconque du quatrième degré ; en désignant par* H *son hessien et par* S *son invariant quadratique, l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{U(y)}}$$

est

$$6\beta(\alpha U + 6\beta H)_2 + (3\beta^2 S - \alpha^2)(x - y)^2 = 0,$$

le rapport $\alpha : \beta$ *étant la constante arbitraire introduite par l'intégration.*

La parenthèse affectée de l'indice 2 désigne ici l'émanant principal de la forme $\alpha U + 6\beta H$.

(*) Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 183.

II. — ÉQUATION D'UNE SECTION PLANE; SYSTÈME DE COORDONNÉES DANS L'ESPACE.

9. L'équation d'une conique tracée sur la surface est de la forme

$$(2) \qquad y(Ax + B) + (Bx + C) + K(y - x) = 0;$$

je considérerai les quantités A, B, C, K, qui entrent dans cette équation, comme les coordonnées du point de l'espace dont le plan polaire par rapport à la surface est le plan de la conique.

On pourrait aussi les regarder comme les coordonnées tangentielles de ce plan, et je le ferai quelquefois; mais généralement je les emploierai comme coordonnées ponctuelles.

Cela posé, étant données les équations de deux coniques

$$y(Ax+B)+(Bx+C)+K(y-x)=0 \quad \text{et} \quad y(A'x+B')+(B'x+C')+K'(y-x)=0,$$

on voit par un calcul facile que la condition nécessaire et suffisante, pour que le plan d'une de ces coniques contienne le pôle du plan de l'autre, est contenue dans la relation suivante $AC'+CA'-2BB'+2KK'=0$. Par suite, l'équation du plan polaire (par rapport à la surface) du point de l'espace dont les coordonnées sont A', B', C', K' est

$$AC' + CA' - 2BB' + 2KK' = 0;$$

et cette équation étant linéaire par rapport aux variables, il en résulte que le système de coordonnées employé est simplement un système particulier de coordonnées tétraédrales.

10. Dans tout ce qui suit, on voit que j'emploierai simultanément deux systèmes de coordonnées, dont l'un (en x et y) ne se rapporte qu'aux courbes tracées sur la surface, tandis que l'autre (en A, B, C, K) s'étend à tous les points de l'espace.

La même équation, suivant que l'on y considérera les x, y ou les A, B, C, K comme les coordonnées courantes, présentera un sens différent.

11. Cherchons les coordonnées rectilignes d'un point (x, y) de la surface. En désignant par X, Y les coordonnées courantes, la conique suivant laquelle la surface est coupée par le plan polaire du point (ici cette conique se réduit à deux droites) a pour équation

$$(X - x)(Y - y) = XY - yX - xY + xy = 0;$$

si l'on identifie cette équation avec l'équation (2), on en déduit les relations

$$\frac{A}{1} = \frac{B+K}{-x} = \frac{B-K}{-y} = \frac{C}{xy},$$

d'où encore

$$(3)\qquad \frac{A}{1}=\frac{B}{-\frac{x+y}{2}}=\frac{C}{xy}=\frac{K}{\frac{y-x}{2}}.$$

Ces formules serviront à trouver en coordonnées rectilignes l'équation d'une courbe donnée en *coordonnées sur la surface*, et je ferai, à ce sujet, cette remarque importante que si, dans un invariant de la forme (A, B, C) et d'un nombre quelconque d'autres formes, on remplace respectivement A, B, C, K par les valeurs données ci-dessus, le résultat sera un covariant du système composé de ces formes.

12. En particulier, supposons que l'équation d'une courbe M soit de même degré p par rapport à x et à y; on sait que (n° 5), dans ce cas, son équation est homogène par rapport aux quantités $x-y$, $x+y$ et xy; en remplaçant ces quantités par les expressions données, on obtiendra l'équation d'une surface de degré p, qui contiendra la courbe et dont cette dernière constituera l'intersection complète avec la surface du second degré fondamentale (*); et je ferai observer que cette équation sera un invarian du système de formes qui caractérisent la courbe.

Ainsi, l'équation d'une biquadratique étant

$$y^2(ax^2+2bx+c)+2y(bx^2+2cx+d)+cy^2+2dx+e+k(y-x)^2=0,$$

on pourra la mettre sous la forme

$$ax^2y^2+2bxy(x+y)+c[(y+x)^2+2xy]+2d(x+y)+e+k(y-x)^2=0$$

d'où l'on déduira, en employant le tableau (3), l'équation en coordonnées rectilignes d'une des surfaces du second degré qui contient la biquadratique

$$aC^2-4bBC+c(4B^2+2AC)-4dBA+eA^2+4kK^2=0,$$

ou simplement $E+2kK^2=0$, en désignant par E l'invariant fondamental des formes (A, B, C) et (a, b, c, d, e)

$$\tfrac{1}{2}aC^2-2bBC+c(2B^2+AC)-2dBA+\tfrac{1}{2}eA^2.$$

13. Si l'on élimine les variables x et y entre les équations (3), on obtient évidemment l'équation en coordonnées rectilignes de la surface du second degré S. Cette équation est $K^2+D=0$, en représentant, comme je le ferai

(*) Voir, à ce sujet, la note de M. Halphen, même tome, p. 19.

constamment dans la suite de ces recherches, par D l'invariant $AC - B^2$ de la forme (A, B, C).

III. — RECHERCHE DE LA FORME LA PLUS SIMPLE QUE L'ON PEUT DONNER A L'ÉQUATION D'UNE COURBE ; GROUPES DE COURBES.

14. On peut, en faisant varier la conique fondamentale, donner une infinité de formes à l'équation d'une courbe donnée M.

Les formules de transformation peuvent évidemment (sans nuire à leur généralité) être mises sous la forme

$$X = x \quad \text{et} \quad Y = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

α, β, γ et δ désignant des quantités numériques ; en sorte que l'on dispose de trois constantes arbitraires.

La chose la plus importante est d'obtenir une équation de la courbe donnée dans laquelle entre le moins de formes possible.

A ce point de vue, on voit facilement que l'équation des cubiques gauches peut, d'une infinité de façons, être mise sous une forme qui ne contienne qu'une forme binaire cubique; sa forme générale est en effet

$$(ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d)_1 + (a'x + b'y)(y - x) = 0,$$

et l'on peut, d'une infinité de manières, disposer des trois constantes arbitraires en sorte que a' et b' s'évanouissent.

L'équation de la biquadratique peut (comme on le sait déjà) être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un polynôme du quatrième degré.

L'équation générale de la quartique gauche, c'est-à-dire de la courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second ordre, est

$$(ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e)_1 + (a'x^2 + 2b'x + c')(y - x) = 0,$$

et un calcul simple fait voir que l'on peut, d'une seule façon, disposer des constantes arbitraires en sorte que a', b' et c' s'évanouissent; on peut donc mettre l'équation de la quartique (et cela d'une seule manière bien déterminée) sous une forme où n'apparaît qu'une seule forme biquadratique ; ce sera pour nous l'équation réduite de la courbe.

15. Étant donné un système quelconque de formes, je classerai dans un même groupe toutes les courbes dont l'équation ne dépend que de ces formes et de leurs divers covariants, et je dirai que toutes ces courbes constituent les formes du groupe.

Ainsi étant donnée une forme biquadratique U, les courbes qui appartiendront à son groupe seront toutes celles dont l'équation renferme seulement la forme U elle-même, son hessien H et son covariant du sixième degré J.

Si l'on s'en tient aux courbes dont le degré ne dépasse pas 4, on voit que ce groupe contient seulement des biquadratiques et des quartiques gauches.

Toutes les biquadratiques du groupe forment un système conjugué par rapport à un tétraèdre fixe qui caractérise le groupe ; c'est-à-dire que les sommets de ce tétraèdre sont les sommets des quatre cônes qui contiennent chacune de ces courbes. Les quartiques jouissent de propriétés analogues par rapport à ce tétraèdre.

C'est le groupe dont je viens de parler que je veux étudier d'abord dans la suite de ces recherches.

Sur une question de probabilités; par M. E. Lemoine.

(Séance du 8 janvier 1873)

Une tige se brise en trois morceaux; quelle est la probabilité pour que, avec ces trois morceaux, on puisse former un triangle?

Divisons la tige en $2m$ parties égales, et supposons que les trois morceaux contiennent respectivement x, y et z de ces parties; nous aurons

$$x+y+z=2m. \tag{1}$$

Pour que le triangle soit possible, il faut qu'on ait

$$x \leqslant y+z, \quad y \leqslant z+x, \quad z \leqslant x+y.$$

Éliminant z à l'aide de l'équation (1), ces inégalités deviennent

$$x \leqslant m, \quad y \leqslant m, \quad x+y \geqslant m.$$

Cherchons le nombre des cas favorables :

$x=0$ permet pour y la valeur m,
$x=1$ permet pour y les valeurs m, $m-1$,
. . . . . ,
$x=m$ permet pour y les valeurs m, $m-1$, $m-2$, ..., 0.

Il y a donc en tout $1+2+3+\ldots+(m+1)=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$ cas favorables.

Cherchons le nombre des cas possibles :

$x=0$ permet pour y les valeurs $2m$, $2m-1$, ..., 2, 1, 0,
$x=1$ permet pour y les valeurs $2m-1$, ..., 2, 1, 0,
. . . . . ,
$x=2m$ permet pour y la valeur 0.

Il y a donc en tout $1+2+3+\ldots+(2m+1)=\frac{(2m+1)(2m+2)}{2}$ cas possibles.

Le rapport du nombre des cas favorables au nombres des cas possibles est $\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+2)}=\frac{m+2}{2(2m+1)}$, qui, pour $m=\infty$, donne $\frac{1}{4}$.

Ainsi, *la probabilité cherchée est* $\frac{1}{4}$.

Sur la limite de transitivité des groupes non alternés; par M. Camille Jordan.

(Séance du 8 janvier 1873)

Vers l'année 1845, époque où les travaux de M. Bertrand ramenèrent l'attention de Cauchy sur la théorie des substitutions, ce grand géomètre entreprit sur ce sujet une longue suite de recherches, dont il a consigné les résultats dans les *Comptes rendus*.

Le principal théorème qu'il ait obtenu est le suivant :

Tout groupe dont l'ordre est divisible par un nombre premier p contient une substitution d'ordre p.

L'importance de cette proposition est manifeste, et l'on peut s'étonner qu'elle n'ait donné lieu, jusqu'à ce jour, pour ainsi dire à aucune application. Mais le théorème de Cauchy vient enfin d'être complété et généralisé, de la manière la plus heureuse, par un géomètre norwégien, M. Sylow. Il vient en effet de formuler le théorème suivant (*Mathematische Annalen*, t. V) :

Soit G *un groupe dont l'ordre* O *soit divisible par* p^a, *sans l'être par* p^{a+1}; *il contiendra des groupes d'ordre* p^a. *Ces groupes* H, H',... *seront tous semblables, et seront les transformés de l'un quelconque d'entre eux*, H, *par les substitutions de* G. *Enfin, leur nombre sera un entier de la forme* $np+1$. *Enfin l'on aura* $O=p^{a_\nu}(np+1)$, p^{a_ν} *étant l'ordre du groupe* I *formé par celles des substitutions de* G *qui sont permutables à* H.

Cette proposition mérite assurément par sa simplicité, sa netteté et sa généralité, d'être considérée comme fondamentale ; et nous ne doutons pas qu'elle ne donne lieu à d'importantes conséquences.

Nous en faisons, dans le mémoire ci-joint, une première application à la recherche de la limite de transitivité des groupes de substitutions.

On sait que M. Émile Mathieu a montré le premier qu'il existe une sorte de fossé entre le groupe alterné et les autres groupes de substitutions, ceux-ci ne pouvant être plus de $\frac{n}{2}$ fois transitifs (n étant le nombre des lettres), tandis que le groupe alterné l'est $n-1$ fois. Mais cette limite $\frac{n}{2}$, assignée à la transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné, est beaucoup trop élevée. Il est donc intéressant de la resserrer le plus possible; et si même on parvenait à démontrer que la véritable limite est une constante indépendante de n, on aurait atteint un résultat des plus importants.

Malheureusement cette question paraît d'une extrême difficulté; et nous avons dû recourir à des considérations très-compliquées pour arriver à réduire notablement la limite de M. Mathieu (*Traité des Substitutions*, nos 99 à 113).

Or, le théorème de M. Sylow permet d'établir avec une grande facilité les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit p un nombre premier impair. Un groupe de degré $p+k$ ne pourra être plus de k fois transitif, si $k>2$, à moins de contenir le groupe alterné.*

Théorème II. — *Un groupe de degré $2p+k$ (p étant premier et >3) ne pourra être plus de k fois transitif, à moins de contenir le groupe alterné : 1° Si $k>2$, lorsque p est de la forme $3n-1$; 2° si $k>3$, lorsque p est de la forme $3n+1$.*

Le théorème suivant, beaucoup plus difficile à démontrer, et d'une utilité moins fréquente, mérite néanmoins d'être signalé à cause de sa généralité :

Théorème III. — *Soient p un nombre premier impair, q un entier premier à p et contenu entre p^m et p^{m+1}. Un groupe de degré $p^n q+k$ ne pourra être plus de k fois transitif, si l'un des trois systèmes de conditions ci dessous n'est pas satisfait : 1° $k<5$; 2° $k\leqslant q$; 3° $m+n\geqslant k-\frac{\log k}{\log 2}-3$.*

On remarquera que ce système de conditions est entièrement indépendant de p.

Cette troisième condition peut être remplacée par la suivante, qui donnera parfois une limite plus resserrée, $k<r+3$, r étant le plus petit nombre premier supérieur à $m+n+1$.

On voit immédiatement comment ces théorèmes peuvent être appliqués. Cherchons, par exemple, combien de fois un groupe de degré 100 peut être

transitif. Le plus grand nombre premier inférieur à $100-2$ est 97. Utilisant le théorème I, pour $p=97$, on voit que le groupe de degré $p+3=100$ ne peut être plus de 3 fois transitif.

Le plus grand nombre premier p, tel que $2p<100-3$ est 47. Appliquant à ce nombre le théorème II, on verrait que le groupe de degré $100=2p+6$ ne peut être plus de 6 fois transitif. On voit que, dans ce cas particulier, c'est le théorème I qui mérite la préférence; mais il n'en sera pas toujours ainsi.

Les nouvelles limites de transitivité que nous venons d'indiquer sont très-préférables à celles que nous avons données dans notre *Traité*. Non-seulement elles sont plus resserrées(*) (ce qu'il serait peut-être difficile de démontrer, vu le peu de notions que l'on a sur la loi de succession des nombres premiers), mais en outre ces nouvelles limites, au lieu d'être, comme les précédentes, des fonctions croissant régulièrement avec n, dépendent de la nature arithmétique de ce nombre, plutôt que de sa grandeur absolue. Il est donc vraisemblable qu'elles sont plus conformes à la réalité.

I

1. Théorème I. — *Soit p un nombre premier impair. Un groupe de degré $p+k$ ne pourra être plus de k fois transitif, si $k>2$, à moins de contenir le groupe alterné.*

Soit $\mathcal{G}$ un groupe de degré $p+k$ et plus de k fois transitif. Le groupe G formé par celles de ses substitutions qui ne déplacent que p lettres données $a_1,\ldots, a_p$ sera transitif, et contiendra une substitution circulaire d'ordre p. Les puissances de cette substitution S formeront un groupe H d'ordre p. Soient I le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à H, $\Omega=p\nu$ son ordre : I étant contenu dans le groupe K, d'ordre $p(p-1)$, formé par toutes les substitutions entre les lettres $a_1,\ldots, a_p$ qui sont permutables à H, ν divisera $p-1$; enfin l'ordre O de G sera égal à $\Omega(np+1)$, d'après le théorème de M. Sylow ; on aura donc

$$\Omega\equiv 0 \bmod p^2.$$

Soient maintenant x, y deux autres lettres quelconques parmi celles qui figurent dans le groupe $\mathcal{G}$; G_2 le groupe au moins trois fois transitif formé par celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui ne déplacent que les lettres $a_1,\ldots, a_p, x, y$; $O_2=O(p+1)(p+2)$ son ordre ; I_2 le groupe formé par

(*) D'après ces anciennes formules, un groupe de degré 100 pourrait être 16 fois transitif.

celles des substitutions de G_2 qui sont permutables à H; Ω_2 son ordre : on aura, toujours d'après le théorème de M. Sylow,

$$(1) \qquad \Omega_2 \equiv O_2 \equiv 2O \equiv 2\Omega \bmod p^2.$$

Or Ω_2 est un multiple de Ω, car I_2 contient I. Soit donc $\Omega_2 = r\Omega$; Ω étant divisible par p, mais non par p^2, la relation (1) donnera

$$(2) \qquad r \equiv 2 \bmod p.$$

D'ailleurs; les substitutions de Ω_2, étant permutables à H, permuteront exclusivement entre elles les deux lettres x, y que H ne déplace pas. Elles seront donc toutes de la forme A_ρ ou de la forme $A_\rho(xy)$, $A_1, \ldots, A_\rho, \ldots$ désignant les diverses substitutions du groupe K, et (xy) une transposition opérée sur les lettres x, y. Si toutes les substitutions de I_2 étaient de la forme A_ρ, elles appartiendraient à I ; on aurait donc $\Omega_2 = \Omega$, d'où $r = 1$, résultat incompatible avec la relation (2). Donc I_2 contiendra au moins une substitution de la forme $A_\rho(xy)$, et l'on aura $r = 2$.

Soit maintenant $\mathfrak{J}$ le groupe formé par celles des substitutions de $\mathfrak{G}$ qui sont permutables à H, tout en permutant exclusivement entre elles les lettres $a_1, \ldots, a_p$; ce groupe contiendra évidemment I_2; donc il contiendra la substitution $A_\rho(xy)$. On voit de même qu'il contiendra une substitution $A_{\rho'}(xz)$, z étant une nouvelle lettre quelconque, autre que $a_1, \ldots, a_p, x, y$.

Cela posé, K résulte de la combinaison du groupe H, formé des puissances de S, avec les puissances d'une certaine substitution circulaire B, d'ordre $p-1$, qui lui est permutable. Donc A_ρ sera de la forme $S^\alpha B^\beta$, et de même $A_{\rho'}$ sera de la forme $S^{\alpha'} B^{\beta'}$. Le groupe $\mathfrak{J}$, contenant évidemment la substitution S, et contenant d'autre part $A_\rho(xy) = S^\alpha B^\beta(xy)$, contiendra $B^\beta(xy)$; de même il contiendra $B^{\beta'}(xz)$; il contiendra donc la substitution

$$[B^\beta(xy)]^{-1}[B^{\beta'}(xz)]^{-1} B^\beta(xy) B^{\beta'}(xz) = (xy)^{-1}(xz)^{-1}(xy)(xz) = (xzy),$$

laquelle est circulaire ternaire. Le groupe $\mathfrak{G}$ contiendra *a fortiori* cette substitution, et comme il est plus de trois fois transitif, il contiendra le groupe alterné.

2. Théorème II. — *Soit p un nombre premier impair > 3. Un groupe $\mathfrak{G}$ de degré $2p + k$ ne pourra être plus de k fois transitif, à moins de contenir le groupe alterné : 1° Si $k > 2$, lorsque p est de la forme $3n - 1$; 2° si $k > 3$, lorsque $p = 3n + 1$.*

En effet, le groupe G, formé de celles des substitutions de $\mathfrak{G}$ qui ne déplacent que $2p$ lettres données $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$, sera transitif, par hypothèse. Donc son ordre sera divisible par p; s'il l'était par p^2, le groupe Γ d'ordre $2p$ fois moindre, formé par celles des substitutions de G qui ne dé-

placent que les $2p-1$ lettres $a_2, \ldots, b_p$, aurait son ordre divisible par p; il contiendrait donc une substitution d'ordre p qui ne pourrait être que circulaire; et G, contenant cette substitution, serait $p+1$ fois transitif (Note C de notre *Traité des Substitutions*); donc G contiendrait le groupe alterné et, par suite, contiendrait une substitution circulaire de trois lettres; le groupe $\mathcal{G}$ contenant *a fortiori* cette substitution, étant d'ailleurs plus de trois fois transitif, contiendrait le groupe alterné.

Supposons au contraire que l'ordre de G ne soit divisible qu'une fois par p; il contiendra une substitution d'ordre p à deux cycles

$$S = (a_1 \ldots a_p)(b_1 \ldots b_p),$$

ses puissances formeront un groupe H d'ordre p. Soient, comme tout à l'heure, I le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à H; K le groupe formé par toutes les substitutions possibles permutables à H, et ne déplaçant que les lettres $a_1, \ldots, b_p$. Soient de plus x, y deux lettres nouvelles quelconques, prises parmi celles de $\mathcal{G}$. On voit, comme au théorème I, que le groupe $\mathfrak{J}$, formé par celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui sont permutables à H, tout en permutant exclusivement entre elles les lettres $a_1, \ldots b_p$, contient une substitution de la forme $A_\rho(xy)$, A_ρ étant une substitution de K. On voit de même que $\mathfrak{J}$ contiendra des substitutions $A_{\rho'}(xz), \ldots$, $z, \ldots$ étant les autres lettres qui figurent dans $\mathcal{G}$.

En combinant ensemble ces substitutions, on obtiendra des substitutions contenues dans $\mathfrak{J}$, et permutant de toutes les manières possibles les lettres $x, y, z, u, \ldots$.

Les substitutions de $\mathfrak{J}$ étant donc représentées par $A_1\Theta_1$, $A_2\Theta_2, \ldots$, où $A_1, A_2, \ldots$, sont des substitutions de K, et $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ des substitutions qui permutent ensemble les lettres $x, y, z, \ldots$, ces dernières substitutions formeront un groupe Θ contenant toutes les substitutions possibles entre $x, y, z, \ldots$.

3. Cela posé, les substitutions de K, étant permutables à H, remplaceront les lettres d'un même cycle de S par celles d'un même cycle; elles seront donc de la forme D ou de la forme CD, C étant la substitution qui remplace respectivement $a_1, \ldots, a_p$ par $b_1, \ldots, b_p$ et réciproquement, et D une nouvelle substitution permutable à H, mais ne déplaçant plus les deux cycles de S. La substitution D transformera d'ailleurs S en une de ses puissances que l'on pourra désigner par S^{g^3}, g étant une racine primitive de p. Or il existe une substitution B d'ordre $p-1$, à deux cycles, qui transforme S en S^g; on aura donc $D = B^3D'$, D' étant une nouvelle substitution, de même forme que D, mais échangeable à S. Il est clair que D' devra être de la forme $S_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}$, S_1 et S_2 désignant les deux substitutions circulaires partielles $(a_1 \ldots a_p)$ et $(b_1 \ldots b_p)$.

Donc les substitutions de K seront de la forme $C^\gamma B^\beta S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2}$, les indices γ, β, α_1, α_2 variant respectivement de 0 à 1, de 0 à $p-2$, et les deux derniers de 0 à $p-1$. L'ordre de K sera par suite égal à $2(p-1)p^2$.

4. Soit maintenant $p=3n-1$. L'ordre de K sera premier à 3, et, par suite, l'ordre de chacune de ses substitutions sera premier à 3. Mais on a vu que $\mathfrak{J}$ contient une substitution T de la forme $A(xyz)$, A étant une substitution de K. Soit ω l'ordre de A; $\mathfrak{J}$ contiendra la substitution $T^\omega=(xyz)^\omega$, laquelle ne se réduit pas à l'unité, ω étant premier à 3.

Donc $\mathfrak{J}$, et *a fortiori* $\mathfrak{G}$, contient une substitution circulaire ternaire; et comme $\mathfrak{G}$ est plus de trois fois transitif, il contiendra le groupe alterné.

5. Soit au contraire $p=3n+1$. Le groupe $\mathfrak{J}'$, formé par celles des substitutions $A'_1\Theta'_1$, $A'_2\Theta'_2$,... du groupe $\mathfrak{J}$ dont les premiers facteurs sont de la forme D, contiendra évidemment la moitié ou la totalité des substitutions de $\mathfrak{J}$. *A fortiori*, le groupe Θ' formé par les substitutions partielles Θ'_1, Θ'_2,... contiendra au moins la moitié des $1.2...k$ substitutions de Θ. Donc il contiendra le groupe alterné, et en particulier les deux substitutions circulaires ternaires xyz, xyu. Donc $\mathfrak{J}'$ contiendra deux substitutions telles que

$$A'_1(xyz),\quad A'_2(xyu),$$

et par suite la substitution

$$[A'_1(xyz)]^{-1}[A'_2(xyu)]^{-1}[A'_1(xyz)][A'_2(xyu)]=\mathfrak{A}(xuy),$$

en posant

$$\mathfrak{A}=A'^{-1}_1A'^{-1}_2A'_1A'_2.$$

Or A'_1, A'_2 sont de la forme $B^\beta S_1^{\alpha_1} S_1^{\alpha_2}$; S_1 et S_2 étant échangeables entre elles, et B les transformant respectivement en S_1^g, S_2^g, $\mathfrak{A}$ se réduira à la forme $S_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}$ et sera d'ordre p. Cela posé, $\mathfrak{J}'$ contiendra la substitution circulaire ternaire

$$[\mathfrak{A}(xuy)]^p=(xuy)^p,$$

et $\mathfrak{G}$, qui la contient *a fortiori* et qui est plus de trois fois transitif, contiendra le groupe alterné.

II

6. Nous allons déduire des mêmes principes un nouveau théorème, plus étendu que les précédents. Mais auparavant il sera bon de reprendre la démonstration d'une proposition auxiliaire que nous avons établie ailleurs dans ce qu'elle a de plus essentiel (*Traité des substitutions*, 394), mais par des voies indirectes et sous un énoncé qui ne serait pas commode dans la question actuelle. Les développements dans lesquels nous allons entrer, et

les définitions qui leur servent de base, nous semblent d'ailleurs de nature à simplifier notablement la démonstration de plusieurs propositions importantes.

7. *Définitions.* — Deux substitutions s et t, permutables à un groupe H, sont dites *congrues suivant le groupe* H, si l'on a une égalité de la forme

$$s = th,$$

h étant une substitution de H.

On peut exprimer cette relation par une formule analogue à celle des congruences ordinaires

$$s \equiv t \bmod \mathrm{H}.$$

On peut multiplier deux congruences membre à membre. Soit en effet

$$s \equiv t \bmod \mathrm{H} = th,$$
$$s' \equiv t' \bmod \mathrm{H} = t'h',$$

on aura

$$ss' = tht'h' = tt't'^{-1}ht'h',$$

et comme $t'^{-1}ht'$ appartient à H, par hypothèse,

$$ss' \equiv tt' \bmod \mathrm{H}.$$

On dira qu'une suite de substitutions $s_1, s_2, \ldots$ (toutes permutables à un même groupe H) forme un *groupe suivant le module* H, si l'on a pour toutes valeurs de α et de β une relation de la forme

$$s_\alpha s_\beta \equiv s_\gamma \bmod \mathrm{H}.$$

L'*ordre* de ce groupe sera le nombre des substitutions diverses, incongrues suivant le module H, qu'il contient.

Soit G le groupe dérivé des substitutions $s_1, s_2, \ldots$, lorsqu'on les combine entre elles à la manière ordinaire. Nous désignerons par $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$ le groupe formé par ces mêmes substitutions suivant le module H. Il est aisé de voir que l'ordre de G est égal au produit de l'ordre O de $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$ par l'ordre Ω du groupe I formé des substitutions communes à G et à H.

En effet, soit s une quelconque des O substitutions de $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$, et soient $1, t, t', \ldots$ les substitutions de I; G contiendra Ω substitutions $s, st, st', \ldots$ congrues à $s \bmod \mathrm{H}$, mais il n'en contiendra pas davantage; car s'il en contenait une su, il contiendrait u, laquelle étant congrue à $1 \bmod \mathrm{H}$ serait

aussi contenue dans H, quoique n'appartenant pas à 1, ce qui est contraire à la définition de ce groupe.

On peut transporter aux substitutions et aux groupes pris suivant le module H toutes les définitions principales relatives aux groupes ordinaires. Ainsi deux substitutions S, T seront *échangeables* si l'on a $ST \equiv TS$. Une substitution T sera *permutable à un groupe* $(S_1, S_2, \ldots)$ si l'on a pour toute valeur de α une relation de la forme

$$T^{-1} S_\alpha T \equiv S_\beta.$$

Cette relation s'exprimera en langage ordinaire en disant que S_β est la *transformée* de S_α par T (suivant le module H).

Un groupe $\frac{G}{H}$ sera *isomorphe* à un autre groupe $\frac{G'}{H'}$, si l'on peut faire correspondre aux diverses substitutions de $\frac{G}{H}$ (incongrues suivant le module H) les diverses substitutions de $\frac{G'}{H'}$ (incongrues suivant le module H'), de telle sorte qu'à chaque substitution de $\frac{G'}{H'}$ corresponde une seule substitution de $\frac{G}{H}$, et qu'au produit de deux substitutions corresponde le produit de leurs correspondantes. L'isomorphisme sera dit mériédrique si, à une même substitution de $\frac{G}{H}$, correspondent plusieurs substitutions de $\frac{G'}{H'}$.

8. Soit maintenant G un groupe d'ordre O, ayant pour facteurs de composition $\nu_1, \nu_2, \ldots$; il existera par définition une suite de groupes $G, G_1, G_2, \ldots$, ayant respectivement pour ordres $O, \frac{O}{\nu_1}, \frac{O}{\nu_1\nu_2}, \ldots$, tels que chacun d'eux soit contenu dans le précédent et permutable à ses substitutions, mais ne soit contenu dans aucun groupe plus général jouissant de cette double propriété.

Soient $1, g_1, g'_1, \ldots$ les $\frac{O}{\nu_1}$ substitutions de G_1; on sait que les O substitutions de G seront données par le tableau

$$\begin{array}{cccc} 1 & g_1 & g'_1 & \cdots \\ g & gg_1 & gg'_1 & \cdots \\ g' & g'g_1 & g'g'_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array},$$

$g, g', \ldots$ étant des substitutions en nombre ν_1, toutes incongrues suivant le module G_1. Donc le groupe $\frac{G}{G_1}$ contiendra ν_1 substitutions distinctes $1, g,$

g', ... mod G_1, correspondant respectivement à celles de G qui forment les diverses lignes du tableau ci-dessus. De même $\frac{G_1}{G_2}$ aura pour ordre ν_2, etc.

Nous dirons que *les groupes* $\frac{G}{G_1}$, $\frac{G_1}{G_2}$, ... *sont les groupes composants de* G, *respectivement afférents aux facteurs de composition* ν_1, ν_2, ...; et nous dirons encore que *les groupes* G_1, G_2, ... *se déduisent de* G *par la suppression successive des groupes composants* $\frac{G}{G_1}$, $\frac{G_1}{G_2}$, ...

9. Ces définitions posées, soit G un groupe non transitif, groupons ses lettres en classes en réunissant ensemble celles que G permute entre elles. Les substitutions de G seront de la forme :

$$s_1 = a_1 b_1 c_1 \ldots, \; s_2 = a_2 b_2 c_2 \ldots, \; \ldots,$$

$a_1, a_2, \ldots$ étant des substitutions opérées entre les lettres de la première classe, b_1, b_2, ... des substitutions opérées entre celles de la seconde classe, etc. Soient respectivement A, B, ... les groupes formés par les substitutions partielles a_1, a_2, ...; b_1, b_2, ...; .... Soient enfin ν_1 le premier facteur de composition de A; $\frac{A}{A_1}$ le groupe afférent à ce facteur; G_1 le groupe formé par celles des substitutions de G

$$a_\lambda b_\lambda c_\lambda, \ldots,$$

dont les premiers facteurs a_λ, ... appartiennent à A_1; B_1 le groupe formé par les seconds facteurs b_λ, ...; etc. Le groupe B_1 sera évidemment permutable aux substitutions de B, et, s'il n'en contient qu'une partie, les deux groupes $\frac{A}{A_1}$ et $\frac{B}{B_1}$ seront isomorphes sans mériédrie.

En effet, aux diverses substitutions $s_1, s_2, \ldots$ de G correspondent des substitutions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ dans chacun des groupes $\frac{A}{A_1}$ et $\frac{B}{B_1}$, ce qui établit une correspondance entre les substitutions de ces deux groupes. Il reste à prouver que cette correspondance est telle que chaque substitution de $\frac{A}{A_1}$ correspond à une seule substitution de $\frac{B}{B_1}$, et réciproquement.

Supposons d'abord que l'on pût avoir $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ mod A_1, sans avoir en même temps $\beta_1 \equiv \beta_2$ mod B_1. La substitution $t = s_1 s_2^{-1} = a_\rho b_\rho \ldots$ aurait pour correspondante dans $\frac{A}{A_1}$ la substitution $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \equiv 1$; donc a_ρ appar-

tiendrait à A_1 ; mais t aurait pour correspondante dans $\frac{B}{B_1}$ la substitution $\beta_1\beta_2^{-1}$, laquelle diffère de 1 mod B_1 ; donc b_ρ n'appartiendrait pas à B_1, ce qui est contraire à la définition de ce groupe.

Supposons au contraire que l'on eût $\beta_1 \equiv \beta_2 \bmod B_1$ et $\alpha_1 \gtrless \alpha_2 \bmod A_1$; t aurait pour correspondante l'unité dans $\frac{B}{B_1}$, et une substitution α_ρ autre que l'unité dans $\frac{A}{A_1}$. Cela posé, G contient le groupe dérivé des transformées $s_1^{-1}ts_1, s_2^{-1}ts_2, \ldots$ de t par les substitutions de G. A ces transformées et à leurs dérivées correspondraient dans $\frac{B}{B_1}$ la substitution 1, et dans $\frac{A}{A_1}$ les substitutions $\alpha_1^{-1}\alpha_\rho\alpha_1, \alpha_2^{-1}\alpha_\rho\alpha_2, \ldots$ et leurs dérivées. Ces dernières substitutions reproduisent tout le groupe $\frac{A}{A_1}$. Supposons en effet qu'elles formassent un groupe moindre $\frac{\mathcal{A}}{A_1}$ d'ordre $\nu' < \nu_1$. Ce groupe serait évidemment permutable aux substitutions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Le groupe $\mathcal{A}$, formé par celles des substitutions de A dont les correspondantes appartiennent à $\frac{\mathcal{A}}{A_1}$ serait évidemment contenu dans A et permutable à ses substitutions. D'ailleurs, il serait plus général que A_1, groupe formé par les substitutions de A qui ont pour correspondante l'unité. Ce résultat est contraire aux propriétés caractéristiques par lesquelles nous avons défini A_1.

Soit donc α_σ une substitution quelconque de $\frac{A}{A_1}$; G contiendra une substitution u_σ ayant respectivement pour correspondantes dans $\frac{A}{A_1}$ et dans $\frac{B}{B_1}$ les substitutions α_σ et 1. Mais, d'autre part, B_1 ne contenant par hypothèse qu'une portion des substitutions de B, G contiendra une substitution v ayant pour correspondante dans $\frac{B}{B_1}$ une substitution β_σ différente de l'unité ; soit α_σ sa correspondante dans $\frac{A}{A_1}$; G contiendra $vu_\sigma^{-1} = a_\tau b_\tau \ldots$, à laquelle correspondent, dans $\frac{A}{A_1}$ l'unité, dans $\frac{B}{B_1}$, β_σ, qui diffère de l'unité ; résultat absurde, car il faudrait pour cela que a_τ appartînt à A_1, sans que b_τ appartînt à B_1, ce qui est contraire à la définition de ce dernier groupe.

Le groupe B_1 étant encore supposé $< B$, le groupe $\frac{B}{B_1}$, qui est isomorphe sans mériédrie, comme nous venons de le voir, au groupe simple

$\frac{A}{A_1}$, sera lui-même simple, et $\frac{B}{B_1}$ sera le premier groupe composant de B. En effet, s'il en était autrement, il existerait un groupe B′ plus général que B_1, contenu dans B et permutable à ses substitutions. Les substitutions correspondantes du groupe $\frac{B}{B_1}$ formeraient évidemment un groupe $\frac{B'}{B_1}$, contenu dans $\frac{B}{B_1}$ et permutable à ses substitutions; cela est impossible, $\frac{B}{B_1}$ étant simple.

10. On déduit de ce qui précède la conséquence suivante, qui est fort utile :

Si l'un des groupes composants du groupe B, *par exemple, n'est isomorphe à aucun des groupes composants des autres groupes* A, C, ..., G *contiendra un groupe ne déplaçant que les lettres de* B, *et dans la composition duquel figurera encore le groupe en question.*

En effet, nous avons vu que G contient le groupe G_1, et que les groupes partiels A_1, B_1, C_1, ... relatifs à ce groupe ne pourront différer des groupes analogues A, B, C,... que par la suppression de groupes composants isomorphes à $\frac{A}{A_1}$. Soit $\frac{A_1}{A_2}$ le second groupe composant de A; on verra de même que G_1 contient un groupe G_2, tel que les groupes partiels A_2, B_2, C_2, ... qui y sont relatifs ne diffèrent de A_1, B_1, C_1, ... que par la perte de groupes composants isomorphes à $\frac{A_1}{A_2}$. Continuant ainsi, on arrivera à un groupe G′ dont les substitutions ne déplacent plus les lettres de la classe A. Soient B′, C′, ... les groupes partiels formés par les déplacements que H fait subir aux lettres des autres classes; ces groupes conserveront encore tous ceux des groupes composants de B, C, ... qui ne sont pas isomorphes à ceux de A.

De G′ on déduira de même un groupe G″, dont les substitutions ne déplacent plus les lettres de C, et ainsi de suite. On arrivera enfin à un groupe $\mathfrak{B}$ dont les substitutions ne déplacent plus que les lettres de B; et ce groupe retiendra toujours ceux des groupes composants de B qui ne sont pas isomorphes à ceux de A, C, ...

III

11. Théorème III. — *Soit p un nombre premier impair, q un nombre quelconque premier à p et compris entre p^n et p^{n+1}. Un groupe $\mathcal{G}$ de degré $p^m q + k$ ne pourra être plus de k fois transitif sans contenir le groupe alterné, à moins qu'une des trois conditions ci-dessous ne soit satisfaite :* 1° $k < 5$;

2° $k \leqslant q$; 3° *le groupe linéaire de degré* p^{m+n} *contient un groupe admettant parmi ses groupes composants un groupe isomorphe au groupe alterné de degré* k.

12. *Démonstration.* — Supposons qu'aucune des conditions ci-dessus ne soit satisfaite. Considérons $p^m q$ lettres quelconques a, b, ... parmi celles de $\mathcal{G}$; celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui ne déplacent que ces lettres forment un groupe transitif G. Soient O l'ordre de G; p^l la plus haute puissance de p par laquelle O est divisible. D'après le théorème de M. Sylow, G contiendra un groupe H d'ordre p^l.

Groupons les lettres de G en classes, en réunissant entre elles celles de ces lettres que les substitutions de H permutent entre elles.

Le nombre des lettres de chaque classe sera une puissance de p au moins égale à p^m. Considérons en effet une lettre quelconque a, et soit r le nombre des lettres de sa classe : l'ordre de H sera évidemment égal à rs, s étant l'ordre du groupe H′ formé par celles des substitutions de H qui ne déplacent pas a. Or l'ordre de H est une puissance de p; donc r et s sont des puissances de p. D'ailleurs, H′ est contenu dans le groupe G′, formé par celles des substitutions de G qui ne déplacent pas a; O′, ordre de G′, est égal à $\frac{O}{p^m q}$, et par suite ne contient p qu'à la puissance $l-m$; s, ordre de H′, divisant O′, sera au plus égal à p^{l-m}; donc $r = \frac{p^l}{s}$ sera au moins égal à p^m.

Le nombre total des lettres de G étant $p^m q$, et chaque classe en contenant au moins p^m, *le nombre des classes sera au plus égal à* q.

13. Cela posé, soit $\mathfrak{J}$ le groupe formé par celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui sont permutables à H et qui permutent exclusivement entre elles les lettres a, b, ... d'une part, et les k lettres restantes x, y, ... d'autre part. Ces substitutions seront de la forme

$$A_1\Theta_1,\ A_2\Theta_2,\ \ldots,$$

A_1, A_2, ... étant des substitutions entre les lettres a, b, ..., lesquelles devront être permutables à H, et Θ_1, Θ_2, ... des substitutions entre les lettres $x, y, \ldots$. On verra, comme au théorème précédent, que le groupe Θ, formé des substitutions Θ_1, Θ_2, ..., contiendra toutes les substitutions possibles entre les lettres x, y, ...

Ce point établi, chacune des substitutions A_1, A_2, ... étant permutable à H, devra remplacer les lettres d'une même classe, lesquelles sont permutées entre elles par les substitutions de H, par d'autres lettres jouissant de cette même propriété, lesquelles appartiendront par suite à une même classe. Donc chacune des substitutions A_1, A_2, ... sera de la forme BC, B

étant une certaine substitution exécutée sur les classes, et C une nouvelle substitution qui ne déplace pas les classes.

Le nombre des classes ne pouvant dépasser q, le nombre des déplacements qu'on peut leur faire subir ne saurait dépasser $1.2...q$, nombre inférieur à $1.2...k$, nombre des substitutions distinctes du groupe Θ. Donc, parmi les substitutions de $\mathfrak{J}$, on en trouvera au moins deux, $A_1\Theta$ et $A_2\Theta_2$ qui permuteront les classes de la même manière, sans permuter x, y, ... de la même manière; et $\mathfrak{J}$ *contiendra la substitution* $(A_1\Theta_1)^{-1}A_2\Theta_2$, *laquelle ne déplace plus les classes, mais déplace encore les lettres* x, y, ...

Celles des substitutions de $\mathfrak{J}$ qui ne déplacent pas les classes forment évidemment un groupe $\mathfrak{J}'$, contenant H et permutable à toutes les substitutions de $\mathfrak{J}$. Soient

$$C_1\Theta'_1,\ C_2\Theta'_2,\ \ldots,$$

les substitutions de $\mathfrak{J}'$. Les substitutions de Θ seront évidemment permutables au groupe Θ', formé des substitutions partielles Θ'_1, Θ'_2, ... Mais k étant > 4, les seuls groupes contenus dans le groupe Θ et permutables à ses substitutions sont, comme on sait, le groupe Θ lui-même et le groupe alterné. Donc Θ' *contient dans tous les cas le groupe alterné.*

On peut d'ailleurs admettre que Θ' *ne contient aucune substitution autre que celle du groupe alterné.* Car, s'il en était autrement, nous n'aurions qu'à appliquer les raisonnements qui vont suivre non plus aux groupes Θ' et $\mathfrak{J}'$, mais au groupe alterné Θ'' et au groupe $\mathfrak{J}''$, formé par celles des substitutions de $\mathfrak{J}'$ dont les seconds facteurs appartiennent à Θ''.

14. Ce point établi, celles des lettres a, b, ... qui appartiennent à la première classe, à la seconde, etc., sont respectivement en nombre $p^{\alpha'}, p^{\alpha''}, \ldots,$ $\alpha', \alpha'', \ldots$ *étant au plus égaux à* $m+n$; car le nombre total des lettres a, b, ... est $p^m q$, nombre $< p^{m+n+1}$ par hypothèse.

15. Considérons maintenant les substitutions $C_1, C_2, \ldots$ qui forment les premiers facteurs des substitutions de $\mathfrak{J}'$. On aura

$$C_1 = C'_1C''_1\ldots,\quad C_2 = C'_2C''_2\ldots,\quad \ldots,$$

$C'_1, C'_2, \ldots$ étant des substitutions opérées entre les lettres de la première classe, $C''_1, C''_2, \ldots$ des substitutions opérées entre les lettres de la seconde classe, etc.

En particulier, les substitutions de H seront respectivement

$$H'_1H''_1\ldots,\quad H'_2H''_2\ldots,\quad \ldots,$$

$H'_1, H'_2, \ldots$ étant des substitutions opérées entre les lettres de la première classe, $H''_1, H''_2, \ldots$ des substitutions opérées entre les lettres de la seconde classe, etc. Le groupe H' de degré $p^{\alpha'}$, formé par les substitutions partielles

$H'_1, H'_2, \ldots$, sera transitif par hypothèse. D'ailleurs l'ordre de H, lequel est p^l, est évidemment le produit de l'ordre de H′ par l'ordre du nouveau groupe formé par celles des substitutions de H qui ne déplacent plus les lettres de la première classe. Donc *l'ordre de* H′, divisant p^l, *sera une puissance de* p, *telle que* $p^{l'}$.

16. Soit maintenant C′ le groupe formé par les substitutions $C'_1, C'_2, \ldots$. Nous allons montrer que *tous les groupes composants de* C′ *appartiennent à des groupes contenus dans le groupe linéaire de degré* p^{m+n}. Et d'abord, nous remarquerons que les substitutions $C_1, C_2, \ldots$ étant permutables à H, les substitutions partielles $C'_1, C'_2, \ldots$ le seront *a fortiori* à celles de H′.

Or il résulte d'un théorème de M. Sylow que le groupe H′, dont l'ordre est une puissance de p, contient au moins une substitution d'ordre p échangeable à toutes les autres (n° 3 du mémoire cité). Mais il pourra en contenir plusieurs. Réunissons-les toutes ensemble; nous obtiendrons un groupe F′, formé de substitutions d'ordre p, échangeables entre elles. *Toutes les substitutions de* C′ *seront permutables à* F′; en effet, soit Φ′ le groupe transformé de F′ par l'une quelconque C'_1 de ces substitutions; les substitutions de Φ′ seront d'ordre p et échangeables à toutes celles du groupe transformé de H′ par C'_1, lequel groupe n'est autre que H′; donc, par définition, les substitutions de Φ′ appartiendront à F′.

Le groupe F′ pourra être transitif ou non. Supposons pour plus de généralité qu'il ne le soit pas; et groupons les $p^{\alpha'}$ lettres de la classe considérée en systèmes, en réunissant ensemble celles que F′ permute entre elles. Chaque substitution de C′, étant permutable à F′, remplacera les lettres de chaque système par celles d'un même système.

En particulier, H′ étant transitif, ses substitutions déplaceront *a fortiori* les systèmes d'une manière transitive; donc *chacun d'eux contiendra un même nombre de lettres*, $p^{\beta'}$, et ils seront en nombre $p^{\alpha'-\beta'} = p^{\gamma'}$.

17. Considérons maintenant les déplacements d'ensemble que les substitutions de C′ font éprouver aux systèmes. Ils forment un groupe transitif D, isomorphe à C′, et les groupes composants de C′ seront ceux de D, joints à ceux du groupe E formé par celles des substitutions de C′ qui ne déplacent pas les systèmes (*Traité des substitutions*, note B.). Les substitutions de E sont d'ailleurs de la forme

$$E'_1 E''_1 \ldots, \quad E'_2 E''_2 \ldots, \quad \ldots,$$

$E'_1, E'_2, \ldots$ étant des substitutions opérées entre les lettres du premier système, $E''_1, E''_2, \ldots$ des substitutions entre les lettres du second système, etc.

Les substitutions partielles $E'_1, E'_2, \ldots$ forment évidemment un groupe E′ isomorphe à E; et E aura pour groupes composants ceux de E′, joints à ceux du groupe Γ formé par celles des substitutions de E qui ne déplacent pas les lettres du premier système.

Soit de même Γ'' le groupe formé par les déplacements que les substitutions de Γ font subir aux lettres du second système, lequel groupe sera évidemment contenu dans $E'' = (E''_1, E''_2, \ldots)$. Le groupe Γ aura pour groupes composants ceux de Γ'' et ceux du groupe Δ formé par celles de ses substitutions qui ne déplacent pas les lettres des deux premiers systèmes. Soit de même Γ''' le groupe formé par les déplacements que les substitutions de Δ font éprouver aux lettres du troisième système, lequel groupe est contenu dans $E''' = (E'''_1, E'''_2, \ldots)$; Δ aura pour groupes composants ceux de Γ''', plus ceux du groupe formé par celles des substitutions de Δ qui ne déplacent pas les lettres des trois premiers systèmes. Continuant ainsi, on voit que C' *a pour groupes composants ceux des groupes* D, E', Γ'', Γ''',...; Γ'', Γ''',... *étant des groupes respectivement contenus dans* E'', E''', ...

18. Or il est aisé de voir que *les groupes* E', E'', E''',... *et a fortiori les groupes* E', Γ'', Γ''', ... *sont respectivement contenus dans les groupes linéaires de degré* $p^{\beta'}$ (et *a fortiori* dans le groupe linéaire du degré p^{m+n}; car le groupe linéaire de degré $p^{\beta'}$ est formé par celles des substitutions du groupe linéaire de degré p^{m+n} qui laissent $m+n-\beta'$ indices immobiles).

En effet, les substitutions de E

$$E'_1 E''_1 \ldots, \quad E'_2 E''_2 \ldots, \quad \ldots,$$

sont permutables à F, formé des substitutions

$$F_1 = F'_1 F''_1 \ldots, \quad F_2 = F'_2 F''_2 \ldots;$$

a fortiori les substitutions partielles E'_1, E'_2,... opérées entre les lettres du premier système, seront permutables au groupe partiel

$$F' = (F'_1, F'_2, \ldots),$$

formé des déplacements que les substitutions de F font subir aux lettres du premier système.

Mais les substitutions de F sont d'ordre p et échangeables entre elles; *a fortiori* celles de F' seront d'ordre p et échangeables entre elles; de plus, elles permutent transitivement les $p^{\beta'}$ lettres du premier système. On pourra donc (*Traité des substitutions*, n° 408) caractériser ces lettres par β' indices choisis de telle sorte que les substitutions de F' soient de la forme

$$| \, x, y, \ldots \quad x+\delta, y+\delta', \ldots \, |$$

et les substitutions de E', qui leur sont permutables, de la forme linéaire

$$| \, x, y \quad ax+by+\ldots+\delta, a'x+b'y+\ldots+\delta', \ldots \, |$$

La même démonstration s'applique aux groupes F'' et E'', etc.

Il est donc établi que *les derniers groupes composants de* C' *sont ceux de*

certains groupes E′, Γ″, Γ‴,... *contenus dans le groupe linéaire de degré* $m+n$. Il reste à démontrer que les premiers groupes composants, à savoir ceux de D, jouissent de la même propriété.

19. Soit Λ le groupe formé par les déplacements que les substitutions de H′ font subir aux $p^{\gamma'}$ systèmes. L'ordre de H′, $p^{\gamma'}$, est évidemment égal à l'ordre de Λ, multiplié par l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de H′ qui ne déplacent pas les systèmes; donc Λ a pour ordre une puissance de p, et pour degré $p^{\gamma'}$, γ' étant $< m+n$. D'ailleurs les substitutions de C′ étant permutables à H′, celles de D le sont *a fortiori* à Λ. Cela posé, on raisonnera sur D et Λ comme nous l'avons fait sur C′ et H′, pour prouver que les derniers groupes composants de D sont ceux de groupes contenus dans le groupe linéaire de degré p^{m+n}. Continuant ainsi, on arrivera à prouver que tous les groupes composants de C′ jouissent de cette propriété.

Il résulte de là que si, comme nous le supposons, la troisième condition du théorème III n'est pas satisfaite, aucun des groupes composants de C′ n sera isomorphe au groupe alterné Θ′; de même pour les facteurs de composition des groupes $C''=(C''_1, C''_2,\ldots)$, ...

20. Cela posé, k étant >4, le groupe Θ′ sera simple, et par suite n'aura d'autre groupe composant que lui-même; donc d'après la proposition démontrée au n° 10, celles des substitutions du groupe $\mathfrak{J}'$ qui ne déplacent pas les lettres a, b,... permuteront encore d'une manière alternée les lettres x, y,.... Donc $\mathfrak{J}'$, et *a fortiori* $\mathfrak{G}$, contiendra une substitution circulaire ternaire; et comme il est au moins 5 fois transitif, il contiendra le groupe alterné.

Notre théorème est ainsi démontré.

IV

21. Nous nous trouvons ainsi conduits à examiner la question suivante :

Problème. — *Déterminer la valeur que k ne doit pas dépasser pour qu'on puisse déterminer un groupe* Γ, *contenu dans le groupe linéaire de degré* p^n, *et dont l'un des groupes composants soit isomorphe au groupe alterné* Θ *de degré* k.

(Dans cet énoncé, nous avons pour abréger désigné par n la quantité précédemment réprésentée par $m+n$ et par Θ le groupe que nous appelions Θ′.)

Tout d'abord, le groupe Γ étant contenu dans le groupe linéaire, ses facteurs de composition divisent ceux du groupe linéaire; mais ceux-ci sont premiers, à l'exception d'un seul, égal à $\frac{(p^n-1)(p^n-p)\ldots(p^n-p^{n-1})}{\delta(p-1)}$, δ étant le plus grand commun diviseur de n et de $p-1$ (*Traité des sub-*

stitutions, 135). Or Γ, par hypothèse, a l'un de ses facteurs de composition égal à $\frac{1.2\ldots k}{2}$. On aura donc la condition

$$\frac{(p^n-1)\ldots(p^n-p^{n-1})}{\delta(p-1)} \equiv 0 \mod \frac{1.2\ldots k}{2},$$

laquelle pourra servir à limiter la valeur de k.

Mais on peut assigner à cette quantité une limite plus étroite, et *indépendante de p*. Nous allons en effet établir les deux inégalités suivantes

$$(3) \qquad n \geqslant q-1,$$

q étant le plus grand nombre premier autre que p et inférieur à $k-1$

$$(4) \qquad n \geqslant k - \frac{\log k}{\log 2} - 3.$$

Pour les démontrer, nous pourrons admettre qu'il existe un groupe contenu dans un groupe linéaire à n indices, et dont un groupe composant soit isomorphe à Θ, mais qu'il n'existe aucun semblable groupe contenu dans un groupe linéaire à moins de n indices. En suivant les conséquences de cette hypothèse, nous arriverons aux inégalités (3) et (4).

Nous embrasserons d'ailleurs dans notre démonstration pour plus de généralité, et pour éviter toute difficulté, le cas où les n indices $x, y, \ldots$ au lieu d'être des entiers réels, seraient des entiers imaginaires de la forme $a+bi+\ldots+ri^{\nu-1}$, i étant une racine d'une congruence irréductible de dégré ν suivant le module p.

22. En premier lieu, faisons correspondre à chaque substitution

$$\gamma = |\ x, y, \ldots \quad ax+by+\ldots+\alpha,\ a'x+b'y+\ldots+\alpha', \ldots\ |$$

du groupe Γ, la substitution linéaire

$$g = |\ x, y, \ldots \quad ax+by+\ldots,\ a'x+b'y+\ldots, \ldots\ |$$

qui n'a plus de termes constants. Il est clair : 1° que les substitutions g, $g_1, \ldots$, correspondantes aux diverses substitutions $\gamma, \gamma_1, \ldots$ du groupe Γ, formeront un groupe G isomorphe à Γ ; 2° que Γ aura pour premiers groupes composants ceux de G, ses autres groupes composants étant ceux du groupe Γ', formé par celles des substitutions de Γ dont la correspondante se réduit à l'unité. Ces dernières substitutions se réduisant à la forme

$$|\ x, y, \ldots \quad x+\alpha,\ y+\alpha', \ldots\ |$$

les facteurs de composition de Γ' seront tous premiers ; et ne pourront être

égaux à $\frac{1.2...k}{2}$. C'est donc parmi les groupes composants de G que devra se trouver le groupe isomorphe à Θ.

23. Soient $\frac{G}{G_1}, \frac{G_1}{G_2},...$ les groupes composants de G, et admettons que Θ soit isomorphe au groupe $\frac{G_\rho}{G_{\rho+1}}$. Le groupe G_ρ étant contenu dans G, a ses substitutions linéaires sans termes constants; et $\frac{G_\rho}{G_{\rho+1}}$, isomorphe à Θ, est le premier de ses groupes composants. On raisonnerait au besoin sur G_ρ, au lieu de raisonner sur G; on peut donc admettre sans nuire à la généralité de la question, que Θ est isomorphe à $\frac{G}{G_1}$, premier groupe composant de G.

Ici se présenteront deux cas, suivant que G_1 contient ou non des substitutions qui ne multiplient pas tous les indices par un même facteur constant.

24. *Premier cas.* — Nous allons montrer qu'on peut admettre, sans diminuer la généralité de la question, que *toutes les substitutions de* G *sont permutables à un groupe partiel* H, *ayant pour ordre une puissance d'un nombre premier, et contenant des substitutions qui ne multiplient pas tous les indices par un même facteur.*

Soit en effet $O = \pi^\alpha \pi'^{\alpha'}...$ l'ordre de G_1, π, π',... étant des nombres premiers; G_1 contiendra, d'après M. Sylow, un groupe H d'ordre π^α, un groupe H' d'ordre $\pi'^{\alpha'}$, etc., et dérivera de la combinaison de ces groupes. Si chaque substitution de chacun de ces groupes multipliait tous les indices par un même facteur constant, chacune des $\pi^\alpha \pi'^{\alpha'}...$ substitutions qui résultent de leur combinaison et qui reproduisent toutes celles de G_1, multiplierait tous les indices par un même facteur, contrairement à notre supposition.

On peut donc admettre que les substitutions de H, par exemple, ne multiplient pas toutes tous les indices par un même facteur. Si celles de H', etc. jouissaient au contraire de cette propriété, elles seraient échangeables à celles de H. Donc le groupe G_1, dérivé de la combinaison des groupes H, H',... aura toutes ses substitutions permutables à H; donc H sera le seul groupe d'ordre π^α que G_1 contienne. Cela posé, les substitutions de G, permutables à G_1, le seront évidemment à H, ce qui démontre notre proposition.

Supposons au contraire que deux au moins H, H' des groupes de la suite H, H',... contiennent des substitutions qui ne multiplient pas tous les indices par un même facteur; l'un au moins π des deux nombres π, π' sera > 2. Cela posé, soient I le groupe formé par celles des substitutions de G_1, qui sont permutables à H, M son ordre; on aura d'après M. Sylow

$$O \equiv M \bmod \pi M \equiv M \bmod \pi^{\alpha+1}.$$

Soient $1, g_1, g'_1, \ldots$ les substitutions de G_1; $1, s, s', \ldots$ les substitutions de $\frac{G}{G_1}$; celles de G seront données par le tableau suivant :

$$(5) \qquad \begin{array}{cccc} 1 & g_1 & g'_1, & \ldots \\ s & sg_1 & sg'_1, & \ldots \\ s' & s'g_1 & s'g'_1, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

dont les diverses lignes sont formées de substitutions congrues mod G_1 aux diverses substitutions de $\frac{G}{G_1}$.

Nous allons montrer que chaque ligne de ce tableau contient au moins une substitution permutable à H.

Soient en effet $a, b, c, d, \ldots$ les lettres de Θ, dont le nombre est par hypothèse supérieur à 4. Soient a, b, c, d quatre quelconques d'entre elles; Θ contiendra la substitution linéaire $S = (ab)(cd)$, laquelle aura pour homologue dans $\frac{G}{G_1}$ une substitution s, satisfaisant à la relation $s^2 \equiv 1 \mod G_1$.

Les substitutions des deux premières lignes du tableau (5) formeront un groupe $\mathcal{G}$ d'ordre 20 contenant G_1. Le groupe $\mathfrak{J}$, formé par celles des substitutions de $\mathcal{G}$ qui sont permutables à H, contiendra I et aura pour ordre $\mathfrak{M} = rM$, r étant un entier. D'ailleurs $r = 1$ ou 2. En effet, si aucune des substitutions de la suite $s, sg_1, \ldots$ n'est permutable à H, $\mathfrak{J}$ se réduira à I et son ordre $\mathfrak{M}$ sera égal à M. Au contraire, si l'une σ des substitutions de cette suite est permutable à H, cette suite contiendra M substitutions permutables à H, lesquelles s'obtiendront en multipliant successivement σ par les M substitutions $1, i_1, i'_1, \ldots$ du groupe I. On aura donc $\mathfrak{M} = 2M$.

Ce dernier cas sera nécessairement réalisé. En effet, le théorème de M. Sylow, appliqué à $\mathcal{G}$, donnera

$$20 \equiv rM \mod \pi^{\alpha+1},$$

et comme $0 \equiv M$, on aura

$$(2 - r)0 \equiv 0 \mod \pi^{\alpha+1}, \quad \text{d'où} \quad 2 - r \equiv 0 \mod \pi = 0.$$

Donc G contient des substitutions permutables à H et congrues mod G_1 à la substitution s.

Soient maintenant S, T, ... les diverses substitutions semblables à S que contient le groupe Θ. Ces substitutions, combinées entre elles, reproduisent tout ce groupe. Leurs correspondantes $s, t, \ldots$ dans le groupe isomorphe $\frac{G}{G_1}$ reproduiront tout ce groupe; et les substitutions $\sigma, \tau, \ldots$ congrues à celles-là et contenues dans G, combinées entre elles de la même manière,

donneront des substitutions permutables à H et congrues à toutes les substitutions du groupe $\frac{G}{G_1}$.

Le groupe I', formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à H, contiendra donc des substitutions congrues à chacune de celles de $\frac{G}{G_1}$; il aura donc pour groupes composants ce groupe $\frac{G}{G_1}$, suivi des groupes composants du groupe I formé par celles de ses substitutions qui appartiennent à G_1.

Donc, dans le cas que nous traitons, *s'il existe un groupe* G *contenu dans le groupe linéaire et tel que l'un de ses groupes composants soit isomorphe à* Θ, *on pourra déterminer un autre groupe* I' *jouissant de cette même propriété, et dont les substitutions soient en outre permutables à un groupe partiel* H *dont l'ordre soit une puissance de nombre premier et dont toutes les substitutions ne multiplient pas tous les indices par un même facteur constant.*

On peut donc sans nuire à la généralité de la question, imposer cette nouvelle condition au groupe G; car s'il n'y satisfaisait pas, on appliquerait tous les raisonnements qui vont suivre au groupe I' lequel y satisfait.

25. Ce point établi, parmi les substitutions de H, autres que l'unité, il en est qui sont échangeables à toutes les autres (mémoire cité de M. Sylow, n° 3). Soit F le groupe formé par leur réunion. Il sera permutable aux substitutions de G. En effet, chacune d'elles transforme F en un groupe formé de substitutions contenues dans H, et échangeables à toutes celles de H; ce groupe transformé se confondra donc avec F.

26. Cela posé, soit d'abord $\pi \gtrless p$. Les substitutions de F, étant échangeables entre elles, et d'ordre premier à p, pourront être ramenées simultanément par un changement d'indices convenable à la forme canonique monôme

$$| \; x, y, \ldots \quad ax, by, \ldots \; |$$

Si l'on réunit ensemble dans une même classe tous les indices qui sont multipliés par un même facteur dans chacune des substitutions de F, le nombre m de ces classes ne pourra surpasser le nombre n des indices.

27. Supposons d'abord qu'il y ait plusieurs classes.

Les substitutions de G, étant permutables à F, remplaceront les indices de chaque classe par des fonctions linéaires des indices d'une même classe. Si elles déplacent les classes, elles seront de la forme $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots; P_1, P_2, \ldots$ étant des déplacements opérés entre les classes, en remplaçant chaque indice par un indice correspondant, et $Q_1, Q_2, \ldots$ des substitutions qui remplacent chaque indice par une fonction linéaire des indices de la même classe.

Celles des substitutions de G qui ne déplacent pas les classes forment un groupe K auquel toutes les substitutions de G sont évidemment permutables, et dont l'ordre est égal à $\frac{O}{\Omega}$, O étant l'ordre de G, et Ω l'ordre du groupe formé par les substitutions $P_1, P_2, \ldots$, lequel divisera évidemment $1.2\ldots m$, m étant le nombre des classes. Soit d'ailleurs G_1 le groupe le plus général parmi ceux qui contiennent K, sont contenus dans G et permutables aux substitutions de G. Son ordre sera un multiple de $\frac{O}{\Omega}$, tel que $q\frac{O}{\Omega}$; et G aura pour premier facteur de composition $\frac{\Omega}{q}$. Mais ce premier facteur de composition doit être $\frac{1.2\ldots k}{2}$; on aura donc

$$\frac{1.2\ldots k}{2} = \frac{\Omega}{q} \leqslant 1.2\ldots m, \quad \text{d'où} \quad k \leqslant m \leqslant n,$$

inégalité qui entraîne *a fortiori* les relations (3) et (4).

28. Supposons en second lieu que les substitutions de G ne déplacent pas les classes. Elles seront de la forme $a_1b_1\ldots$, $a_2b_2\ldots$, ..., $a_1, a_2, \ldots$ étant des substitutions linéaires (*) opérées sur les indices de la première classe; $b_1, b_2, \ldots$ des substitutions sur les indices de la seconde classe, etc.

Considérons les groupes

$$A = (a_1, a_2, \ldots), \quad B = (b_1, b_2, \ldots), \quad \ldots.$$

L'un au moins d'entre eux, A par exemple, contiendra des substitutions autres que l'unité; et il est clair que G aura pour groupes composants les groupes composants de A, suivis des groupes composants du groupe partiel G′ formé par celles des substitutions de G qui se réduisent à la forme $b\ldots$.

Le premier groupe composant de A étant en même temps le premier groupe composant de G devra être isomorphe à Θ. Résultat inadmissible, par hypothèse (21); A ayant ses substitutions linéaires avec un nombre n' d'indices inférieur à n.

29. Admettons maintenant qu'il n'y ait qu'une classe. Les substitutions de F se réduiront à la forme

$$| \; x, y, \ldots \quad ax, ay, \ldots \; |$$

On pourra déterminer dans le groupe H *un groupe partiel* Φ *plus général*

(*) Si la réduction des substitutions de F à la forme canonique a nécessité l'introduction d'imaginaires, les substitutions $Q'_1, Q'_2, \ldots$ pourront avoir leurs coefficients imaginaires.

que F, *et dont les substitutions soient échangeables* mod F *à toutes les substitutions de* H.

Soit en effet π^β l'ordre de F, celui de H étant π^α comme ci-dessus. Une fonction z invariable par les substitutions de F et variable par toute autre substitution prendra par les substitutions de H un nombre de valeurs distinctes $z, z', \ldots$ égal à $\pi^{\alpha-\beta}$. Les déplacements opérés sur ces fonctions par les substitutions de H formeront un groupe $\mathfrak{H}$ de substitutions S, S', ... isomorphe à H et d'ordre $\pi^{\alpha-\beta}$. On pourra (Sylow, n° 3) y déterminer un faisceau Ψ de substitutions échangeables entre elles. Soit π^γ son ordre. A chacune des substitutions S, S', ... correspondent π^β substitutions dans H; et l'ensemble des substitutions correspondantes à celles de Ψ donnera un groupe Φ d'ordre $\pi^{\beta+\gamma}$, dont les substitutions seront échangeables mod F à toutes celles de H. Soient en effet s une d'entre elles, t une substitution de H, S et T leurs corrélatives dans $\mathfrak{H}$. La substitution $s^{-1}t^{-1}st$, ayant pour corrélative $S^{-1}T^{-1}ST$, qui se réduit à l'unité, appartiendra à F.

30. L'une quelconque u des substitutions de Φ, étant contenue dans H dont l'ordre est une puissance de π, aura pour ordre une puissance de π; et l'exposant de la première de ses puissances successives qui appartient à F étant évidemment un diviseur de l'ordre de u, sera lui-même une puissance de π, telle que π^δ; et Φ contiendra la substitution $u^{\pi^\delta-1}$, dont la puissance π appartient à F.

Celles des substitutions de Φ *dont les* $\pi^{\text{ièmes}}$ *puissances appartiennent ainsi à* F, *forment un groupe* $\mathfrak{F}$. En effet, soient u, v deux d'entre elles; comme elles sont échangeables mod F, on aura

$$(uv)^\pi \equiv u^\pi v^\pi \bmod \mathrm{F},$$

et u^π, v^π appartenant à F, il en sera de même de $(uv)^\pi$.

Les substitutions de G *sont permutables à* $\mathfrak{F}$; car elles le sont à F et à H; donc elles transformeront chaque substitution de $\mathfrak{F}$ en une substitution contenue dans H, permutable à F, et dont la $\pi^{\text{ième}}$ puissance appartiendra à F; donc cette transformée appartiendra à $\mathfrak{F}$.

Deux substitutions quelconques de $\mathfrak{F}$, u et v, satisfont par hypothèse à la relation

$$v^{-1}uv = \tau u,$$

τ étant une substitution de F. On en déduit

$$v^{-2}uv^2 = v^{-1}\tau uv = \tau v^{-1}uv = \tau^2 u,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$v^{-\pi}uv^\pi = \tau^\pi u.$$

Mais v^π, appartenant à F, est échangeable à u; on aura donc

$$\tau^\pi = 1$$

et par suite τ *sera une puissance de la substitution*

$$| x, y, \ldots \quad \theta x, \theta y, \ldots |$$

où θ est une racine primitive de la congruence

$$\theta^{\tau} \equiv 1 \mod p.$$

Nous désignerons cette dernière substitution par θ.

31. Celles des substitutions de $\mathfrak{F}$ qui sont échangeables à toutes les autres forment d'ailleurs un groupe partiel F_1, auquel les substitutions de G sont évidemment permutables. Si F_1 est plus général que F, il contiendra des substitutions qui ne sont pas échangeables à toutes celles de H, et qui par suite ne multiplieront pas tous les indices par un même facteur. Le raisonnement des n°s 26 à 28 étant appliqué aux groupes G et F_1 mènera à une conséquence inadmissible.

32. Supposons donc que F_1 se réduise à F. Soit A_1 une substitution quelconque de $\mathfrak{F}$, autre que celles de F; $\mathfrak{F}$ contiendra une substitution u non échangeable à A_1; supposons qu'elle transforme A_1 en $\theta^{\xi}A_1$; et soit

$$\eta \equiv \frac{1}{\xi} \mod \pi.$$

La substitution $u^{\eta} = B_1$ transformera A_1 en θA_1; et $\mathfrak{F}$ résultera de la combinaison de A_1 et de B_1 avec des substitutions échangeables à A_1 et à B_1. Soit en effet v une substitution de $\mathfrak{F}$ qui transforme A_1 et B_1 en $\theta^{\lambda}A_1$, $\theta^{\mu}B_1$; on aura

$$v = A_1^{-\mu}B_1^{\lambda}w,$$

w étant une nouvelle substitution de $\mathfrak{F}$, échangeable à A_1 et à B_1.

Cela posé, celles des substitutions de $\mathfrak{F}$ qui sont échangeables à A_1 et B_1 forment évidemment un groupe $\mathfrak{F}_1$. Si $\mathfrak{F}_1$ contient une substitution A_2 qui n'appartienne pas à F, il contiendra une substitution B_2 qui transforme A_2 en θA_2, et résultera de la combinaison de A_2 et de B_2 avec un groupe $\mathfrak{F}_2$ de substitutions échangeables à A_1, B_1, A_2, B_2. Poursuivant ainsi, on voit que $\mathfrak{F}$ *résulte de la combinaison de* F *avec une double suite de substitutions*

$$A_1, A_2, \ldots, A_\sigma,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_\sigma,$$

toutes échangeables entre elles, sauf deux substitutions correspondantes A_r *et* B_r, *lesquelles satisferont à la relation*

$$B_r^{-1}A_rB_r = \theta A_r.$$

33. Les substitutions de la première ligne $A_1, \ldots, A_\sigma$ sont échangeables entre elles ; d'ailleurs leur puissance $\pi^{\text{ième}}$ appartient à F ; donc leur ordre est premier à p ; et ces substitutions pourront être ramenées simultanément par un choix d'indices convenable à la forme canonique monôme. Réunissons dans une même classe, que nous désignerons par $C_{0\ldots0}$, ceux des nouveaux indices $y, z, \ldots$ que $A_1, \ldots, A_\sigma$ multiplient respectivement par une même série de facteurs constants $a_1, \ldots, a_\sigma$; *on aura quels que soient les entiers* $\xi_1, \ldots \xi_\sigma$ mod π *une classe* $C_{\xi_1 \ldots \xi_\sigma}$ *contenant un nombre égal d'indices* $y', z', \ldots$ *que* $A_1, \ldots, A_\sigma$ *multiplieront par* $a_1\theta^{\xi_1}, \ldots, a_\sigma\theta^{\xi_\sigma}$.

En effet, soit μ le nombre des indices de la classe $y, z, \ldots$. La substitution $B_1^{\xi_1} \ldots B_\sigma^{\xi_\sigma}$ transformant $A_1, \ldots, A_\sigma$ en $\theta^{\xi_1}A_1, \ldots, \theta^{\xi_\sigma}A_\sigma$ remplacera ces indices par μ fonctions distinctes $\varphi, \psi, \ldots$ des indices tels que $A_1, \ldots, A_\sigma$ les multiplient respectivement par $a_1\theta^{\xi_1}, \ldots, a_\sigma\theta^{\xi_\sigma}$. Mais A_1 multipliant chaque indice par un facteur constant ne pourra multiplier une fonction de ces indices par $a_1\theta^{\xi_1}$ que si cette fonction contient seulement les indices que A_1 multiplie par ce facteur. On peut faire un raisonnement analogue pour A_2, etc. Les indices $y', z', \ldots$ qui figurent dans les fonctions $\varphi, \psi, \ldots$ appartiendront donc à la classe $C_{\xi_1 \ldots \xi_\sigma}$. Leur nombre μ' devra être au moins égal au nombre μ de ces fonctions. Par un raisonnement inverse, on verrait que μ est au moins égal à μ' ; donc $\mu = \mu'$.

En faisant varier successivement $\xi_1, \ldots, \xi_\sigma$ de 0 à $\pi - 1$, on voit qu'à la classe $C_{0\ldots0}$ sont associées π^σ classes également nombreuses. Donc *le nombre total n des indices est un multiple de* π^σ.

34. Cela posé, considérons une substitution quelconque S du groupe G. Elle transforme les substitutions

$$\begin{matrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_\sigma \\ B_1, & B_2, & \ldots, & B_\sigma \end{matrix}$$

en substitutions du groupe $\mathfrak{F}$, lesquelles seront de la forme

$$\begin{matrix} f_1 A_1^{a'_1} B_1^{b'_1} A_2^{a'_2} B_2^{b'_2} \ldots, & f_2 A_1^{a''_1} B_1^{b''_1} A_2^{a''_2} B_2^{b''_2} \ldots, & \ldots, \\ g_1 A_1^{c'_1} B_1^{d'_1} A_2^{c'_2} B_2^{d'_2} \ldots, & g_2 A_1^{c''_1} B_1^{d''_1} A_2^{c''_2} B_2^{d''_2} \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

$f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ étant des substitutions de F, et si l'on fait correspondre à la substitution S la substitution linéaire suivante de degré $\pi^{2\sigma}$

$$\begin{vmatrix} x_1, y_1 & a'_1x_1 + c'_1y_1 + a''_1x_2 + c''_1y_2 + \ldots, b'_1x_1 + d'_1y_1 + b''_1x_2 + d''_1y_2 + \ldots \\ x_2, y_2 & a'_2x_1 + c'_2y_1 + a''_2x_2 + c''_2y_2 + \ldots, b'_2x_1 + d'_2y_1 + b''_2x_2 + d''_2y_2 + \ldots \end{vmatrix} \text{mod } \pi$$

on verra sans difficulté que les substitutions correspondantes aux diverses substitutions de G forment un groupe Γ, isomorphe à G.

35. Supposons d'abord que Γ contienne des substitutions autres que l'unité. Son premier groupe composant sera isomorphe au premier groupe

composant de G, et par suite isomorphe à Θ. Ce résultat est inadmissible par hypothèse (21) ; car Γ est de degré $\pi^{2\sigma}$ et l'exposant 2σ est moindre que n, multiple de π^{σ}.

36. Si Γ se réduisait à la seule substitution 1, toutes les substitutions de G transformeraient A_1 en substitutions de la forme $f_1 A_1^{\alpha'_1}$. Elles seraient donc permutables au groupe F' dérivé de F et de A_1. Ce groupe contient une substitution A_1 qui ne multiplie pas tous les indices par un facteur constant. Donc les indices pourront s'y répartir en plusieurs classes. Et l'on verra comme aux n°s 27 et 28 que *si* G *contient des substitutions qui déplacent les classes, on aura* $k < n$; dans le cas contraire, on aurait un groupe contenu dans le groupe linéaire de degré $p^{n'}$, n' étant $< n$ et dont le premier groupe composant serait isomorphe à Θ ; résultat inadmissible, par hypothèse (21).

37. Soit en dernier lieu $\pi = p$. On pourra (*Traité des Substitutions*, 179-182) choisir les indices indépendants de telle sorte qu'un certain nombre d'entre eux, x, x',... restent inaltérés par toutes les substitutions de F; les autres indices étant désignés par y,... les substitutions de G seront de la forme suivante (*Ibid.*, 188).

$$\left| \begin{array}{ll} x, x', \ldots & f(x, x', \ldots), f'(x, x', \ldots), \ldots \\ y, \ldots, & ay + \ldots + \varphi(x, x', \ldots), \ldots \end{array} \right|$$

et il aura pour groupes composants :

1° Les composants du groupe isomorphe J formé par les altérations

$$| \, x, x', \ldots \quad f(x, x', \ldots), f'(x, x', \ldots), \ldots \, |$$

que les substitutions de G font subir aux indices x, x', ...

2° Ceux du groupe formé par celles des substitutions de G qui n'altèrent pas les indices x, x',... et se réduisent en conséquence à la forme

$$\left| \begin{array}{ll} x, x', \ldots & x, x', \ldots \\ y, \ldots & ay + \ldots + \varphi(x, x', \ldots), \ldots \end{array} \right|$$

Ceux-ci seront à leur tour de deux sortes :

1° Les composants du groupe isomorphe K formé des substitutions

$$| \, y, \ldots \quad ay + \ldots, \ldots \, |$$

2° Ceux du groupe L formé par celles des substitutions de G qui se réduisent à la forme

$$\left| \begin{array}{ll} x, x', \ldots & x, x', \ldots \\ y, y', \ldots & y + \varphi(x, x', \ldots), y' + \varphi'(x, x', \ldots), \ldots \end{array} \right|$$

Or L ayant ses substitutions d'ordre p et échangeables entre elles, ses composants ont tous pour ordre p et ne peuvent être isomorphes à Θ.

D'autre part, J et K sont contenus dans des groupes linéaires à moins de n indices ; ils ne peuvent donc être isomorphes à Θ.

38. *Second cas.* — Supposons que G_1 ne contienne aucune substitution autre que celles qui multiplient tous les indices par un même facteur constant.

Soit q un nombre premier impair quelconque, différent de p et inférieur à $k-1$. Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les k lettres que déplace Θ. Ce groupe contient une substitution circulaire S entre les q premières de ces lettres, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Elle aura pour homologue dans $\frac{G}{G_1}$ une substitution linéaire s, dont la puissance q appartiendra à G_1. Cette substitution pourra se mettre sous la forme canonique

$$| \; x, y, \ldots \quad ax, by, \ldots \; |$$

avec la condition $a^q \equiv b^q \equiv \ldots \bmod p$. On aura donc $b = a\theta^\rho, \ldots,$ θ étant une racine primitive de la congruence $\theta^q \equiv 1 \bmod p$. On pourra grouper les indices en classes, en réunissant ensemble, comme appartenant à la classe ρ, ceux que s multiplie par $a\theta^\rho$.

Cela posé, soit g une racine primitive de q. Il existe une substitution circulaire entre les $q-1$ lettres $\beta, \ldots, \gamma$ qui transforme S en S^g. En y joignant une transposition opérée sur deux des lettres suivantes, on obtiendra une substitution T qui transforme S en S^g et qui sera contenue dans Θ. Son homologue t dans G transformera s en $s^g m$, m étant une substitution de G_1, laquelle multipliera par suite tous les indices par un même facteur m.

Les deux substitutions s et $s^g m$, étant transformables l'une dans l'autre, auront la même forme canonique. Or l'une multiplie les diverses classes d'indices par $a, a\theta, a\theta^2, \ldots$; l'autre les multiplie par ma^g, $ma^g\theta^g$, $ma^g\theta^{2g}, \ldots$, nombres qui doivent être égaux à l'ordre près aux précédents. On aura donc une égalité de la forme

$$ma^g = a\theta^\rho,$$

d'où l'on déduira

$$ma^g a\theta^{\sigma g} = a\theta^{\rho+\sigma g}.$$

Donc autant il y a d'indices dans la classe σ, autant il y en a que $t^{-1}st$ multiplie par $a\theta^{\rho+\sigma g}$. Mais $t^{-1}st$ est semblable à s; donc le nombre des indices multipliés par un même facteur est le même dans les deux substitutions. Donc la classe σ contient autant d'indices que la classe $\rho + \sigma g = \sigma_1$, celle-ci autant que la classe $\rho + \sigma_1 g$, etc.

Posons $\sigma \equiv \frac{\rho}{1-g} + 1 \bmod q$; on aura $\sigma_1 \equiv \frac{\rho}{1-g} + g$, $\sigma_2 \equiv \frac{\rho}{1-g} + g^2$, ...; et comme la suite $1, g, g^2, \ldots$ contient tous les nombres mod q, sauf zéro, on voit qu'il y aura $q-1$ classes contenant un même nombre μ

d'indices. Ce nombre ne peut être nul, car si tous les indices étaient contenus dans la même classe, s appartiendrait à G_1, ce qui est absurde. Quant à la dernière classe, elle contiendra $\mu' = n - (q-1)\mu$ indices.

On voit déjà que *n est au moins égal à $q-1$*, ce qui démontre l'inégalité (3).

39. On remarquera en outre que *le nombre maximum d'indices que chaque classe puisse posséder est égal à $n-q+1$, ou à 1*. En effet, il doit y avoir plusieurs classes, donc $\mu > 0$, et si $q=2$, $\mu' > 0$, et la plus grande valeur que μ' puisse posséder sera, pour $\mu = 1$, $\mu' = n-q+1$. Quant à $\mu = \frac{n-\mu'}{q-1}$, sa plus grande valeur sera, si $q=2$, $n-1 = n-q+1$, cas répondant à $\mu' = 1$; si $q > 2$, on pourra poser $\mu' = 0$; et si $n < 2(q-1)$, le maximum sera égal à l'unité ; si $n \geqslant 2(q-1)$, il ne pourra dépasser $n-q+1$.

40. Posons maintenant $k-q=k'$ et supposons cette quantité supérieure à 4. Dans le groupe Θ sera contenu un groupe Θ', ne déplaçant pas les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ et alterné par rapport aux k' lettres restantes. Ce groupe sera simple, et d'ordre $\frac{1.2\ldots k'}{2}$. De plus ses substitutions U, U', ... seront échangeables à S. Leurs homologues dans G formeront un groupe G', dont les substitutions $u, u', \ldots$ transformeront s en substitutions congrues à s mod G_1, lesquelles seront, par suite, de la forme $sm, sm', \ldots, m, m', \ldots$ désignant les substitutions qui multiplient tous les indices par un même facteur respectivement égal à $m, m', \ldots$.

Pour que la substitution sm, qui multiplie les diverses classes d'indices respectivement par $ma, ma\theta, \ldots$ soit semblable à la substitution s, qui les multiplie par $a, a\theta, \ldots$, il faudra que m soit une puissance de θ, telle que θ^ρ. D'ailleurs, pour que u transforme s en sm, il faudra qu'elle remplace les indices de la classe σ, que s multiplie par $a\theta^\sigma$, par des fonctions que s multiplie par $ma\theta^\sigma = a\theta^{\sigma+\rho}$, c'est-à-dire par des fonctions des indices de la classe $\sigma+\rho$.

On aura de même $m' = \theta^{\rho'}$, et u' remplacera les indices d'une classe quelconque σ par des fonctions de ceux de la classe $\sigma+\rho'$; etc.

41. Nous allons montrer que l'on aura $\rho \equiv \rho' \equiv \ldots \equiv 0 \bmod q$, de telle sorte qu'*aucune des substitutions de G' ne déplace les classes d'indices*. Supposons en effet $\rho \gtrless 0 \bmod q$, et soit δ' un entier satisfaisant à la congruence $\delta'\rho \equiv \rho' \bmod q$. On aura $u' = u^{\delta'} t'$, t' étant une substitution qui ne déplace plus les classes ; de même $u'' = u^{\delta''} t''$, etc. Donc G' résultera de la combinaison de u avec des substitutions qui ne déplacent plus les classes. Celles-ci forment un groupe H', évidemment permutable à toutes les substitutions de G' ; il contiendra d'ailleurs la $q^{\text{ième}}$ partie des substitutions de G' ; car $u, u^2, \ldots, u^{q-1}$ déplacent les classes, mais u^q ne les déplace plus. Cela

posé, le groupe Θ' étant isomorphe à G', le groupe formé par celles de ses substitutions qui sont homologues à celles de H' sera permutable aux substitutions de Θ' et contiendra la $q^{\text{ième}}$ partie de ces substitutions; résultat absurde, Θ' étant simple, et d'ordre $\frac{1.2\ldots k'}{2}$.

42. Donc toutes les substitutions $u, u', \ldots$ du groupe G' remplaceront les indices de chaque classe par des fonctions de ces mêmes indices. D'ailleurs *il existe au moins une classe dont toutes les substitutions $u, u', \ldots$ ne multiplient pas chacune tous les indices par de simples facteurs constants;* sans quoi $u, u', \ldots$ seraient échangeables entre elles, et leurs homologues $U, U', \ldots$ le seraient aussi, ce qui est absurde.

Cette classe σ contiendra nécessairement plusieurs indices; mais leur nombre n' ne pourra dépasser $n-q+1$, ainsi que nous l'avons vu.

43. Soient $v, v', \ldots$ les altérations que les substitutions $u, u', \ldots$ font subir aux indices de la classe σ; $\mathcal{G}$ le groupe formé par ces altérations; $\mathcal{G}_1$ un groupe aussi général que possible parmi ceux qui sont contenus dans $\mathcal{G}$ et permutables à ses substitutions. Celles des substitutions de G' qui font subir aux indices de la classe σ une altération contenue dans $\mathcal{G}_1$ forment évidemment un groupe contenu dans G' et permutable à ses substitutions. Leurs homologues dans Θ' formeront un groupe contenu dans Θ' et permutable à ses substitutions. Mais Θ' est simple; donc ce nouveau groupe se réduit à la substitution 1.

Il est clair d'ailleurs que le groupe Θ' de degré $k-q$ sera isomorphe à $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_1}$, premier groupe composant de $\mathcal{G}$. Or $\mathcal{G}$ a ses substitutions linéaires entre $n' \leqslant n-q+1$ indices. Et l'on pourra raisonner sur $\mathcal{G}$ et Θ' comme sur G et Θ. On aura donc, en désignant par q' un nombre premier $\geqq p$ et $< k'-1$,

$$n' \geqslant q'-1, \quad \text{d'où} \quad n' \geqslant (q-1)+(q'-1).$$

On voit de même que, si $k'' = k'-q' > 4$, on aura, en désignant par n'' un entier au plus égal à $n'-q'+1$ et par q'' un nombre premier différent de p et $< k''-1$,

$$n'' \geqslant q''-1, \quad \text{d'où} \quad n \geqslant (q-1)+(q'-1)+(q''-1),$$

etc.

Soient donc $q, q', q'', \ldots$ des nombres premiers quelconques différents de 1 et de p, et tels que l'on ait

$$k = q + q' + q'' + \ldots + q^{(\mu-1)} + \rho, \tag{6}$$

$$\rho > 1 \quad \text{et} \quad q^{(\mu-1)} + \rho > 4, \tag{7}$$

on aura

$$(8) \qquad n \geqslant q - 1 + q' - 1 + \ldots \geqslant k - \rho - \mu.$$

44. Pour achever de déterminer la limite inférieure de n correspondant à chaque valeur de k, il ne restera plus qu'à opérer de la manière la plus avantageuse la décomposition de $k - \rho$ en une somme de nombres premiers. Très-peu de nombres premiers suffiront en général.

45. Les théorèmes de M. Tchébychef sur la fréquence des nombres premiers permettent d'assigner à n une limite indépendante de toute recherche arithmétique. Supposons en effet que k soit contenu entre 2^m et 2^{m+1}. On sait qu'il existe un nombre premier q contenu entre $k-2$ et $\frac{k}{2}$. Si $q \gtrless p$, on pourra poser

$$k = q + k', \quad n = q - 1 + n',$$

k' étant $< \frac{k}{2}$, et par suite au plus égal à 2^m. On aura d'ailleurs

$$k - n = 1 + k' - n',$$

et, par suite, la limite de $k - n$ se déduira de celle de $k' - n'$.

Si $p = q$ (cas qui ne peut se présenter que lorsque p est contenu lui-même entre k et $\frac{k}{2}$), on aura un nombre premier q_1 compris entre $\frac{k}{2}$ et $\frac{k}{4}$, et l'on posera

$$k = 2q_1 + k', \quad n = (q_1 - 1) + (q_1 - 1) + n',$$

d'où

$$k - n = 2 + k' - n',$$

k' étant encore $< \frac{k}{2}$.

On aura de même

$$k' - n' = \lambda + k'' - n'',$$

k'' étant $< \frac{k''}{2}$, et λ étant égal à 1, sauf dans le cas où p serait contenu entre k' et $\frac{k'}{2}$.

On opérera une suite de réductions analogues, jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre $k^{(r)}$ inférieur à 8, et l'on aura

$$k - n = r + k^{(r)} - n^{(r)},$$

ou

$$k - n = r + 1 + k^{(r)} - n^{(r)},$$

suivant qu'on aura été ou non obligé d'éviter le nombre premier p dans la suite des opérations.

Le nombre r des réductions à faire sera d'ailleurs au plus égal à $m-2$; on aura donc

$$k-n \leqslant m-1+k^{(r)}-n^{(r)},$$

formule où le nombre $m-1$ doit être remplacé par $m-2$, si l'on n'a pas eu à éviter p, et notamment si $p<8$.

Cela posé, on aura

$$m-1 \leqslant \frac{\log k}{\log 2}-1;$$

il reste à évaluer $k^{(r)}-n^{(r)}$ pour chacune des valeurs de $k^{(r)}$ inférieure à 8.

46. 1° Soit $k^{(r)}=7$.

Si $p>5$, on pourra, dans les formules générales (6), (7), (8), poser $k^{(r)}=5+2$, $n^{(r)}\geqslant 4$, $k^{(r)}-n^{(r)}\leqslant 3$.

Si $p=5$, on posera $k^{(r)}=3+2+2$, $n^{(r)}\geqslant 2+1$, $k^{(r)}-n^{(r)}\leqslant 4$.

2° Si $k^{(r)}<7$ et >3, on aura $n^{(r)}\geqslant 2$. En effet, si $n^{(r)}$ était égal à 1, le groupe linéaire correspondant n'ayant qu'un indice, ses substitutions seraient échangeables entre elles. Il ne pourrait donc être isomorphe au groupe alterné Θ, qui ne jouit pas de cette propriété. On aura donc, suivant que $r^{(k)}=6$, 5 ou 4, $k^{(r)}-n^{(r)}\geqslant 4$, 3 ou 2.

3° Enfin si $k^{(r)}=3$, on aura $k^{(r)}-n^{(r)}\leqslant 2$.

On aura donc dans tous les cas

$$k^{(r)}-n^{(r)}\leqslant 4,$$

d'où la formule définitive

$$k-n \leqslant \frac{\log k}{\log 2}+3,$$

qui n'est autre que l'inégalité (4) que nous voulions établir.

V

Nous profitons de cette occasion pour rectifier la proposition suivante, que nous avons donnée dans notre *Traité des substitutions* (n° 84) :

Un groupe G *permutable aux substitutions d'un groupe n fois transitif* H *est au moins* $n-1$ *fois transitif.*

Cet énoncé doit être complété par l'exception suivante :

Néanmoins, si G *est un groupe simplement transitif de degré* 2^m, *formé par les substitutions*

$$| x_1, \ldots, x_m \quad x_1 + \alpha_1, \ldots, x_m + \alpha_m | \bmod 2,$$

H *pourra être trois fois transitif.*

La nécessité de cette exception est évidente; car on sait que le groupe linéaire de degré 2^m, formé par l'ensemble des substitutions permutables à G, est trois fois transitif.

Nous allons montrer que cette exception est la seule, en reprenant la démonstration de l'endroit cité, dont l'insuffisance ressortira d'elle-même chemin faisant.

Soient S l'une des substitutions de G; $C_1, \ldots, C_k$ ses divers cycles, y compris ceux qui ne contiennent qu'une lettre. Prenons un nombre de cycles $C_1, \ldots, C_\rho$, tel, qu'ils contiennent au moins n lettres, mais qu'en supprimant l'un d'entre eux, les précédents en contiennent seulement $n - \nu$, ν étant > 0. Nous admettrons en premier lieu que l'on puisse choisir les cycles $C_1, \ldots, C_\rho$ de telle sorte que l'on ait $\nu > 1$.

Soient, dans cette hypothèse, a, b,... les $n - \nu$ lettres de $C_1, \ldots, C_{\rho-1}$, d, e, ..., g les ν premières lettres de C_ρ. Le groupe H, étant n fois transitif, contient une substitution T qui laisse immobiles a, b, $c, \ldots, d$, e,... et remplace g par une autre lettre arbitraire p; G, étant permutable à T, contiendra la substitution $T^{-1}ST$, et par suite la substitution $U = S^{-1}T^{-1}ST$, laquelle laisse immobiles les $n-2$ lettres $a, b, \ldots, e, \ldots$ et remplace g par p. Mais H renferme une substitution V qui remplace les n lettres a, $b, \ldots, e, \ldots$, g, p par n lettres arbitraires α, $\beta, \ldots, \varepsilon, \ldots, \gamma, \pi$; et G contiendra $V^{-1}UV$, qui laisse immobiles $n-2$ lettres arbitraires α, $\beta, \ldots, \varepsilon, \ldots$ et remplace l'une des lettres restantes, γ, par l'une quelconque des autres lettres restantes, π. Donc G est $n-1$ fois transitif.

Il reste à examiner le cas, omis dans notre ancienne démonstration, où l'on a nécessairement $\nu = 1$. Suivons les conséquences de cette hypothèse, pour voir l'étendue de l'exception.

Tous les cycles de S *contiennent un même nombre* μ *de lettres.* En effet, supposons-les écrits plus haut, de manière à être ordonnés d'après le nombre décroissant de leurs lettres. Si le dernier cycle C_k contenait moins de lettres que le premier C_1, les cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{\rho-1}$, contenant par hypothèse $n-1$ lettres, les cycles C_k, $C_2, \ldots, C_{\rho-1}$ en contiendraient $n - \nu$, ν étant > 1. D'autre part, C_k contenant au moins une lettre, les cycles C_k, $C_2, \ldots, C_{\rho-1}$, C_1 en contiendraient au moins n. On voit donc qu'on pourrait, contrairement à l'hypothèse, faire en sorte que ν fût > 1. On a d'ailleurs, par hypothèse, $\mu(\rho - 1) = n - 1$, donc μ *divise* $n-1$.

La substitution S étant l'une quelconque de celles de G, on voit que *toutes*

les substitutions de G (*l'unité exceptée*) *doivent être régulières, et déplacer toutes les lettres : de plus leur ordre doit diviser* $n-1$.

Cela posé, si le groupe G n'est pas transitif, le groupe H, dont les substitutions lui sont permutables, sera non primitif; il ne pourra donc être qu'une fois transitif, et le théorème sera vrai.

Soit au contraire G transitif, il ne pourra l'être qu'une fois; car toutes ses substitutions (sauf l'unité) déplaçant toutes les lettres, celles d'entre elles qui laissent une lettre immobile se réduisent à l'unité.

D'autre part, G est $n-2$ fois transitif; car H l'étant n fois, l'est *a fortiori* $n-1$ fois; et les cycles $C_1,\ldots, C_{\rho-1}$ contiennent $n-1$ lettres, tandis que les cycles $C_1,\ldots, C_{\rho-2}$ n'en contiennent que $n-1-\mu$; S étant choisie différente de l'unité, μ sera évidemment >1; en raisonnant sur $n-1$ comme précédemment sur n, on ne tombera donc pas sur le cas d'exception que nous discutons en ce moment.

Il résulte de là que n est au plus égal à 3. Mais si $n<3$, le théorème sera vérifié. Si $n=3$, les substitutions de G, dont l'ordre divise $n-1$, auront toutes pour ordre 2. Donc l'ordre du groupe G sera une puissance de 2, telle que 2^m. D'ailleurs il est transitif, et toutes ses substitutions déplacent toutes les lettres; donc le nombre des lettres qu'il contient est 2^m.

Soient maintenant $S=(ab)(cd)\ldots$ l'une des substitutions de G; S_1 une autre substitution de G, qui remplace a par une autre lettre quelconque c. La substitution SS_1 remplace b par c; mais elle est d'ordre 2; donc elle remplacera c par b; et comme S le remplace par d, S_1 remplacera d par b; on aura donc $S_1=(ac)(bd)\ldots$ et S_1 sera échangeable à S.

Donc les substitutions de G sont échangeables entre elles; donc (*Traité des substitutions*, 408) on pourra les mettre sous la forme

$$|\ x_1,\ldots, x_m \quad x_1+\alpha_1,\ldots, x_m+\alpha_m\ |\ \mathrm{mod}\,2.$$

Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace; par M. Laguerre.

(Séance du 8 janvier 1873)

1. Un grand nombre de propriétés intéressantes des surfaces du second ordre (ou *quadriques*), qui passent par six points donnés de l'espace, dépendent de la décomposition d'un polynôme du sixième degré en la somme de quatre carrés.

Dans cette note, je me restreindrai au cas plus simple où on le met sous la forme d'une somme de trois carrés, ce qui correspond, au point de vue

géométrique, à l'étude des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points (*).

2. Comme, dans tout ce qui suit, je m'appuie surtout sur quelques propriétés des cubiques gauches, je crois tout d'abord devoir les rappeler brièvement.

Soit $a\lambda^3+3b\lambda^2+3c\lambda+d=0$, l'équation d'un plan mobile, λ désignant une variable numérique arbitraire; ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre, dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche K, définie par le système d'équations $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$; à chaque valeur de λ correspond un plan osculateur de la cubique dont je désignerai le point de contact sous le nom de point (λ), en disant que λ est le paramètre de ce point. On voit facilement, d'ailleurs, que les coordonnées de ce point sont données par les formules

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{-\lambda}=\frac{c}{\lambda^2}=\frac{d}{-\lambda^3}.$$

3. L'équation d'un plan quelconque étant $a\delta-3b\gamma+3c\beta-d\alpha=0$, on voit que ce plan coupe la cubique K en trois points dont les paramètres sont les racines de l'équation $\alpha\lambda^3+3\beta\lambda^2+3\gamma\lambda+\delta=0$; ces points définissent d'ailleurs complétement le plan, en sorte qu'on peut le considérer comme déterminé par le polynôme du troisième degré qui forme le premier membre de cette équation.

Dans ce qui suit, si A représente d'une façon générale l'équation d'un plan, A′ désignera le polynôme qui a pour racines les paramètres des points où ce plan coupe la cubique. Le degré de ce polynôme A′ s'abaissera du reste, si le plan passe par le point de la cubique dont le paramètre est infini; l'équation $m=0$, par exemple, où m désigne une constante, est l'équation du plan osculateur en ce point.

4. Étant donnés six points dans l'espace, on peut mener par ces six points une infinité de cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur une surface du quatrième ordre S. Les différentes génératrices de ces cônes forment un *complexe* de droites du sixième ordre; en effet, étant pris arbitrairement un point M de l'espace, pour qu'une droite passant par ce point soit une droite du complexe, il faut et il suffit que l'on puisse construire un cône du second ordre ayant son sommet sur cette droite, et passant par les six points donnés ainsi que par le point M.

Or, d'après un beau mémoire de M. Hesse (*Crelle*, t. 49), le lieu des sommets des cônes du second ordre que l'on peut mener par sept points donnés est une courbe gauche du sixième ordre Q; le cône du complexe, qui est le cône projectif de cette courbe, est donc aussi du sixième ordre.

(*) Voir, à ce sujet : Hierholzer, *Sur une surface du quatrième ordre;* Math. Ann., t. IV, p. 172.

5. La surface S est le lieu des courbes Q. On peut, par les six points donnés, mener une cubique gauche bien déterminée K; soit $V = 0$ l'équation du sixième degré dont les racines sont les paramètres de ces points. Je ferai remarquer que le degré de cette équation peut s'abaisser au cinquième, si le système de coordonnées est tellement choisi que le paramètre d'un des points donnés soit égal à l'infini.

Considérons un des cônes du second ordre que l'on peut mener par les six points; son équation peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme $AC - B^2 = 0$, où $A = 0$ et $C = 0$ désignent les équations de deux plans tangents quelconques à ce cône, et $B = 0$ l'équation du plan des génératrices de contact. Les paramètres des points de rencontre du cône avec la cubique sont évidemment les racines de l'équation $A'C' - B'^2 = 0$; on doit donc avoir $V = B'^2 - A'C'$. Et réciproquement, si l'on met le polynôme du sixième degré V sous la forme précédente, on en déduira l'équation d'un cône du second ordre passant par les six points.

6. Étant donnée une droite quelconque du complexe, c'est-à-dire une génératrice d'un cône du second ordre passant par les six points, on peut la déterminer par l'équation $A = 0$ du plan tangent au cône le long de cette droite, et par l'équation $B = 0$ du plan mené par cette droite et par le point de la cubique dont le paramètre est l'infini.

De cette façon, on voit que le polynôme B' sera simplement du second ordre, et l'on devra avoir $V = B'^2 - A'C'$. Soient p, q, r les racines de l'équation $A' = 0$; pour chacune de ces racines, on aura $B' = \sqrt{V}$; et, le polynôme B' étant du second degré, on pourra le déterminer par la formule de Lagrange.

Si l'on pose pour un instant $A' = f(\lambda) = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r)$ et $B' = \varphi(\lambda)$, on aura

$$\varphi(\lambda) = \sqrt{V(p)}\,\frac{(x-q)(x-r)}{f'(p)} + \sqrt{V(q)}\,\frac{(x-p)(x-r)}{f'(q)} + \sqrt{V(r)}\,\frac{(x-p)(x-q)}{f'(r)}.$$

On déduirait facilement de là les équations $A = 0$ et $B = 0$ des plans qui déterminent la droite du complexe, et l'on voit que ses quatre coordonnées s'exprimeront au moyen des variables p, q, r; l'élimination de ces variables entre les équations qui donnent ces coordonnées fournira l'équation elle-même du complexe.

7. Un plan quelconque est tangent à quatre cônes du complexe.

En effet, $A = 0$ étant l'équation de ce plan, si l'on pose

$$A' = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r),$$

on voit, par ce qui précède, que les génératrices de contact sont déterminées par l'expression $\varphi(\lambda) = 0$, expression qui, à cause des doubles signes, est susceptible de quatre valeurs.

Les équations de ces quatre droites (dans le plan donné) sont de la forme

$$M+N+P=0,\ M+N-P=0,\ M-N+P=0,\ M-N-P=0,$$

$M=0$, $N=0$ et $P=0$ étant les équations des côtés du triangle formé par les trois points où le plan donné coupe la cubique gauche K.

D'où cette conclusion :

Un plan pris arbitrairement est tangent à quatre cônes du complexe ; les génératrices de contact forment un quadrilatère complet ; les trois points de rencontre des diagonales de ce quadrilatère sont les points où le plan coupe la cubique gauche K.

8. Le lien intime qui existe, d'après les considérations précédentes, entre la décomposition en trois carrés d'un polynôme du sixième degré et le problème qui consiste à construire les différents cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace, nous indique naturellement le rôle que jouent ces cônes dans la théorie des fonctions ultra-elliptiques du premier ordre.

Soit, en effet, $AC-B^2=0$ l'équation d'un de ces cônes; le plan mobile dont l'équation est $T=A\rho^2+2B\rho+C=0$, ρ désignant une variable arbitraire, enveloppe ce cône; et les paramètres de ses points de rencontre avec la cubique K sont donnés par l'équation

$$(1)\qquad T'=A'\rho^2+2B'\rho+C'=0.$$

Le plan mobile se déplaçant, si l'on fait varier à la fois ρ et le paramètre λ, on aura par la différentiation

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda+2(A'\rho+B')\,d\rho=0,$$

ou, comme $A'\rho+B'=\sqrt{B'^2-A'C'}=\sqrt{V}$, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda+2\sqrt{V}\,d\rho=0,\quad \text{ou encore}\quad \frac{d\lambda}{\sqrt{V}}=-\frac{2d\rho}{\frac{dT'}{d\lambda}}.$$

En désignant par a et b deux constantes quelconques, on déduit de là

$$(2)\qquad \frac{(a+b\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{V}}=-\frac{2(a+b\lambda)}{\frac{dT'}{d\lambda}}\,d\rho;$$

or $\frac{dT'}{d\lambda}$ est un polynôme du second degré en λ ; par suite, d'après un théorème d'Euler bien connu, si l'on fait la somme, pour toutes les racines de l'équation (1), des valeurs que prend alors le second membre de l'équa-

tion (2), le résultat est identiquement nul. On a donc aussi, quels que soient a et b,

$$\frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{V(x)}}+\frac{(a+by)\,dy}{\sqrt{V(y)}}+\frac{(a+bz)\,dz}{\sqrt{V(z)}}=0,$$

x, y et z désignant les paramètres des trois points où le plan qui enveloppe le cône coupe la cubique.

On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnés, sur une cubique gauche, six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V=0$, *si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux des plans tangents à ce cône, en désignant respectivement par* x_0, y_0 *et* z_0 *les paramètres des points où le premier de ces plans coupe la cubique, et par* x_1, y_1 *et* z_1 *les paramètres des points d'intersection relatifs au second plan, on a les deux relations*

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{V(x)}}+\int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{V(y)}}+\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{V(z)}}=0$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{V(x)}}+\int_{y_0}^{y_1}\frac{y\,dy}{\sqrt{V(y)}}+\int_{z_0}^{z_1}\frac{z\,dz}{\sqrt{V(z)}}=0.$$

9. Les équations transcendantes qui précèdent déterminent x_1 et y_1, quand x_0, y_0, z_0 et z_1 sont donnés ; on peut aussi, d'après les considérations qui précèdent, les déterminer géométriquement.

Qu'on imagine, en effet, le plan passant par les points (x_0), (y_0) et (z_0), et l'un quelconque des quatre cônes du complexe qui lui sont tangents. On pourra, par le point (z_1), mener le plan tangent à ce cône, et l'un quelconque de ces plans, par son intersection avec la cubique, donnera les points (x_1) et (y_1). Comme il y a lieu de considérer quatre cônes, on voit par suite qu'on trouvera quatre systèmes de solutions.

10. En terminant ces brèves indications sur le problème géométrique que je me proposais de traiter, je ferai remarquer l'analogie complète des résultats obtenus avec ceux donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques.

Il obtient, comme on le sait, la construction géométrique de l'addition de ces fonctions, en faisant rouler une tangente sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes, dont la position détermine sur une conique un polynôme du quatrième degré. Pour effectuer géométriquement l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce, il suffit de faire rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points de l'espace dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynôme du sixième degré.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 22 JANVIER 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur quelques théorèmes d'arithmétique.*

M. Brisse donne lecture, de la part de M. Flye Sainte-Marie, membre de la Société, d'une note *Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées.*

M. le comte Léopold Hugo communique à la Société une note *Sur un dodécaèdre antique conservé au musée du Louvre.*

SÉANCE DU MERCREDI 5 FÉVRIER 1873

PRÉSIDÉE PAR M. BOURGET

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Boulanger, professeur, à Paris; Deschamps, capitaine d'artillerie, à Paris; Haag, ingénieur des ponts et chaussées, à Tours; Laisant, capitaine du génie, à Tours.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Désiré André communique à la Société un *Théorème nouveau sur les factorielles.*

M. Camille Jordan communique à la Société une note *Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan.*

M. Bourget communique à la Société la *Démonstration des formules empiriques trouvées par M. Sondhaus pour les sons rendus par les tubes chauffés.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe.*

SÉANCE DU MERCREDI 19 FÉVRIER 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire annonce que M. Gauthier-Villars s'est fait inscrire comme *sociétaire perpétuel.*

M. Chasles donne communication d'une lettre de M. Broch, répondant à celle qu'il lui avait adressée, au nom de la Société, à propos de la publication des œuvres d'Abel.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Beynac, professeur, à Paris; Brocard, capitaine du génie, à Biskra; Tissot, examinateur d'admission à l'École polytechnique.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Brisse communique à la Société une *Démonstration nouvelle de la règle de Gauss relative à la convergence des séries.*

M. Mannheim communique à la Société une série de *Théorèmes sur les trajectoires des points d'une droite.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur le mouvement d'une droite.*

M. Brisse donne lecture, de la part de M. de Pistoye, membre de la Société, d'une *Note sur les sections planes des cônes circulaires obliques.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur quelques théorèmes d'arithmétique; par M. Laguerre.

(Séance du 22 janvier 1873)

1. On connaît la proposition suivante : « $\varphi(m)$ désignant combien il y a de nombres premiers à m et non supérieurs à m, on a

$$m = \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots,$$

d, d', d'' désignant la suite des diviseurs de m, parmi lesquels figurent 1 et m lui-même (*). »

Cette proposition peut se généraliser ainsi qu'il suit :

Désignons en général par $\left(m, \frac{m}{k}\right)$, où m désigne un nombre entier et k une quantité réelle quelconque commensurable ou incommensurable, le nombre des entiers premiers avec m et non supérieurs à $\frac{m}{k}$; on voit que, si $k = 1$, on a $(m, m) = \varphi(m)$.

(*) Voy. Serret, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 13.

Cela posé, je dis que l'on a, m désignant un nombre entier et $\left(\frac{m}{k}\right)$ la partie entière du quotient $\frac{m}{k}$,

$$(1) \qquad \left(\frac{m}{k}\right) = \left(1, \frac{1}{k}\right) + \left(d, \frac{d}{k}\right) + \left(d', \frac{d'}{k}\right) + \ldots + \left(m, \frac{m}{k}\right),$$

la somme contenue dans le second membre s'étendant à tous les diviseurs $1, d, d', \ldots, m$ du nombre m.

Pour le démontrer, je vais faire voir que si la proposition est vraie pour une valeur quelconque de k, elle est vraie pour toute autre valeur.

Soit k_0 la valeur de k pour laquelle la formule est supposée vérifiée; concevons, par exemple, que k_0 diminue d'une façon continue, le premier membre de la relation (1) ne pourra changer que si k passe par une valeur qui donne à $\frac{m}{k}$ une valeur entière; dans ce passage, $\left(\frac{m}{k}\right)$ augmentera d'une unité; le second membre ne peut changer que si l'une ou plusieurs des quantités $\frac{d}{k}$ acquièrent une valeur entière, et, comme alors $\frac{m}{k}$ a aussi une valeur entière, puisque m est un multiple de d, on voit que la solution de la question consiste à examiner ce qui se passe quand $\frac{m}{k}$ est un entier.

Or, quand $\frac{m}{k}$ est un entier, il peut se faire qu'un certain nombre d'expressions de la forme $\frac{d}{k}$ soient aussi des entiers; supposons-les rangées par ordre décroissant de grandeur, en sorte qu'elles forment la série

$$\frac{m}{k}, \frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{\mu}{k},$$

$\frac{\mu}{k}$ désignant la plus petite de ces fractions (il est clair d'ailleurs que μ peut être égal à m).

Cela posé, $\frac{\mu}{k}$ est nécessairement premier avec μ; car, si α désignait un diviseur commun, $\frac{\mu}{\alpha}$ et $\frac{\frac{\mu}{\alpha}}{k}$ seraient des nombres entiers et $\frac{\mu}{k}$ ne serait pas le dernier terme de la série. Il n'en est pas de même relativement aux termes précédents; en effet, si l'on pose $\frac{\mu}{k} = e$, μ et e étant premiers entre eux, on en déduit $\left(\frac{m'}{k}\right.$ désignant un quelconque des termes qui précè-

dent $\frac{\mu}{k}\Big)$ $e' = \frac{m'}{k} = \frac{m'e}{\mu}$, d'où $\frac{e'}{m'} = \frac{e}{\mu}$; et, comme la fraction $\frac{e}{\mu}$ est irréductible, on en conclut que e' et m' sont respectivement des multiples de e et de m et ont par conséquent un facteur commun.

2. Voyons maintenant quels changements subit le second membre quand $\frac{m}{k}$ prend une valeur entière.

Les différentes expressions telles que $\left(m', \frac{m'}{k}\right)$ ne changent pas de valeur; la série des nombres non supérieurs à $\frac{m'}{k}$ renferme en plus, il est vrai, le nombre e'; mais, comme il n'est pas premier avec m', la somme n'est pas changée; l'expression $\left(\mu, \frac{\mu}{k}\right)$ seule change, et augmente précisément d'une unité, puisque μ et $\frac{\mu}{k}$ sont premiers entre eux.

La proposition est donc vraie, si elle est vraie pour une valeur quelconque de k; et comme elle l'est évidemment pour une valeur de k supérieure à m, puisque les deux termes de la relation (1) se réduisent à zéro, elle est démontrée.

3. Je veux maintenant tirer de la relation $m = \Sigma\varphi(d)$, que j'ai rappelée au commencement de cette note, et dont je viens de donner une nouvelle démonstration indépendante de la formule qui exprime $\varphi(m)$ au moyen de ses facteurs premiers (*), une démonstration de cette formule elle-même.

M. Dedekind (*Théorie des nombres* de Dirichlet, p. 394) a, il est vrai, donné un théorème remarquable qui permet de résoudre cette question.

Ce théorème s'énonce ainsi qu'il suit : « $\lambda(n)$ désignant un nombre égal à 0, si n est divisible par un carré, dans le cas contraire, égal à ± 1 suivant que le nombre des facteurs de n est pair ou impair, si deux fonctions $f(m)$ et $\varphi(m)$ sont liées par la relation suivante

$$f(m) = \Sigma\psi(d), \tag{2}$$

où, dans le second membre, la sommation s'étend à tous les diviseurs du nombre entier m, on a réciproquement

$$\psi(m) = \Sigma\lambda\left(\frac{m}{d}\right)f(d), \tag{3}$$

la sommation s'étendant également à tous les diviseurs de m. »

De la formule (3), on déduit facilement l'expression connue de $\varphi(m)$,

(*) On connaît d'autres démonstrations indépendantes également de cette formule; voir, notamment, Dirichlet, *Théorie des nombres*, p. 25.

mais il est à remarquer que la démonstration de cette formule indiquée par M. Dedekind s'appuie précisement sur cette expression; pour éviter un cercle vicieux, il faudrait donc établir directement la relation (3), ce qui serait du reste facile en développant les considérations qui suivent.

4. Pour obtenir l'expression de $\varphi(m)$, je considérerai une série de la forme

$$f(1)\frac{x}{1-x}+f(2)\frac{x^2}{1-x^2}+f(3)\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots.$$

Soit

$$\theta(1)x+\theta(2)x^2+\theta(3)x^3+\ldots$$

son développement effectué suivant les puissances croissantes de x; il est clair que les coefficients d'une des séries déterminent ceux de l'autre, en particulier on a évidemment

$$\theta(m)=\Sigma f(d),$$

la sommation s'étendant à tous les diviseurs du nombre entier m.

Supposons en particulier la fonction f tellement choisie que, m étant décomposé en facteurs premiers, en sorte que $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, on ait $f(m)=f(a^\alpha)f(b^\beta)\ldots$. La fonction f reste du reste arbitraire; ainsi $f(a^\alpha)$ et $f(a^{\alpha'})$ peuvent n'avoir aucune relation entre elles, si α et α' sont différents ; il en est de même de $f(a^\alpha)$ et $f(b^\alpha)$, si les facteurs a et b ne sont pas les mêmes.

Cela posé, dans ces hypothèses, les différents diviseurs du nombre $m=a^\alpha b^\beta\ldots$ étant les différents termes du produit

$$(1+a+\ldots+a^{\alpha-1})(1+b+\ldots+b^{\beta-1})\ldots,$$

il est clair que l'on aura

$$(4)\qquad \theta(m)=[1+f(a)+\ldots+f(a^{\alpha-1})][1+f(b)+\ldots+f(b^{\beta-1})]\ldots.$$

5. Cette formule offre un grand nombre d'applications.

Supposons, par exemple, que l'on ait $f(a)=f(b)=\ldots=-1$, et $f(a^\mu)=f(b^\mu)=\ldots=0$, pour toutes les valeurs de μ supérieures à l'unité. On déduira évidemment de la formule (4), pour toute valeur de m supérieure à l'unité, $\theta(m)=0$; on a d'ailleurs $\theta(1)=1$, et il est facile de voir que $f(m)=\lambda(m)$, λ désignant la même fonction numérique dont j'ai parlé ci-dessus (n° 3) (*); on a donc l'expression suivante, due à Mœbius (*loc. cit.*) :

$$(5)\qquad x=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}-\frac{x^5}{1-x^5}+\frac{x^6}{1-x^6}+\ldots.$$

(*) Cette remarquable fonction numérique, qui se présente dans la formule de M. Dedekind, a aussi été étudiée par Mœbius (*Sur un nouveau mode de réversion des séries*; CRELLE, t. IX), et par M. Tchebichef (*Note sur différentes séries*; LIOUVILLE, 1re série, t. XVI).

6. Supposons maintenant que l'on fasse, n désignant un entier quelconque,

$$\theta(a)=\theta(b)=\ldots=-1,\ \theta(a^n)=\theta(b^n)=\ldots=1,\ \theta(a^{n+1})=\theta(b^{n+1})=\ldots=-1,$$

en sorte que $\theta(a^n)$ soit, quel que soit le facteur a, égal à $+1$ si n est divisible par n, égal à -1 si n est congru à $+1$ suivant le module n, et dans tous les autres cas égal à zéro.

De la formule (4) il résulte que $\theta(m)$ est nul, à moins que m ne soit une puissance $n^{ième}$ exacte, auquel cas $\theta(m)=1$; d'ailleurs $f(m)$ est toujours égal à -1, 0 ou $+1$; on déduit de là que, quel que soit l'entier n, la série

$$x+x^{2^n}+x^{3^n}+x^{4^n}+\ldots$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{1-x}+\varepsilon_2\frac{x^2}{1-x^2}+\varepsilon_3\frac{x^3}{1-x^3}+\varepsilon_4\frac{x^4}{1-x^4}+\ldots,$$

les coefficients ε étant toujours égaux à -1, 0 ou $+1$, et se déterminant d'ailleurs facilement d'après ce qui précède.

Pour $n=2$, on a en particulier la formule suivante, donnée par M. Liouville (*Journal de math.*, 2e série, t. II),

$$(6)\qquad x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}.$$

7. Pour revenir à l'objet principal de cette note, je ferai remarquer que, de la propriété fondamentale de la fonction φ

$$(7)\qquad m=\Sigma\varphi(d),$$

résulte le développement suivant :

$$(8)\qquad \varphi(1)\frac{x}{1-x}+\varphi(2)\frac{x^2}{1-x^2}+\varphi(3)\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots=x+2x^2+3x^3+\ldots.$$

Posons maintenant, quel que soit le nombre premier a, $f(a^n)=a^{n-1}(a-1)$, il est clair que, d'après la formule (4), on aura

$$\theta(m)=a^\alpha b^\beta\ldots=m,\quad\text{et}\quad f(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots(a-1)(b-1).$$

D'où, en se reportant à la formule (7),

$$\varphi(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots(\alpha-1)(\beta-1).$$

Telle est l'expression que je voulais déduire de la relation (7) (*).

(*) Depuis que cette note a été écrite, j'ai reconnu que la proposition attribuée à M. Dedekind appartenait en réalité à M. Liouville. (Voy. *Journal de math.*, 2e série, t. II, p. 110.

Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées;
par M. Flye Sainte-Marie.

(Séance du 22 janvier 1873)

Soit S une courbe gauche fermée quelconque; je suppose cette courbe parcourue dans un sens déterminé, et en chaque point m de la courbe je mène une tangente dirigée à partir de ce point dans le sens suivant lequel est parcouru sur la courbe l'élément contenant m. Par un point O quelconque de l'espace, je mène une série de droites parallèles à ces tangentes et dirigées dans le même sens. Les parallèles ainsi menées déterminent un cône dont le sommet est en O. Ce cône trace sur une sphère décrite du point O comme centre une courbe σ que je supposerai continue; ce qui revient à admettre que la courbe S ne présente ni point anguleux, ni point de rebroussement; la courbe gauche S étant fermée, la courbe sphérique σ l'est aussi, et l'on démontre aisément que tout grand cercle de la sphère est coupé par cette dernière au moins deux fois, soit en deux points distincts, soit suivant un point double de la courbe.

En recherchant quelles dispositions peut présenter la courbe σ pour satisfaire à cette condition, et en supposant que la courbe σ ne présente elle-même ni point anguleux ni point de rebroussement, on arrive aux conclusions suivantes :

1° Soit, sur la courbe σ, $2n$ le nombre des points d'inflexion (j'entends, par point d'inflexion sur une courbe sphérique, un point où la courbe est traversée par le grand cercle qui lui est tangent; le nombre de ces points est nécessairement pair); soit n' le nombre des points doubles et n'' le nombre des couples de points diamétralement opposés; la somme $n+n'$ est au moins égale à 2; si cette somme n'est pas plus grande que 2, n'' est au moins égal à 2; mais si $n+n'$ est égal à 3 ou plus grand que 3, n'' peut être nul.

2° La longueur totale de la courbe σ est toujours plus grande qu'une circonférence de grand cercle.

A ces propriétés de la courbe sphérique σ correspondent des propriétés analogues de la courbe gauche S :

1° Le nombre des points où la courbe S n'est pas traversée par son plan osculateur est toujours pair; soit $2n$ ce nombre. Si, la courbe S étant supposée parcourue dans un sens déterminé, n' désigne le nombre des couples d'éléments parallèles et parcourus dans le même sens, n'' le nombre des couples d'éléments parallèles et parcourus en sens contraire, la somme $n+n'$ est au moins égale à 2; si cette somme n'est pas plus grande que 2, n'' est au moins égal à 2; mais si $n+n'$ est égal à 3 ou plus grand que 3, n'' peut être nul.

Il est entendu, dans cet énoncé, que la courbe S ne présente ni point anguleux, ni point de rebroussement, et qu'il en est de même de la courbe image σ.

2° Si la courbe S ne présente ni point anguleux, ni point de rebroussement, la courbure totale de première espèce de la courbe entière est toujours plus grande que 2π.

A ces propositions, on peut ajouter la suivante :

Toute courbe sphérique σ, telle qu'aucun grand cercle de la sphère ne puisse la laisser entièrement d'un même côté, peut être considérée comme la courbe image d'une courbe gauche fermée.

Sur un dodécaèdre antique, conservé au musée du Louvre, par M. le comte L. Hugo.

(Séance du 22 janvier 1873)

Je viens signaler à l'attention de la Société un objet appartenant au musée du Louvre, et qui a un caractère géométrique.

On sait le rôle important donné aux corps réguliers dans l'antiquité ; les idées platoniciennes les assimilaient aux éléments de la nature. Quoi qu'il en soit, il est intéressant de constater que certains solides réguliers avaient été adoptés comme formes industrielles. Le cube des anciens est arrivé jusqu'à nous à l'état de tessères, de dés à jouer ; je ne connais aucun exemple du tétraèdre ; l'icosaèdre est une figure trop compliquée, sans doute, pour avoir été suivie par les artisans, mais il n'en est pas de même du dodécaèdre.

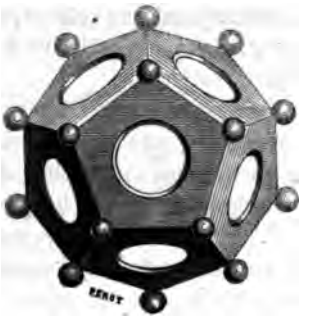


Fig. 1.

J'ai remarqué dans une vitrine de la salle des bronzes un objet, probablement un brûle-parfum, affectant la figure du dodécaèdre régulier : c'est un objet creux, et dont les faces présentent des ouvertures circulaires ; de petites sphères placées sur les sommets servent de pieds dans toutes les positions possibles de l'objet ; la patine est verte, et l'aspect ne manque pas d'élégance. L'idée de purification qui s'attache à un brûle-parfum n'est pas en désaccord avec la notion de bonne santé que les pythagoriciens attribuaient aux figures pentagonales, telles que les faces de notre dodécaèdre. Ce petit bronze a environ deux pouces de hauteur ; un second objet analogue est placé à côté du premier, et n'en diffère que par quelques détails. A l'état neuf et brillant, ces dodécaèdres métalliques devaient flatter les regards par un certain air de richesse et par

la régularité de leur ornementation. Cependant, les ouvertures circulaires d'une même pièce sont de dimensions très-différentes. Ces objets assez énigmatiques ne sont pas compris dans la première partie du catalogue, la seule qui soit encore publiée.

Quant à l'octaèdre régulier, il existe un dé en ivoire présentant cette figure dans le Musée égyptien, et on en trouverait sans doute d'autres dans les diverses collections de l'Europe.

Théorème nouveau sur les factorielles; par M. Désiré André.

(Séance du 5 février 1873)

1. A étant un nombre entier et positif, on sait qu'on appelle factorielle de A, et que l'on désigne par A!, le produit 1.2.3...A des A premiers nombres entiers.

On sait aussi que, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des entiers positifs quelconques dont la somme est N, le quotient

$$\frac{N!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!}$$

est un nombre entier : c'est un théorème connu, que l'on peut démontrer soit directement, en prouvant que tout facteur premier qui entre au dénominateur entre au numérateur au moins autant de fois, soit indirectement, en remarquant que cette expression représente le nombre de certaines permutations avec répétitions de N lettres, nombre qui, par sa nature, est forcément entier.

Nous nous sommes demandé s'il ne serait pas possible de trouver, dans certains cas, un nombre moindre que N dont la factorielle fût divisible par le produit des factorielles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. C'est le théorème auquel nous a conduit cette recherche que nous nous proposons de faire connaître.

2. Mais ce théorème repose sur un mode de classification des systèmes de nombres entiers qui nous paraît tout à fait nouveau, auquel nous avons été conduit par cette même recherche, et que nous devons exposer d'abord.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n nombres entiers quelconques. Il existe des facteurs entiers, supérieurs à l'unité, qui sont communs à deux de ces nombres ; d'autres qui sont communs à trois, à quatre, et ainsi de suite. Nous appellerons facteurs le plus communs ceux qui sont communs au plus grand nombre possible des entiers α, et nous dirons que l'ensemble de ces entiers α forme un système premier d'ordre k, s'il y a k de ces entiers qui ne soient pas divisibles par l'un des facteurs le plus communs.

D'après cette définition, si les n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas premiers entre eux, ils forment un système premier d'ordre 0; s'ils sont premiers

entre eux deux à deux, ils forment un système premier d'ordre $n-1$; s'ils sont premiers b à b, expression inusitée, mais dont on voit immédiatement le sens, ils forment un système premier d'ordre $n-b+1$; enfin, s'ils se réduisent tous à l'unité, c'est un système premier d'ordre n.

3. Celá posé, voici le théorème annoncé :

Théorème. — *Si les nombres entiers* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *dont la somme est* N, *forment un système premier d'ordre* k, *le quotient*

$$\frac{(N-k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!}$$

est un nombre entier.

Nous le démontrerons en prouvant que tout nombre premier p, qui entre comme facteur au dénominateur, entre comme facteur au numérateur un nombre de fois au moins égal.

Supposons que ce nombre premier p entre comme facteur x fois au dénominateur, y fois au numérateur.

Nous avons, d'après une formule bien connue,

$$x=\sum_{s=1}^{s=\infty}\sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{p^s}\right),$$

$$y=\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{N-k}{p^s}\right).$$

Il suffit de prouver que l'on a

$$y \geqslant x.$$

Or cette inégalité sera évidemment démontrée, si l'on démontre l'inégalité suivante

$$\left(\frac{N-k}{p^s}\right) \geqslant \sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{p^s}\right);$$

et, *a fortiori*, si l'on démontre celle-ci

$$\left(\frac{N-k}{d}\right) \geqslant \sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{d}\right),$$

dans laquelle d représente un nombre entier quelconque supérieur à l'unité.

Pour démontrer cette dernière inégalité, divisons par d chacun des

nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les quotients, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les restes. Il résulte de ces notations :

$$N = d\sum_{t=1}^{t=n} q_t + \sum_{t=1}^{t=n} r_t,$$

et

$$\sum_{t=1}^{t=n}\left(\frac{\alpha_t}{d}\right) = \sum_{t=1}^{t=n} q_t.$$

Donc la dernière inégalité, celle qu'il suffit d'établir, revient à

$$\left(\frac{d\sum_{t=1}^{t=n} q_t + \sum_{t=1}^{t=n} r_t - k}{d}\right) \geqslant \sum_{t=1}^{t=n} q_t.$$

Or les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forment, par hypothèse, un système premier d'ordre k ; donc, parmi les restes $r_1, r_2, \ldots, r_n$, k au moins sont différents de 0 ; donc $\sum_{t=1}^{t=n} r_t$ est au moins égal à k ; donc le premier membre de l'inégalité est au moins égal à $\sum_{t=1}^{t=n} q_t$. Donc l'inégalité considérée est démontrée, ainsi que le théorème.

4. Nous terminerons par deux remarques fort courtes.

Premièrement, lorsque tous les entiers α sont égaux à l'unité, leur nombre est N, ils forment un système premier d'ordre N, et le théorème donne pour numérateur la factorielle de N — N, c'est-à-dire la factorielle de zéro, ce qui n'a pas de sens. Pour lever cette difficulté, il suffit de convenir, comme on le fait d'ailleurs généralement, que l'on regardera la factorielle de zéro comme égale à l'unité. Le quotient devient par suite $\frac{1}{1}$, ce qui est bien un nombre entier.

Secondement, le théorème qui précède est très-général. On en pourrait déduire facilement, comme cas particuliers, sinon la totalité, au moins la plus grande partie des théorèmes relatifs à la divisibilité, par certains nombres, des coefficients, soit de la formule du binôme, soit du développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme quelconque.

Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés; par M. J. Bourget.

(Séance du 5 février 1873)

INTRODUCTION

En 1835 (*), Pinaud, professeur de physique à Toulouse, a fait connaître et a étudié un phénomène acoustique remarquable qui se produit quand on laisse refroidir un tube thermométrique à l'extrémité duquel est soufflée une boule. Si, après avoir chauffé assez fortement la boule, on la retire de la flamme, l'air extérieur, en rentrant par le tube, produit un son très-pur.

Pinaud a étudié avec soin la liaison qui existe entre la hauteur du son produit et les divers éléments de l'appareil. Dans son mémoire, il formule ainsi les trois lois générales auxquelles il est arrivé :

1re Loi. — Le son produit dans un tube de verre terminé par une boule échauffée est d'autant plus grave que le tube est plus long, toutes choses égales d'ailleurs.

2e Loi. — La longueur et le diamètre du tube restant les mêmes, le son est d'autant plus grave que la boule qui termine le tube a un plus grand diamètre.

3e Loi. — Toutes choses égales d'ailleurs, le son produit est d'autant plus aigu que le tube a un plus grand diamètre.

Il a cherché ensuite une formule empirique donnant le nombre des vibrations sonores en fonction de la longueur du tube, de son rayon et du rayon de la boule. En désignant par n le nombre des vibrations complètes, par l la longueur du tube, par r son rayon, par R celui de la boule, enfin par C un coefficient constant, il a trouvé qu'on pouvait prendre

$$n = C\frac{r^{\alpha}}{l^{\beta}R^{\gamma}},$$

α, β, γ étant des constantes données par l'expérience. Son mémoire n'indique par les valeurs qu'il a trouvées pour ces constantes.

Les expériences de Pinaud ont été répétées, d'abord par C. Marx (**), puis par M. Sondhaus (***). Ce dernier a donné une formule très-simple pour dé-

(*) *L'Institut*, t. III, p. 366; 1835. — J'ai pris la plupart des renseignements historiques qui suivent dans l'excellente analyse des travaux de M. Sondhaus sur ce sujet, faite par M. Bertin (*Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. XXV, p. 207; 1872).

(**) *Erdmann's Journal f. prakt. Chem.*, t. XXII, p. 129; 1841.

(***) *Ann. de Pogg.*, t. LXXIX, p. 1; 1850. — *Ibid.*, t. CXL, p. 53-76 et 219-242.

terminer le nombre n des vibrations doubles. En nommant V le volume de la boule, L la longueur du tube thermométrique, S sa section, on a

$$(1) \qquad n = C\sqrt{\frac{S}{VL}};$$

C est une constante égale à 52,2, si le mètre est pris pour unité de longueur. Cette formule est sensiblement d'accord avec l'expérience, mais M. Sondhaus ne donne aucune raison théorique qui permette de la regarder comme représentant vraiment les lois du phénomène.

M. Sondhaus a été plus loin, il a étudié le cas de plusieurs tubes soudés au même réservoir. Si deux tubes égaux sont soudés à une boule aux extrémités du même diamètre, il suppose qu'il se forme un plan nodal perpendiculaire à la ligne des tubes, et qui divise la boule en deux parties égales de volume $\frac{V}{2}$, de telle sorte qu'on doit avoir

$$(2) \qquad n = C\sqrt{\frac{2S}{VL}}.$$

Cette formule empirique est encore d'accord avec l'expérience.

Dans le cas où plusieurs tubes (S,L), (S′,L′), (S″,L″) sont soudés à un même réservoir de volume V, M. Sondhaus, se fondant sur le même principe, écrit pour ce système complexe

$$(3) \qquad n = C\sqrt{\frac{\frac{S}{L} + \frac{S'}{L'} + \frac{S''}{L''}}{V}}.$$

Les expériences qu'il rapporte pour 3 et 4 tubes sont toutefois peu concluantes, l'appareil ne vibrait qu'avec beaucoup de difficultés.

Je me propose de faire connaître les lois véritables des phénomènes observés par Pinaud et M. Sondhaus. Le problème à résoudre est, comme on verra, assez facile, en s'appuyant sur les principes donnés par Duhamel, dans son mémoire sur les tuyaux à cheminée.

Les formules auxquelles j'arrive sont compliquées. La détermination de n dépend en réalité d'une équation transcendante, mais en tenant compte de cette circonstance que la section S des tubes thermométriques est très-faible par rapport à celle du réservoir, je retombe précisément sur les formules de M. Sondhaus.

Ces formules pourront donc désormais être regardées, au point de vue physique, comme théoriques, puisqu'elles donnent une valeur suffisamment approchée des nombres fournis par les formules véritables.

ANALYSE

1. Imaginons un réservoir AB cylindrique de longueur l et de section S, et, suivant son axe, un tube thermométrique soudé BC de longueur l' et de section S'. Supposons qu'il s'établisse dans cet appareil un mouvement vibratoire, tel que tous les points d'une même tranche, perpendiculaire à l'axe du tube, aient le même mouvement parallèle à l'axe. Désignons par x la distance au point A d'un point quelconque de AB et par x' la distance au point B d'un point quelconque de BC.

Les équations du mouvement vibratoire sont (voy. DUHAMEL, *Mécanique*)

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \frac{d^2\varphi'}{dt^2} = a'^2 \frac{d^2\varphi'}{dx'^2}.$$

La première se rapporte au mouvement de l'air dans le réservoir, la seconde au mouvement de l'air dans le tube étroit. Dans ces équations, a désigne la vitesse du son dans le réservoir, a' la vitesse du son dans le tube étroit ; on sait que ces nombres sont un peu moindres dans les tuyaux sonores qu'à l'air libre, et que la perte de vitesse est d'autant plus grande que les tubes sont plus étroits, voilà pourquoi nous prenons des nombres différents pour les deux parties de l'appareil.

La vitesse v en un point quelconque et à une époque quelconque s'obtient par la formule

$$(2) \qquad v = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{ou} \quad v' = \frac{d\varphi'}{dx'}.$$

La densité variable ρ est liée à la densité à l'état d'équilibre D par la relation $\rho = D(1 + s)$, et s est une fonction de x et de t, nommée *condensation*, que l'on obtient par la formule

$$(3) \qquad s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{ou} \quad s' = -\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt}.$$

2. Cela posé, le problème à résoudre est celui-ci :

Trouver des fonctions φ et φ' satisfaisant aux équations (1), *et en même temps aux conditions aux limites relatives à l'appareil et aux conditions initiales que nous laisserons arbitraires.*

Les conditions aux limites sont :

1° Qu'en A la vitesse de l'air soit nulle ;

2° Qu'en B, point de raccord des deux tubes, les vitesses des deux tranches infiniment minces contiguës soient en raison inverse des sections des tubes auxquels elles appartiennent, afin qu'il y ait continuité dans le fluide ;

3° Qu'en C la condensation soit nulle, puisque la dernière tranche du tube est en contact avec l'atmosphère.

3. Nous pouvons satisfaire à toutes ces conditions au moyen des formules suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi = (A \sin \lambda t + B \cos \lambda t)\, u, \\ \varphi' = (A \sin \lambda t + B \cos \lambda t)\, u', \end{cases}$$

u et u' étant deux fonctions, l'une de x, l'autre de x', telles que

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{\lambda^2}{a^2} u = 0, \\ \dfrac{d^2u'}{dx'^2} + \dfrac{\lambda^2}{a'^2} u' = 0; \end{cases}$$

de telle sorte que l'on a

$$(6)\qquad \begin{cases} u = P \sin \dfrac{\lambda x}{a} + Q \cos \dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = P' \sin \dfrac{\lambda x'}{a'} + Q' \cos \dfrac{\lambda x'}{a'}. \end{cases}$$

Dans ces équations, A, B, P, Q, P', Q', λ sont des constantes, qu'il s'agit de déterminer. Or :

1° Au point A, la vitesse $v = \dfrac{d\varphi}{dx}$ est nulle à toute époque du mouvement; donc

$$(7)\qquad P = 0, \quad Q = \text{arbitraire}.$$

2° Au point B, $x = l$ et $x' = 0$, la condensation doit être identique pour les extrémités contiguës des deux colonnes; donc

$$(8)\qquad P \sin \frac{\lambda l}{a} + Q \cos \frac{\lambda l}{a} = Q'.$$

Les deux vitesses sont en raison inverse des sections; donc

$$(9)\qquad \frac{S}{a}\left(P \cos \frac{\lambda l}{a} - Q \sin \frac{\lambda l}{a}\right) = \frac{S'}{a'} P'.$$

3° Au point C, la condensation est nulle; donc

$$(10)\qquad P' \sin \frac{\lambda l'}{a'} + Q' \cos \frac{\lambda l'}{a'} = 0.$$

De ces équations nous tirons, en faisant $Q = 1$,

$$(11)\qquad \begin{cases} P' = -\dfrac{a'}{a} \dfrac{S}{S'} \sin \dfrac{\lambda l}{a}, \\ Q' = \cos \dfrac{\lambda l}{a}; \end{cases}$$

par suite

$$-\frac{a'}{a}\frac{S}{S'}\sin\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}+\cos\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}=0,$$

ou enfin

$$\text{(12)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tg}\frac{\lambda l'}{a'}=\frac{a}{a'}\frac{S'}{S}.$$

On voit que λ est déterminé par l'équation transcendante (12), P′ et Q′ par les équations (11), P et Q par les équations (7), et que A et B restent complètement arbitraires. Nous aurons donc, pour solution particulière, les équations (4) unies aux équations

$$\text{(13)}\qquad \begin{cases} u=\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u'=\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}-\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}. \end{cases}$$

La solution particulière que nous venons de trouver correspond à un mouvement vibratoire simple et possible, résultant d'un état initial facile à trouver en faisant $t=0$,

$$\text{(14)}\qquad \begin{cases} v_0=-B\dfrac{\lambda}{a}\sin\dfrac{\lambda x}{a}, \\ v'_0=-B\dfrac{\lambda}{a'}\left[\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}+\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}\right], \\ s_0=-\dfrac{A\lambda}{a^2}\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ s'_0=-\dfrac{A\lambda}{a'^2}\left(\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}-\dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}\right). \end{cases}$$

Mais, comme cet état initial particulier serait impossible à réaliser dans la pratique, le mouvement observé est plus complexe que celui que les équations (4) et (13) définissent. Nous allons montrer que le mouvement vibratoire le plus général peut être regardé comme résultant de la superposition d'un nombre fini ou infini de ces mouvements simples. Il nous suffira donc ensuite d'étudier les propriétés de ces mouvements simples pour connaître les lois physiques du phénomène de Pinaud, puisque notre oreille décompose instinctivement le mouvement général en ces mouvements élémentaires qui correspondent chacun à un son.

4. *Intégrale générale.* — Pour arriver rapidement à l'intégrale générale, nous avons besoin d'un lemme préliminaire.

Lemme. — *Nommons u_1 et u'_1 les valeurs des fonctions u et u' pour une racine λ_1, autre que λ, de l'équation transcendante* (12); *on a identiquement la relation*

$$\text{(15)}\qquad \frac{S}{a^2}\int_0^l uu_1dx+\frac{S'}{a'^2}\int_0^l u'u'_1dx'=0.$$

En effet, des équations (5) auxquelles satisfont u, u_1, u', u_1', on tire

$$u\frac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2 - \lambda^2}{a^2}uu_1 = 0;$$

par suite, en multipliant par dx et intégrant de 0 à l,

$$\left(\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right)_0^l + \frac{\lambda_1^2 - \lambda^2}{a^2}\int_0^l uu_1 dx = 0;$$

de même

$$\left(u'\frac{du_1'}{dx'} - u_1'\frac{du'}{dx'}\right)_0^{l'} + \frac{\lambda_1^2 - \lambda^2}{a'^2}\int_0^{l'} u'u_1' dx' = 0;$$

donc

$$S\left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right)_l - S\left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right)_0 + S'\left(u'\frac{du_1'}{dx'} - u_1'\frac{du'}{dx'}\right)_{l'} - S'\left(u'\frac{du_1'}{dx'} - u_1'\frac{du'}{dx'}\right)_0$$
$$+ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\left[\frac{S}{a^2}\int_0^l uu_1 dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'u_1' dx'\right] = 0.$$

Or le second et le troisième terme de la première ligne de cette équation sont identiquement nuls, puisqu'en A la vitesse est nulle et qu'en C la condensation est nulle à toute époque; les deux termes extrêmes de la même ligne s'annulent, car au point B

$$u = u', \quad S\frac{du_1}{dx} = S'\frac{du_1'}{dx'}, \quad u_1 = u_1', \quad S\frac{du}{dx} = S'\frac{du'}{dx'};$$

donc le lemme est démontré, car dans la seconde ligne de cette équation $\lambda_1^2 - \lambda^2$ est nécessairement différent de zéro.

Cela posé, je dis qu'en désignant par Σ la somme des termes tels que (4), correspondant aux diverses racines en nombre infini de l'équation (12), l'intégrale générale des équations (1), satisfaisant non-seulement aux conditions aux limites, mais à des conditions initiales arbitraires, sera donnée par des équations de la forme

$$(16) \qquad \begin{cases} \varphi = \Sigma(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u, \\ \varphi' = \Sigma(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u', \end{cases}$$

A et B variant d'un terme à l'autre avec λ.

Il suffit pour cela de démontrer que l'on peut choisir les constantes A et B de chacun des termes de la série, de manière à avoir les identités

$$(17) \qquad \begin{cases} \Sigma Bu = F(x), & \Sigma Bu' = F_1(x'), \\ \Sigma A\lambda u = f(x), & \Sigma A\lambda u' = f_1(x'). \end{cases}$$

Nous désignons par $F'(x)$ la fonction arbitrairement donnée de x repré-

sentant la vitesse, $F(x)$ en est la fonction primitive; $f(x)$ représente la fonction arbitraire de x qui donne la condensation initiale.

Multiplions maintenant par udx, $u'dx$ les deux équations qui renferment B, intégrons et ajoutons après les avoir respectivement multipliées par $\frac{S}{a^2}$, $\frac{S'}{a'^2}$; nous aurons, en séparant les divers termes,

$$B\left[\frac{S}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'\right] + B_1\left[\frac{S}{a^2}\int_0^l uu_1dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'u_1'dx'\right] + \ldots$$
$$= \frac{S}{a^2}\int_0^l uF(x)dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'F_1(x')dx'.$$

Mais, en vertu du lemme démontré, tous les termes du premier membre, autres que le premier, sont identiquement nuls, et l'on a

$$(18) \qquad B = \frac{\frac{S}{a^2}\int_0^l uF(x)dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'F_1(x')dx'}{\frac{S}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'};$$

de même

$$(19) \qquad A\lambda = \frac{\frac{S}{a^2}\int_0^l uf(x)dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'f_1(x')dx'}{\frac{S}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{S'}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'}.$$

Les équations (18) et (19) déterminent, comme on voit, sans absurdité, les valeurs des coefficients de chacun des termes des séries (16), au moyen des conditions initiales arbitrairement données. Donc le mouvement le plus général résulte bien de la superposition d'une infinité de mouvements simples, définis chacun par les équations (4). Comme, d'ailleurs, notre organe d'audition a la propriété remarquable de percevoir séparément chacun de ces mouvements composants, tout en percevant par le timbre leur ensemble, on voit que l'étude des mouvements simples est seule importante au point de vue physique. Il était néanmoins nécessaire d'étudier l'intégrale complète, afin d'être assuré que les mouvements donnés par les équations (4) sont les seuls qui composent le mouvement général.

5. *Propriétés des mouvements simples.* — Les équations qui donnent, dans un mouvement simple, la vitesse et la condensation, sont les suivantes

$$(20) \qquad \begin{cases} v = \frac{d\varphi}{dx} = -(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)\frac{\lambda}{a}\sin\frac{\lambda x}{a}, \\ v' = \frac{d\varphi'}{dx'} = -(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)\frac{\lambda}{a'}\left(\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda x'}{a'} + \frac{a'}{a}\frac{S}{S'}\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda x'}{a'}\right), \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} s = -\dfrac{\lambda}{a^2}(A\cos\lambda t - B\sin\lambda t)\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ s' = -\dfrac{\lambda}{a^2}(A\cos\lambda t - B\sin\lambda t)\left(\cos\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'} - \dfrac{a'}{a}\dfrac{S}{S'}\sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}\right). \end{cases}$$

Ces équations montrent que ce mouvement est périodique, le temps T de la période est

$$T = \frac{2\pi}{\lambda};$$

par suite, le nombre de vibrations doubles par seconde est

$$(22)\qquad N = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Pour avoir le son *fondamental* de l'appareil, il faut chercher la plus petite racine de l'équation (12)

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tg}\frac{\lambda l'}{a'} = \frac{a}{a'}\frac{S'}{S}.$$

Sans résoudre cette équation, nous voyons que :

1° λ augmente si S′ augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est la troisième loi de Pinaud ;

2° λ diminue si S augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est la seconde loi de Pinaud ;

3° λ diminue si l' augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est la première loi de Pinaud ;

4° λ diminue si l augmente, toutes choses égales d'ailleurs, c'est un résultat conforme à la seconde loi de Pinaud.

Nous pouvons maintenant remarquer que le second membre est petit, parce que $\frac{S'}{S}$ est une petite fraction ; donc $\frac{\lambda l}{a}$, $\frac{\lambda l'}{a'}$ sont de petits arcs ; donc on peut poser approximativement

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda l}{a} = \frac{\lambda l}{a} + \frac{1}{3}\frac{\lambda^3 l^3}{a^3},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\lambda l'}{a'} = \frac{\lambda l'}{a'} + \frac{1}{3}\frac{\lambda^3 l'^3}{a'^3};$$

par suite

$$\frac{ll'}{aa'}\left[\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\right] = \frac{a}{a'}\frac{S'}{S}.$$

Nous avons donc, pour déterminer λ, l'équation

$$\lambda^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\lambda^4 = a^2\frac{S'}{Vl'},$$

V étant le volume Sl du réservoir. De là on tire approximativement la formule

$$\lambda^2 = a^2 \frac{S'}{Vl'} - \frac{1}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\frac{a^4 S'^2}{V^2 l'^2};$$

d'où enfin

$$(23) \qquad N = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S'}{Vl'} - \frac{1}{3}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{l'^2}{a'^2}\right)\frac{a^2 S'^2}{V^2 l'^2}}.$$

Si on néglige encore la seconde partie du radical, on obtient la formule plus simple de M. Sondhaus

$$(24) \qquad N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S'}{Vl'}}.$$

Si nous prenons pour a la vitesse 333^m, nous trouvons

$$\frac{a}{2\pi} = 52{,}8.$$

On voit donc que, si nous prenons pour a une vitesse légèrement plus faible que la vitesse à l'air libre, nous retombons précisément sur la constante de M. Sondhaus 52,2. Ce résultat nous semble confirmer d'une manière remarquable la justesse de notre théorie.

D'ailleurs, on voit par la formule (23) que N est plus faible que le résultat $\frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S'}{Vl}}$; donc il n'est pas étonnant que M. Sondhaus, déterminant par expérience la constante C de la formule

$$N = C\sqrt{\frac{S'}{Vl'}},$$

ait trouvé un nombre plus faible que $\frac{a}{2\pi}$.

En prenant les expériences de M. Sondhaus, j'ai vérifié que le second terme du radical de la formule (23) est insensible ; on peut donc, au point de vue physique, s'en tenir à la formule (24).

6. La formule (24) montre que, si l' est réduit à moitié, N est multiplié par $\sqrt{2} = 1{,}414$; donc la note rendue par le tube réduit à moitié serait un *fa* ♯ par rapport à la note primitive considérée comme un *ut*. Pinaud a toujours trouvé la quinte, et par suite le rapport 1,5 à la place du rapport 1,41. Voici le résumé de ses expériences.

EXPÉRIENCES DE PINAUD

Première expérience.

Longueur du tube l	Notes entendues		Notes données par la formule de Sondhaus
6 pouces	ut	1	1
5 —	ré?	1,122	1,058
4 —	mi	1,259	1,225
3 —	sol	1,498	1,414
2 —	si	1,888	1,732

Deuxième expérience.

8 —	ut	1	1
6 —	mi♭	1,189	1,154
4 —	sol	1,498	1,414

Troisième expérience.

Longueur du tube l'	Notes entendues		Notes données par la formule de Sondhaus
12 pouces	ut	1	1
10 —	ré?	1,122	1,058
9 —	mi♭	1,189	1,154

Sixième expérience.

9 —	ut	1	1
8 —	ut# haut	1,080	1,060
6 —	mi	1,259	1,225
4,5 —	sol	1,498	1,414
3 —	si	1,888	1,732

Ces expériences montrent nettement que la formule de M. Sondhaus n'est encore qu'une formule approximative, et il y a ceci de remarquable que l'intervalle théorique est toujours plus faible que l'intervalle observé. On explique cette anomalie comme nous avons expliqué les perturbations observées par Wertheim dans les tuyaux sonores (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXIII, p. 1203).

L'équation aux dérivées partielles que nous avons intégrée doit être corrigée d'un terme, et tout se passe alors comme si *les carrés des nombres de vibrations étaient diminués d'une quantité constante*. De cette loi résulte que l'intervalle de deux sons est plus grand que celui qui est donné par la théorie, où n'intervient pas ce terme perturbateur.

TUYAUX A RENFLEMENT PORTANT DEUX TUBES

7. Imaginons un premier tube étroit de section S et de longueur l, désignons-le par AB. A la suite, sur le même axe, se trouve un tube plus large BC de section S′ et de longueur l'. Enfin, à la suite, sur le même axe, se trouve un tube CD de section S″ et de longueur l''. L'appareil est ouvert aux deux extrémités. Après avoir chauffé le réservoir, on le laisse refroidir, l'air rentre par les deux tubes étroits, un mouvement vibratoire s'établit dans l'appareil, on demande les lois de ce mouvement.

Nous désignerons par x la distance au point A d'un point quelconque de AB, par x' la distance au point B d'un point quelconque de BC, par x'' la distance au point C d'un point quelconque de CD.

Les équations différentielles du mouvement sont

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2\varphi'}{dt^2} = a'^2 \dfrac{d^2\varphi'}{dx'^2}, \\ \dfrac{a^2\varphi''}{dt^2} = a''^2 \dfrac{d^2\varphi''}{dx''^2}. \end{cases}$$

Il faut intégrer ces équations en satisfaisant à des conditions initiales arbitraires et aux conditions aux limites suivantes pour les extrémités et les deux points intérieurs B et C, où il ne doit pas y avoir discontinuité.

8. *Conditions aux limites :*

1° Au point A, où $x = 0$, on doit avoir

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{26}$$

2° Au point B, où $x = l$ et $x' = 0$, on doit avoir

$$\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt} \quad \text{et} \quad S\frac{d\varphi}{dx} = S'\frac{d\varphi'}{dx'}. \tag{27}$$

3° Au point C, où $x' = l'$ et $x'' = 0$, on doit avoir

$$\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt} = \frac{1}{a''^2} \quad \text{et} \quad S'\frac{d\varphi'}{dx'} = S''\frac{d\varphi''}{dx''}. \tag{28}$$

4° Au point D, où $x'' = l''$, on doit avoir

$$\frac{d\varphi''}{dt} = 0. \tag{29}$$

9. *Intégrales particulières.* — On peut satisfaire aux équations (25) et aux conditions aux limites précédentes, en posant

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= (A \sin \lambda t + B \cos \lambda t)\, u, \\ \varphi' &= (A \sin \lambda t + B \cos \lambda t)\, u', \\ \varphi'' &= (A \sin \lambda t + B \cos \lambda t)\, u''. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Les fonctions u, u', u'' satisfont aux équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}\, u &= 0, \\ \frac{d^2u'}{dx'^2} + \frac{\lambda^2}{a'^2}\, u' &= 0, \\ \frac{d^2u''}{dx''^2} + \frac{\lambda^2}{a''^2}\, u'' &= 0\,; \end{aligned}\right. \tag{31}$$

par suite, elles sont de la forme

$$\left\{\begin{aligned} u &= P \sin\frac{\lambda x}{a} + Q \cos\frac{\lambda x}{a}, \\ u' &= P' \sin\frac{\lambda x'}{a'} + Q' \cos\frac{\lambda x'}{a'}, \\ u'' &= P'' \sin\frac{\lambda x''}{a''} + Q'' \cos\frac{\lambda x''}{a''}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

A, B, P, Q, P′, Q′, P″, Q″, λ sont des constantes arbitraires.

Exprimons maintenant que les intégrales (30) satisfont aux conditions aux limites (26), (27), (28), (29), nous obtiendrons les relations suivantes

$$(33)\quad \begin{cases} \text{P quelconque,} \qquad Q = 0, \\ \frac{1}{a^2}\left(P \sin\frac{\lambda l}{a} + Q \cos\frac{\lambda l}{a}\right) = \frac{1}{a'^2} Q', \\ \frac{S}{a}\left(P \cos\frac{\lambda l}{a} - Q \sin\frac{\lambda l}{a}\right) = \frac{S'}{a'} P', \\ \frac{1}{a'^2}\left(P' \sin\frac{\lambda l'}{a'} + Q' \cos\frac{\lambda l'}{a'}\right) = \frac{1}{a''^2} Q'', \\ \frac{S'}{a'}\left(P' \cos\frac{\lambda l'}{a'} - Q' \sin\frac{\lambda l'}{a'}\right) = \frac{S''}{a''} P'', \\ P'' \sin\frac{\lambda l''}{a''} + Q'' \cos\frac{\lambda l''}{a''} = 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons

$$(34)\qquad P = 1, \qquad Q = 0,$$

$$(35)\qquad P' = \frac{a'}{a}\frac{S}{S'}\cos\frac{\lambda l}{a}, \quad Q' = \frac{a'^2}{a^2}\sin\frac{\lambda l}{a},$$

$$(36)\quad \begin{cases} P'' = \frac{a''}{a}\frac{S}{S''}\cos\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'} - \frac{a'a''}{a^2}\frac{S'}{S''}\sin\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}, \\ Q'' = \frac{a''^2}{aa'}\frac{S}{S'}\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'} + \frac{a'^2}{a^2}\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}, \end{cases}$$

$$37)\quad \frac{1}{aS}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a} + \frac{1}{a'S'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'} + \frac{1}{a''S''}\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''} - \frac{a'}{aa''}\frac{S'}{SS''}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''} = 0.$$

L'équation (37) fait connaître λ, et les équations précédentes donnent P, Q, P', Q', P'', Q''. Il ne reste d'arbitraires que les constantes A et B.

10. *Son fondamental de l'appareil.* — Le son fondamental de l'appareil, d'après les formules (30), sera donné par la formule

$$(38)\qquad N = \frac{\lambda}{2\pi},$$

N désignant le nombre des vibrations doubles et λ la plus petite racine de l'équation (37).

Dans l'équation (37) remplaçons les tangentes par les arcs, elle donnera, après quelques réductions faciles,

$$\lambda^2 = \frac{\frac{a^2 S}{l} + \frac{a''^2 S''}{l''} + \frac{a^2 a''^2}{a'^2}\frac{l'^2}{l^2 l''^2}\frac{VV''}{V'}}{V'}.$$

Mais les valeurs de a, a', a'' sont peu différentes, supposons-les égales, la formule donnera

$$\frac{\lambda^2}{a^2} = \frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''} + \frac{l'^2}{l^2 l''^2}\frac{VV''}{V'}}{V'}.$$

Mais le dernier terme du numérateur est très-petit, et peut encore être négligé ; nous obtenons donc enfin

$$\lambda = a\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'}};$$

par suite

$$N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'}}. \tag{39}$$

Or cette formule est précisément celle de M. Sondhaus; et la constante $\frac{a}{2\pi}$ est à peu près égale à 52,2, en prenant 332^m pour vitesse du son.

11. Nous démontrerons aisément, en suivant une marche analogue à celle que nous avons déjà suivie pour le cas des tubes de Pinaud, que l'intégrale générale peut être regardée comme la somme d'un nombre fini ou infini d'intégrales simples, de la forme (30). D'ailleurs cette question de pure analyse est sans importance pour la question physique que nous traitons, puisque nous cherchons les lois du son fondamental qui correspond à un mouvement simple.

12. On peut imaginer un appareil plus compliqué, qui serait formé d'une suite de tubes étroits, séparés par un renflement; notre analyse s'étendrait facilement à l'étude des lois du son donné par un pareil ensemble. Admettons, par exemple, que nous ayons trois tubes et deux réservoirs; appelons

$$l,\ l',\ l'',\ l''',\ l^{\text{v}}$$

les longueurs successives de ces tubes ou réservoirs,

$$S,\ S',\ S'',\ S''',\ S^{\text{v}}$$

leurs sections,

$$V',\ V'''$$

les volumes des réservoirs; nous trouverions, pour l'équation transcendante donnant λ,

$$\begin{aligned}
&\frac{T}{S} + \frac{T'}{S'} + \frac{T''}{S''} + \frac{T'''}{S'''} + \frac{T^{\text{v}}}{S^{\text{v}}} - \frac{S'}{SS^{\text{v}}}TT'T^{\text{v}} - \frac{S''}{S'S^{\text{v}}}TT''T^{\text{v}} - \frac{S''}{SS^{\text{v}}}TT''T^{\text{v}} \\
&- \frac{S'''}{S''S^{\text{v}}}T''T'''T^{\text{v}} - \frac{S'''}{S'S^{\text{v}}}T'T'''T^{\text{v}} - \frac{S'''}{SS^{\text{v}}}TT'''T^{\text{v}} - \frac{S'}{SS'''}TT'T''' \\
&- \frac{S''}{S'S'''}T'T''T''' - \frac{S''}{SS'''}TT''T''' - \frac{S'}{SS''}TT'T'' + \frac{S'S'''}{SS''S^{\text{v}}}TT'T''T'''T^{\text{v}} = 0,
\end{aligned}$$

en admettant, pour plus de simplicité, que

$$a = a' = a'' = a''' = a^{\text{iv}},$$

et en appelant, pour abréger,

$$T,\ T',\ T'',\ T''',\ T^{\text{iv}}$$

les tangentes des arcs

$$\frac{\lambda l}{a},\ \frac{\lambda l'}{a},\ \frac{\lambda l''}{a},\ \frac{\lambda l'''}{a},\ \frac{\lambda l^{\text{iv}}}{a}.$$

Remplaçons maintenant les tangentes par les arcs, et négligeons les quantités petites. En supposant S, S'', S^iv petits par rapport à S' et S'''; l, l'', l^{iv} grands par rapport à l' et l''', nous aurons simplement

$$\frac{\lambda^2}{a^2} = \frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'} + \frac{\frac{S''}{l''} + \frac{S^{\text{iv}}}{l^{\text{iv}}}}{V''},$$

d'où

$$(40) \qquad N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V'} + \frac{\frac{S''}{l''} + \frac{S^{\text{iv}}}{l^{\text{iv}}}}{V''}}.$$

Cette formule est une généralisation de celle de M. Sondhaus, et la comprend comme cas particulier.

12. Si l'on suppose, en particulier,

$$\frac{S}{l} = \frac{S^{\text{iv}}}{l^{\text{iv}}} \quad \text{et} \quad V' = V''',$$

on trouve

$$N = \frac{a}{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\frac{S}{l} + \frac{S''}{l''}}{V}};$$

donc le son rendu par ce nouvel appareil sera un *fa* # relativement à celui que rend l'appareil de M. Sondhaus.

Si nous supposons

$$\frac{S}{l} = \frac{S'}{l'} = \frac{S''}{l''} = \frac{S'''}{l'''} \quad \text{et} \quad V' = V''',$$

nous trouvons

$$N = 2\frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl}};$$

donc *le son rendu par notre nouvel appareil serait l'octave de celui que rendrait un tube fixé à l'extrémité d'une boule de l'appareil.*

13. Nous ne croyons pas que l'appareil à trois ou quatre tubes fixés à un même réservoir soit une généralisation de celui que nous avons étudié, et l'incertitude des expériences de M. Sondhaus sur cet appareil compliqué semble confirmer notre opinion.

14. Dans un autre mémoire, nous étudierons les formules qu'il a données pour les tuyaux cubiques, c'est-à-dire pour les tuyaux dont le diamètre est comparable à la longueur, de telle sorte qu'il est impossible d'admettre, sans erreur, que les divers points d'une même tranche perpendiculaire à l'axe aient le même mouvement vibratoire.

Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe; par M. Laguerre.

(Séance du 5 février 1873)

1. J'appellerai simplement *biquadratique sphérique* la courbe qui résulte de l'intersection d'une sphère S et d'une surface du second ordre.

On peut aussi la considérer à un autre point de vue (*). Soit une conique quelconque K ; la développable, circonscrite à cette conique et à la sphère S, touche cette sphère le long d'une courbe qui est, comme on le sait, la biquadratique sphérique. Cette développable a d'ailleurs, indépendamment de la conique K, 3 autres lignes doubles K_1, K_2 et K_3, qui sont également des coniques et qui jouent, par rapport à la courbe, exactement le même rôle.

2. Une biquadratique sphérique à 16 foyers ordinaires ; c'est-à-dire qu'il y existe 4 génératrices de la sphère de chacun des systèmes (*droites isotropes*), qui sont tangentes à la courbe. Leurs intersections mutuelles déterminent ses 16 foyers *ordinaires;* il est clair d'ailleurs que, la biquadratique étant supposée réelle, 4 de ces foyers sont réels et déterminent complétement tous les autres.

Dans ce qui suit, je désignerai par F, F_1, F_2 et F_3 ces 4 foyers réels. Les 16 foyers sont aussi, comme on le voit facilement, les points d'intersection de la sphère avec les coniques K, K_1, K_2 et K_3

D'où il résulte que les foyers réels peuvent être situés tous les 4 sur l'une de ces coniques, ou être distribués 2 par 2 sur 2 d'entre elles ; à ce point de vue, nous distinguerons donc deux classes de biquadratiques, celles de

(*) Voir *Bulletin de la Société philomathique*, mars 1867, ma note *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du second ordre.*

première classe où les foyers réels appartiennent à la même conique, celles de seconde classe où ils sont répartis entre deux coniques.

3. Soit M un point de la sphère S; on sait que par ce point passent deux biquadratiques ayant pour foyers les points F, F_1, F_2 et F_3, et que ces deux courbes se coupent à angle droit.

Pour construire les tangentes en ce point, je distinguerai deux cas :

1° Si la biquadratique est de première espèce, menons un plan par le point M et 2 quelconques des foyers réels, et un second plan par ce même point et les 2 autres foyers.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *et* Mt' *les traces de ces plans sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* t'Mt *sont les tangentes aux biquadratiques qui se croisent au point* M.

2° Si la biquadratique est de seconde espèce, appelons F et F_1 les foyers qui se trouvent sur une des coniques, F_2 et F_3 ceux qui se trouvent sur une deuxième conique, et menons respectivement des plans par le point M et les droites FF_1, F_2F_3.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *la trace du premier plan et par* Mt' *une droite perpendiculaire à la trace du second sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* t'Mt *sont les tangentes aux deux biquadratiques qui se croisent au point* M.

4. Ayant ainsi déterminé les tangentes aux biquadratiques qui passent par un point de la sphère, proposons-nous de construire pour l'une d'entre elles le plan osculateur.

A cet effet, je rappellerai une notion géométrique dont je me suis déjà servi dans une note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en février 1867.

Soit M un point de l'espace, et A_1, A_2, ..., A_n, n autres points donnés; déterminons un second point N par la relation suivante

$$\frac{n}{MN} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MA_2} + \dots + \frac{1}{MA_n},$$

où $\frac{1}{MN}$, $\frac{1}{MA_1}$, ... ne désignent pas les inverses des longueurs MN, MA_1, ..., mais bien des *quantités géométriques* égales à ces inverses en valeur absolue, et portées dans les directions des droites joignant M aux points N, A_1, ..., en sorte que ces quantités se composent comme des forces.

En donnant plus d'extension à la dénomination bien connue due à Maclaurin, nous dirons que le point N, déterminé comme je viens de le dire, est le centre harmonique du point M relativement aux points A_1, A_2, ..., A_n.

On peut remarquer, à ce sujet, que si les points M, A_1, A_2, ... sont sur une même sphère, il en sera de même du point N.

Cette définition étant admise, on a ce théorème :

En un point quelconque M *d'une biquadratique sphérique, le plan osculateur passe par le centre harmonique du point* M *par rapport aux* 4 *foyers réels de la courbe.*

On en déduit la construction suivante :

La tangente au point M *ayant été déterminée comme je l'ai dit précédemment, par* M *et les foyers* F *et* F_1 *faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point* φ *conjugué harmonique de* M *par rapport à* F *et* F_1*; par* M *et les* 2 *autres foyers faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point* φ' *conjugué harmonique de* M *par rapport à ces deux foyers. Faisons enfin passer un cercle par les trois points* M, φ *et* φ'*; le point* μ *de ce cercle, conjugue harmonique de* M *par rapport à* φ *et* φ'*, déterminera avec la tangente le plan osculateur de la courbe au point* M.

5. La conique sphérique est un cas particulier de la biquadratique; les 4 foyers réels sont respectivement les points d'intersection F et F_1, F_2 et F_3 de la sphère avec les deux focales réelles du cône du second degré dont elle est la base.

La construction précédente se simplifie alors un peu; en effet, les points F et F_1 étant alors diamétralement opposés, le conjugué harmonique de M par rapport à ces deux points est le second point où la sphère est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de M sur la focale FF_1. La même chose a lieu pour les 2 autres foyers.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donné un point M *sur une conique sphérique, si de ce point on abaisse sur les deux focales réelles de la courbe des perpendiculaires rencontrant la sphère en* m *et* m'*, le plan osculateur de la courbe au point* M *passe par le conjugué harmonique de ce point relativement aux points* m *et* m'.

6. Il est presque inutile de faire remarquer que les propositions précédentes s'appliquent aux coniques et aux courbe planes (*anallagmatiques* du 4me ordre) qui sont les projections stéréographiques des biquadratiques sphériques.

Relativement à ces dernières courbes, on a le théorème suivant :

En un point quelconque M *d'une anallagmatique du* 4me *ordre, le cercle osculateur passe par le centre harmonique du point* M *relativement aux* 4 *foyers réels de la courbe.*

7. J'ajouterai quelques mots sur le problème analogue qui est relatif aux surfaces (*anallagmatiques du* 4me *ordre*) qui, dans l'espace, correspondent aux biquadratiques sphériques.

Ces surfaces, d'après un beau théorème dû à M. Moutard, peuvent être considérées de 5 façons différentes comme l'enveloppe de sphères qui se déplacent en coupant orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre.

Les 5 surfaces du second ordre au moyen desquelles on peut décrire

ainsi la surface sont homofocales. Une normale menée en un point M de la surface anallagmatique rencontre chacune de ces surfaces en deux points dont l'un est conjugué du point M.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Quand une normale à une surface anallagmatique se déplace, le rapport anharmonique de 4 quelconques des 5 points conjugués où elle coupe les 5 surfaces homofocales demeure constant (*).

On déduit de là, comme on le voit facilement, une construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique, en s'appuyant sur cette propriété bien connue, que les normales en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure sont dans un même plan, et en employant le théorème de Brianchon.

Mais le problème est susceptible d'une solution plus élégante reposant sur des considérations très-générales que j'ai données dans une note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques, etc.*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en décembre 1871.

Cette solution se déduit de la proposition très-simple qui suit.

Appelons centre d'une surface anallagmatique le centre C commun aux 5 surfaces du second ordre homofocales qui permettent de la décrire.

Cela posé :

Étant donnée une droite quelconque MT *touchant une anallagmatique au point* M, *cette tangente rencontre de nouveau la surface en deux points; désignons par* I *le milieu de la droite joignant les centres des sphères qui touchent la surface en ces points et passent par* M. *Si, par le point* M, *on mène une droite parallèle à* IC, *dirigée dans le même sens et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans la surface par le plan normal passant par* MT.

Extrait d'une lettre adressée à M. Chasles par M. le Dr O. J. Broch.

(Séance du 19 février 1873)

J'ai eu l'honneur de recevoir votre lettre du 26 décembre 1872, dans laquelle, au nom de la Société mathématique de France, vous appuyez le projet dont on s'est occupé à notre Société des sciences de Christiania, d'une nouvelle édition des œuvres d'Abel.

(*) J'ai communiqué verbalement ce théorème à la Société philomathique en mai 1868, et précisément dans le but d'en déduire la construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique. Depuis, M. Darboux l'a obtenu de son côté et en a développé les principales conséquences dans un *Mémoire sur la cyclide* inséré aux *Annales de l'École normale supérieure*, 1872.

Je vous en remercie beaucoup; elle prêtera plus de force à la proposition, qu'avec mes collègues dans les sciences mathématiques à l'Université, j'ai eu l'honneur de faire. La proposition a été acceptée à l'unanimité par notre Société dans la séance d'avant-hier, et est maintenant chez M. le ministre de l'instruction publique. Je n'ai pas de doute qu'elle sera appuyée par lui et que la somme nécessaire sera portée sur le budget qu'on va soumettre au Storthing.

Ce qu'on désire faire n'est pas une simple réimpression des œuvres d'Abel, mais bien une nouvelle édition revisée et augmentée. Plusieurs des mémoires d'Abel étaient d'abord écrits en français, langue plus familière à lui, dans ce temps, que la langue allemande. Pour être insérés dans le journal de M. Crelle, ils étaient traduits en allemand par l'éditeur, plus tard ami intime d'Abel. De là ils ont été traduits de nouveau en français par M. Holmboe, l'éditeur des œuvres complètes d'Abel. Or les manuscrits originaux en français, au moins en grande partie, se trouvent encore à Berlin, et l'on en fera usage pour l'édition revisée.

Outre les deux mémoires dont vous faites mention, qui font défaut dans l'édition actuelle, et dont le principal n'avait pas paru à ce temps-là, se trouvant encore entre les mains de M. Libri, il y en a encore quelques autres, d'une valeur moindre, mais dont un a un certain intérêt historique. C'est le premier mémoire d'Abel sur les équations algébriques, en 8 pages, imprimé en français à Christiania, en 1824, dont il n'existe actuellement qu'un tout petit nombre d'exemplaires. Je crois même en être le seul propriétaire en Norvége. C'est ce mémoire qui a paru si obscur à M. Gauss, qu'en le recevant de la part de l'auteur, jusque-là inconnu, par l'intermédiaire de M. Hansteen, notre savant distingué dans le magnétisme terrestre et l'ami de M. Gauss, il lui répondait qu'il espérait bientôt le réfuter en donnant la résolution algébrique des équations du cinquième degré.

On se propose de faire accompagner l'édition nouvelle, augmentée et revisée, de notes nouvelles rédigées en collaboration avec les mathématiciens étrangers les plus distingués dans la partie des mathématiques dont le fondement a été jeté par notre illustre compatriote.

M. Sylow, professeur de mathématiques au lycée de Fredrikshall, et M. Lie, professeur de mathématiques à l'université de Christiania, seront chargés de l'édition nouvelle.

Christiania, 20 janvier 1873.

Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace;
par M. A. Mannheim.

(Séance du 19 février 1873)

On s'est surtout occupé jusqu'à présent d'étudier le déplacement d'une droite sur un plan ; on sait que, dans ce cas, à un instant quelconque du déplacement, les tangentes aux trajectoires de tous les points de la droite enveloppent une parabole, et que les centres de courbure de ces trajectoires appartiennent à une conique. On sait aussi qu'il existe, en général, deux points de la droite qui sont des points d'inflexion sur leurs trajectoires.

Je me propose maintenant d'étudier ce qui est relatif au déplacement d'une droite dans l'espace.

Les propriétés des trajectoires des points d'une droite mobile sont les propriétés d'une certaine série de courbes tracées sur la surface engendrée par cette droite. Ces courbes sont telles, que deux quelconques d'entre elles interceptent des segments égaux sur toutes les génératrices de cette surface. Elles peuvent être généralisées en considérant les courbes tracées sur une surface réglée, et qui déterminent des divisions homographiques sur toutes les génératrices de cette surface. Quelques-unes des propriétés des trajectoires des points d'une droite s'étendent immédiatement à ces courbes plus générales.

Désignons par D la droite mobile, et par (D) la surface réglée engendrée par cette droite. La génératrice D peut être amenée, d'une infinité de manières, à coïncider avec la génératrice D_1, qui lui est infiniment voisine; car un point a marqué sur D peut être assujetti à décrire sur (D), à partir de la position qu'il occupe, une infinité de courbes. A chacune des directions qu'on peut ainsi faire suivre à a correspond pour la droite D un axe instantané Δ qui est une droite conjuguée de D ; excepté lorsque la trajectoire du point a est normale à D.

Considérons en particulier une trajectoire de a qui ne soit pas normale à D. A chaque instant du déplacement de D, nous aurons une droite telle que Δ. Ces droites appartiennent à une surface (Δ). Les droites entraînées en même temps que D, et qui deviennent successivement des axes instantanés, c'est-à-dire des génératrices de (Δ), appartiennent à une autre surface gauche. Il est facile de voir que cette dernière surface roule sur (Δ) pendant le déplacement continu de D, et qu'à chaque instant elle se raccorde avec (Δ).

A chacune des trajectoires de a correspond une autre surface telle que (Δ). Nous avons donc ce théorème connu :

Théorème I. — *Une surface réglée peut être engendrée d'une infinité de*

manières par une de ses génératrices entraînée pendant le roulement d'une surface réglée sur une autre surface réglée. A chaque instant, ces deux dernières surfaces se raccordent suivant un axe instantané.

Puisque a, pour un déplacement infiniment petit, tourne autour de Δ, la tangente à la trajectoire de ce point est perpendiculaire au plan (a, Δ). Cette tangente rencontre D et la génératrice D_1 infiniment voisine de D; elle rencontre donc deux droites et est parallèle à un plan perpendiculaire à Δ. Il en est de même des tangentes aux trajectoires de tous les points de D. Ces droites appartiennent donc à un paraboloïde hyperbolique. On voit donc que :

Théorème II. — *Les tangentes aux trajectoires de tous les points d'une droite* D *appartiennent à un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est perpendiculaire à la droite* Δ, *conjuguée de* D (*).

Après un premier déplacement infiniment petit de D, le point a est venu en a_1 sur D_1, et la droite aa_1 est une génératrice de ce paraboloïde. Après un nouveau déplacement infiniment petit, a_1 vient en a_2 sur D_2, et la droite $a_1 a_2$ est la génératrice d'un autre paraboloïde. Ces deux paraboloïdes ont en commun la droite D_1. Le plan (a, a_1, a_2), qui contient les droites aa_1, a_1a_2, est tangent à chacun de ces paraboloïdes. Ce plan n'est autre que le plan osculateur en a à la trajectoire de ce point. Les plans osculateurs des autres points de D étant tangents aux mêmes paraboloïdes, leur enveloppe est la surface développable circonscrite à deux paraboloïdes ayant une génératrice commune, c'est-à-dire une développable du quatrième ordre et de la troisième classe. Ainsi :

Théorème III. — *A un instant quelconque du déplacement d'une droite* D, *les plans osculateurs des trajectoires des points de cette droite enveloppent une surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe.*

Ce théorème est un cas particulier de celui qu'on obtient en prenant le corrélatif du théorème suivant :

Quand, autour de trois droites données dans l'espace, on fait tourner trois plans formant trois faisceaux homographiques, le point d'intersection de ces trois plans décrit une courbe gauche du troisième ordre (**).

Mais il est essentiel de remarquer que, dans le cas du déplacement d'une droite D, le plan osculateur, correspondant à la trajectoire du point qui est à l'infini sur cette droite, est lui-même à l'infini.

Nous avons déjà dit que la tangente aa_1 à la trajectoire de a est perpendiculaire au plan (a, Δ). Il en est de même pour tous les points de D, c'est-à-

(*) Voir, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, séance du 26 juin 1843, le mémoire de M. Chasles *Sur les propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.*

(**) Voir, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, séance du 10 août 1857, le mémoire de M. Chasles *Sur les propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre.*

dire que les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passent par Δ. Les plans passant par les points de D et par la droite Δ', qui doit devenir l'axe instantané, sont les plans qui, après un déplacement infiniment petit, seront normaux aux trajectoires des points de D. Nous avons ainsi deux faisceaux de plans dont les arêtes sont Δ et Δ'. Les plans de ces faisceaux passant respectivement par les mêmes points de D sont homographiques. Lorsque la droite Δ' viendra en Δ_1 en entraînant le faisceau dont elle est l'arête, les plans de ce faisceau, après ce déplacement, couperont alors les plans du faisceau dont Δ est l'arête, suivant les axes de courbure des trajectoires des points de D. Ces axes de courbure, résultant de l'intersection des plans de deux faisceaux homographiques, appartiennent à une surface du second ordre qui contient Δ et O_1, c'est-à-dire qui se raccorde avec la surface (O). De là ce théorème :

Théorème IV. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite, les axes de courbure des trajectoires de tous les points de cette droite appartiennent à une surface du second ordre* (*).

Je dis que cette surface du second ordre est un hyperboloïde. Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'en général il n'y a pas de point sur D pour lequel l'axe de courbure de sa trajectoire soit à l'infini; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point de D qui soit un point d'inflexion sur sa trajectoire. Démontrons d'abord cette propriété.

Si un point a de D était un point d'inflexion sur sa trajectoire, les deux positions successives et infiniment voisines de a, c'est-à-dire a_1 et a_2, appartiendraient avec a à une même droite. Nous avons dit que aa_1 était parallèle à un plan perpendiculaire à Δ, et que a_1a_2 était parallèle à un plan perpendiculaire à Δ_1 : la droite aa_1a_2, si elle existait, devrait donc être parallèle à l'intersection de ces deux plans; mais le plan mené par la droite commune à nos deux paraboloïdes, parallèlement à cette droite d'intersection de leurs plans directeurs, ne touche pas nécessairement ces deux paraboloïdes au même point a. Cela devrait être pour avoir en ligne droite les points a, a_1, a_2. Donc il n'existe pas de point a qui soit un point d'inflexion sur sa trajectoire. Ainsi :

Théorème V. — *En général, il n'y a pas sur une droite mobile un point qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire.*

Le raisonnement que nous venons d'employer n'est plus applicable lorsqu'il s'agit du déplacement d'une droite sur un plan.

Le théorème V peut encore se démontrer de la manière suivante : s'il existe un point a sur D qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire, ce point doit se déplacer dans la direction de l'asymptote de l'indicatrice de (D) en a. La tangente à la trajectoire de ce point est donc nécessairement parallèle

(*) Voir, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, séance du 25 juin 1870, une note de M. Haag.

à l'une des génératrices du cône directeur de l'hyperboloïde osculateur de (D) suivant D. Nous venons de dire que la tangente à la trajectoire d'un point qui est point d'inflexion sur sa trajectoire est parallèle à l'intersection de deux certains plans. Comme nous pouvons disposer de ces plans de façon que leur droite d'intersection ne soit pas parallèle à l'une des génératrices du cône dont je viens de parler, nous voyons bien qu'alors il n'y aura pas de point sur D qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire.

Et si nous revenons à la surface du deuxième ordre, lieu des axes de courbure des trajectoires des points de D, nous pouvons dire que, ces axes étant à distance finie, *cette surface est un hyperboloïde.*

Cet hyperboloïde a pour cône directeur un cône du second ordre, dont les génératrices sont respectivement parallèles à ces axes de courbure et, par suite, perpendiculaires aux plans osculateurs des trajectoires des points de D. Il résulte de là que :

Théorème VI. — *Si, d'un point de l'espace, on mène des plans parallèles aux plans osculateurs des trajectoires de tous les points d'une droite, ces plans enveloppent un cône du second ordre;* ou, en d'autres termes, *la développable du quatrième ordre, qui est l'enveloppe des plans osculateurs des trajectoires de tous les points d'une droite, a un cône directeur qui est du second ordre.*

Examinons le cas particulier où un point de D est un point d'inflexion sur sa trajectoire.

L'axe de courbure correspondant à ce point est alors à l'infini, et l'hyperboloïde des axes de courbure des points de D devient un paraboloïde. Les axes de courbure appartenant maintenant à un paraboloïde sont parallèles à un même plan. Les plans osculateurs des trajectoires des points de D étant respectivement perpendiculaires à ces axes de courbure sont parallèles à une même droite ; ils enveloppent alors une surface cylindrique. Ainsi :

Théorème VII. — *Si, à un instant quelconque du déplacement d'une droite, un point de cette droite est un point d'inflexion sur sa trajectoire, les plans osculateurs des trajectoires de tous les points de la droite mobile enveloppent une surface cylindrique.*

Cette circonstance se présente constamment si l'on assujettit un point d'une droite mobile à parcourir une ligne droite.

Lorsque deux points de la droite mobile sont points d'inflexion sur leurs trajectoires, il résulte de ce que nous venons de dire que les plans osculateurs des trajectoires de tous les points de la droite mobile sont parallèles entre eux. C'est ce qui arrive constamment lorsque deux points d'une droite décrivent deux droites données.

Il est facile de voir que, s'il y a sur la droite D plus de deux points qui soient points d'inflexion sur leurs trajectoires, tous les points de la droite D jouissent de la même propriété.

Occupons-nous maintenant des normales principales des trajectoires des points de D. Construisons la normale principale en a à la trajectoire de ce point. Cette droite est dans le plan (a, Δ) qui est normal en a à cette trajectoire. Ce plan normal coupe l'hyperboloïde des axes de courbure suivant l'axe de courbure relatif à cette trajectoire ; la normale principale est donc la perpendiculaire abaissée du point a sur cette droite.

L'hyperboloïde des axes de courbure, comme nous l'avons fait remarquer, contient Δ. Il sera donc défini en supposant données deux droites du même système que Δ. Appelons G et H ces deux droites. Pour construire une normale principale, on opère alors ainsi : par Δ on mène un plan quelconque ; ce plan coupe D au point a, G au point g et H au point h ; du point a on abaisse la perpendiculaire ac sur gh : la droite ac est la normale principale en a, et le pied de cette perpendiculaire est le centre de courbure de la trajectoire de ce point. Lorsque le plan que nous venons de mener par Δ tourne autour de cette droite, la droite ac engendre la surface des normales principales des trajectoires des points de D, et le point c décrit la courbe lieu des centres de courbure de ces trajectoires.

Occupons-nous d'abord de la surface formée par les normales principales. Je dis que le cône directeur de cette surface est du troisième ordre.

Prenons un point quelconque l sur Δ, et construisons le cône directeur de l'hyperboloïde des axes de courbure de façon qu'il ait son sommet en l. Ce cône, qui est du second ordre, contient Δ, et tout plan mené par cette droite le coupe suivant une seule génératrice. La perpendiculaire à cette génératrice, située dans ce plan sécant et menée du point l, est parallèle à l'une des normales principales. Le lieu des perpendiculaires ainsi construites constitue le cône directeur de la surface des normales principales.

On voit déjà que tout plan mené par Δ coupe ce cône suivant une droite; mais Δ, étant perpendiculaire à deux génératrices de l'hyperboloïde des axes de courbure, est une génératrice double sur ce cône directeur. Le plan sécant mené par Δ renferme une droite et la ligne double Δ ; donc le cône directeur est du troisième ordre. Ainsi :

Théorème VIII. — *Le cône directeur de la surface des normales principales des trajectoires de tous les points d'une droite est un cône du troisième ordre qui a une génératrice double.*

Menons le plan (l, D), ce plan coupe ce cône directeur suivant trois droites. Ces trois droites sont les normales principales que l'on peut construire à partir du point l. Puisqu'à partir d'un point quelconque de Δ on peut construire trois normales principales, la droite Δ est une droite triple de la surface des normales principales. Tout plan mené par Δ coupant, en outre, cette surface suivant une droite, on voit alors qu'elle est du quatrième ordre. Ainsi :

Théorème IX. — *La surface formée par les normales principales des trajectoires de tous les points d'une droite est une surface du quatrième ordre qui possède une droite triple.*

L'intersection de cette surface avec l'hyperboloïde des axes de courbure est la courbe des centres de courbure. On voit ainsi immédiatement que cette courbe est du cinquième ordre.

Nous allons arriver autrement à ce résultat. Considérons le point c comme sommet d'un angle droit dont l'un des côtés s'appuie sur D et Δ, l'autre côté sur G et H. Le point c appartient alors à une surface du quatrième ordre, qui contient les quatre droites D, Δ, G, H; car sur le côté gh de l'angle droit il y a deux points tels que c, et les points g, h font partie du lieu. Cette surface est donc du quatrième ordre, et, comme elle contient les trois droites Δ, G, H de l'hyperboloïde des axes de courbure, elle coupe cette surface suivant une courbe du cinquième ordre. Ainsi :

Théorème X. — *Le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est une courbe du cinquième ordre.*

Cette courbe rencontre le plan de l'infini en cinq points, dont un, toujours réel, est le centre de courbure de la trajectoire du point qui est à l'infini sur D. Les quatre points restants sur le plan de l'infini doivent être imaginaires, puisque nous avons vu qu'en général il n'y a pas, sur une droite, de point qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire. Ainsi, sur une droite quelconque, il y a quatre points imaginaires dont les trajectoires ont leurs centres de courbure à l'infini, et, par suite, dans un corps quelconque que l'on déplace, les points qui sont points d'inflexion sur leurs trajectoires appartiennent à une surface imaginaire du quatrième ordre. Si parmi ces points il y en a de réels, ils ne peuvent être que sur une ligne double de cette surface. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Théorème XI. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, les points de cette figure qui sont points d'inflexion sur leurs trajectoires appartiennent à une surface imaginaire du quatrième ordre, et, s'il existe des points réels de cette nature, ils sont sur une ligne double de cette surface.*

Remarquons que, s'il s'agit du mouvement d'un corps solide, les points dont nous nous occupons sont ceux pour lesquels l'accélération normale est nulle (*).

Reprenons notre droite mobile D et sa conjuguée Δ. Appelons toujours Δ' la droite qui, après un déplacement infiniment petit autour de Δ, deviendra le nouvel axe instantané Δ_1. Désignons par Δ'' la droite qui deviendra ensuite l'axe instantané Δ_2. Les plans passant par les points de D et par Δ', ainsi que les plans passant par les mêmes points de D et par Δ'' de-

(*) Voir, dans le 37e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, le mémoire de M. Resal *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide.*

viendront des plans normaux aux trajectoires de ces points lorsque Δ' et Δ'' seront venus en Δ_1 et Δ_2. Nous avons maintenant trois faisceaux dont les arêtes sont Δ, Δ', Δ'', et dont les plans passent par les points de D; ces faisceaux sont donc homographiques et ne cesseront pas d'être homographiques lorsque Δ' sera venu en Δ_1 et Δ'' en Δ_2. Nous aurons alors trois faisceaux homographiques dont les arêtes sont trois génératrices infiniment voisines de (Δ). Les plans correspondants se coupent en des points qui appartiennent à une cubique gauche.

Ces points, intersections de trois plans normaux infiniment voisins, sont les centres des sphères osculatrices des trajectoires des points de D. Nous pouvons donc dire :

Théorème XII. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite, les centres des sphères osculatrices des trajectoires de tous les points de cette droite sont sur une cubique gauche.*

On peut arriver à ce théorème en considérant les hyperboloïdes des axes de courbure des trajectoires des points de D pour deux instants infiniment rapprochés. Ces hyperboloïdes se coupent suivant Δ et la partie restante de leur intersection est la cubique gauche que nous venons de trouver.

Lorsque le centre de la sphère osculatrice d'une courbe est à l'infini, cette sphère se réduit à un plan qui n'est autre qu'un plan osculateur stationnaire. La cubique gauche dont nous venons de parler, rencontrant le plan de l'infini en trois points, on voit qu'il y a sur une droite trois points pour lesquels les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires. Nous énoncerons ainsi ce résultat :

Théorème XIII. — *Parmi les points d'une droite mobile, il y en a trois pour lesquels les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires.*

Il résulte de là que :

Théorème XIV. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, les points pour lesquels les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires sont sur une surface du troisième ordre.*

Ou, en employant le langage de la cinématique : *Dans un corps solide en mouvement, les points, pour lesquels la suraccélération binormale est nulle, sont sur une surface du troisième ordre.*

Les droites situées sur cette surface du troisième ordre sont telles, que les plans osculateurs des trajectoires de tous leurs points sont stationnaires, et comme il y a toujours une droite réelle sur une surface du troisième ordre, nous voyons que :

Théorème XV. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, il existe toujours une droite telle, que les plans osculateurs des trajectoires de tous ses points sont stationnaires.*

On peut remarquer aussi qu'une droite mobile sur laquelle il y a

quatre points tels, que les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires, est tout entière sur la surface du troisième ordre dont je viens de parler et, par suite, que les trajectoires de tous ses points possèdent aussi des plans osculateurs stationnaires.

On obtient immédiatement une pareille droite D en assujettissant quatre points de cette droite à rester sur quatre plans donnés. A un instant quelconque du déplacement de D, la trajectoire d'un point arbitraire pris sur cette droite aura un plan osculateur stationnaire, et, par suite, cette trajectoire sera plane.

Je dis de plus que cette courbe est une conique; pour le faire voir, supprimons l'un des plans sur lequel doit rester l'un des points de D. Cette droite D est alors telle, que trois de ses points restent sur trois plans donnés. Dans ces conditions, un point quelconque de la droite décrit une surface du second ordre (*).

Par suite, si la trajectoire de ce point est plane, elle est une section conique. Nous voyons donc que :

Théorème XVI. — *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une conique* (**).

Nous sommes arrivé à la cubique gauche, lieu des centres des sphères osculatrices, en prenant deux hyperboloïdes des axes de courbure.

Considérons un troisième hyperboloïde de même nature que ceux-ci et qui en est infiniment voisin. Les points de rencontre de cette surface avec la cubique gauche sont les centres des sphères osculatrices stationnaires. On a ainsi six points de rencontre : deux sur Δ et quatre autres. Les deux points sur Δ sont ceux pour lesquels l'hyperboloïde des axes de courbure est osculateur de la surface (Δ). Ils se distinguent donc des quatre autres et ils correspondent sur D à deux points qui se distinguent aussi parmi les six points de D pour lesquels on a des sphères osculatrices stationnaires. De là résultent les théorèmes suivants :

Théorème XVII. — *A chaque instant du déplacement continu d'une droite, il y a six points sur cette droite pour lesquels les sphères osculatrices de leurs trajectoires sont stationnaires.*

Théorème XVIII. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une figure de forme invariable, les points pour lesquels les sphères osculatrices de leurs trajectoires sont stationnaires appartiennent à un lieu qui se compose d'une surface du second ordre et d'une surface du quatrième ordre.*

Lorsque la droite mobile se déplace sur un plan, il n'y a plus à cher-

(*) Voir les *Développements de géométrie* de Ch. Dupin, et, dans le 14e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, un mémoire du même auteur.

(**) La droite mobile engendre une surface du quatrième ordre dont le cône directeur est de révolution.

cher de plans osculateurs stationnaires ou des sphères osculatrices stationnaires.

Mais on peut se demander combien il y a de points sur la droite pour lesquels les cercles osculateurs des trajectoires de ces points sont stationnaires, c'est-à-dire des points qui sont des sommets sur leurs trajectoires.

On arrive immédiatement à la solution de cette question, en faisant usage de cette propriété déjà énoncée précédemment : *Les centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite qui se déplace sur un plan sont sur une conique.*

En prenant deux coniques de la nature de celle-ci et infiniment voisines l'une de l'autre, on trouve que :

Théorème XIX. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite sur un plan, il y a quatre points de cette droite pour lesquels les cercles osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires;* ou, en d'autres termes, *qui sont des sommets sur leurs trajectoires.*

L'un de ces points se distingue des autres. C'est celui dont la trajectoire a pour centre de courbure le centre instantané de rotation qui est l'un des points de rencontre des deux coniques. Il résulte de là que :

Théorème XX. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure plane sur son plan, les points pour lesquels les cercles osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires appartiennent à un lieu qui se compose d'une droite et d'une ligne du troisième ordre.*

Sur le mouvement d'une droite; par M. Halphen.

(Séance du 19 février 1873)

M. Mannheim a trouvé cette remarquable propriété que, *si quatre points d'une droite se meuvent dans des plans, tous les points de la droite décrivent des ellipses.*

Je me propose de faire connaître quelques autres propriétés de ce mouvement.

Étant donnés cinq plans $P_1, \ldots, P_5$ et une droite D, il est facile de voir qu'il existe une développable du quatrième degré et de la troisième classe tangente à ces plans et bitangente à la droite, et qu'il n'en existe qu'une. Soit S cette surface. Par chaque point, on peut lui mener trois plans tangents, et, par suite, trois droites bitangentes. Par suite aussi, par chaque point d'une bitangente à cette surface, passe un seul plan tangent à S, qui ne contienne pas cette bitangente. Donc tous les plans tangents divisent homographiquement les bitangentes de la surface.

La congruence formée par ces bitangentes contient toutes les droites qui

sont partagées par les cinq plans homographiquement à la droite D. Car on voit aisément que, par un point d'un de ces plans, on ne peut mener qu'une seule droite satisfaisant à cette condition et non contenue dans ce plan ; et que, par le même point, ne passe aussi qu'une seule bitangente à S non contenue dans ce même plan. Ces deux droites coïncident donc. Par suite :

Théorème I. — *Les droites, qui sont partagées par cinq plans donnés homographiquement à une droite donnée, forment une congruence dont la focale est une surface développable du quatrième degré et de la troisième classe. Tous les plans tangents de cette surface divisent homographiquement toutes les droites de la congruence.*

En particulier, si l'un des plans, P_5, est à l'infini, la congruence est formée des droites divisées par quatre plans donnés semblablement à une droite donnée, et l'on voit que tous les points homologues d'un même point de la droite donnée sont dans un même plan.

Si, parmi les droites de cette dernière congruence, on choisit celles qui sont divisées en parties égales à celles de D, ces droites forment une surface, qui est celle engendrée par une droite dont quatre points se meuvent dans quatre plans. Le théorème I nous apprend que, dans ce cas, chaque point se meut également dans un plan. Parvenu à ce résultat par d'autres considérations, M. Mannheim, s'appuyant alors sur un théorème de Dupin, en conclut que chaque point décrit une ellipse. Je vais démontrer la même proposition sans avoir recours au théorème de Dupin.

Revenons à la première congruence considérée. Les droites qui la constituent déterminent une correspondance point à point entre deux plans tangents quelconques de la surface focale S, en sorte qu'à une droite d'un de ces plans correspond une droite dans chacun des autres. Si, dans un de ces plans, P_1, on considère une droite L_1, les droites de la congruence, qui rencontrent L_1 et ne sont pas dans le plan P_1, forment un hyperboloïde tangent à chaque plan P. Les droites qui correspondent à L_1 dans le plan P sont les génératrices rectilignes d'un système. Les droites de la congruence sont celles de l'autre système. Deux hyperboloïdes, déterminés par deux droites L_1, L'_1 du plan P_1, se coupent suivant la droite de la congruence qui passe au point commun à ces deux droites et n'est pas située dans le plan P_1.

Il est facile de déterminer la seconde droite suivant laquelle le plan P_1 coupe l'hyperboloïde déterminé par L_1. Cette droite passe par un point de L_1 où deux des trois plans tangents à S se confondent avec P_1. C'est le point où L_1 rencontre la génératrice rectiligne T_1 de la surface S, suivant laquelle le plan P_1 touche cette surface. Le même plan coupe S, en outre, suivant une conique C_1 tangente à T_1. La droite cherchée est donc l'autre tangente à C_1, issue du point commun à L_1 et à T_1. Il en est de même dans chaque

plan P. Il coupe l'hyperboloïde suivant deux droites, l'une L, et l'autre tangente à la conique C et passant au point de rencontre de L et de T.

Supposons de nouveau que le plan P_5 soit à l'infini. L'hyperboloïde considéré devient un paraboloïde. Les deux droites de ce paraboloïde, contenues dans le plan P_5, se coupent sur la droite T_5. Donc :

Théorème II. — *Tous les paraboloïdes contenus dans la congruence des droites divisées par quatre plans semblablement à une droite donnée sont tels que, pour chacun d'eux, l'intersection des plans directeurs est parallèle à un plan fixe.*

Par un point O menons des parallèles aux génératrices d'un de ces paraboloïdes, et portons sur ces droites des longueurs OM égales aux segments interceptés sur les génératrices par deux plans P, et de même sens. On voit immédiatement que le lieu des points M est une droite parallèle à l'intersection des plans directeurs. Si l'on prend un autre paraboloïde et qu'on fasse la même construction, on obtiendra une autre droite, qui rencontrera la précédente, attendu que les deux paraboloïdes ont une génératrice commune. Donc le plan de ces deux droites est parallèle au plan fixe défini dans le dernier théorème. Donc :

Théorème III. — *Si l'on transporte parallèlement à elles-mêmes toutes les droites de la congruence, en réunissant en un même point tous les homologues d'un certain point, les homologues de tout autre point sont dans un même plan de direction constante.*

Dans la nouvelle figure ainsi formée, une série de plans Q parallèles entre eux correspondent un à un aux plans P de la première. Les droites de la congruence considérée et les droites menés par le point O se correspondent une à une, et déterminent sur deux plans P, Q correspondants une correspondance point à point ; de sorte que deux courbes correspondantes sur ces deux plans sont du même degré. On voit aussi très-aisément que les droites à l'infini de ces deux plans se correspondent, en sorte que les asymptotes de deux courbes correspondantes sont des droites homologues. Il en résulte immédiatement que les points de concours des asymptotes des courbes tracées sur les plans P, et qui correspondent à une courbe tracée sur l'un d'eux, décrivent des droites de la congruence. Si ce sont des coniques, leurs centres sont en ligne droite.

Les droites de la congruence, pour lesquelles les segments compris entre deux plans P sont égaux, sont parallèles à des droites issues de O et formant un cône de révolution, dont l'axe est perpendiculaire aux plans Q. Ce cône est coupé par chaque plan Q suivant un cercle. A chacun de ces cercles répond, dans chaque plan P, une conique. Le lieu des centres de ces coniques est la droite de la congruence qui est parallèle à l'axe du cône ; cette droite est, par suite, la droite de la congruence sur laquelle les plans

P interceptent les plus petits segments. On peut donc compléter le théorème de M. Mannheim de la manière suivante :

Théorème IV. — *Si deux droites sont partagées par quatre plans en segments proportionnels, et qu'on les fasse mouvoir toutes deux de manière que les extrémités de ces segments restent dans les plans donnés : 1° tous leurs points décrivent des ellipses ; 2° les ellipses décrites par deux points homologues sont dans le même plan, concentriques et homothétiques ; 3° le lieu des centres de ces ellipses est la droite unique partagée par les plans donnés en segments proportionnels à ceux des droites données et les plus petits possible ; 4° chacune des deux droites fait, dans son mouvement, un angle constant avec cette ligne des centres.*

Sur les sections planes des cônes circulaires obliques ; par M. de Pistoye.

(Séance du 19 février 1875)

Je me propose ici de démontrer d'une façon *élémentaire* que les sections planes d'un cône circulaire oblique sont de même nature que celles d'un cône droit, en partant des propriétés des cercles focaux.

Si, dans la démonstration du théorème de Dandelin, on remplace la sphère inscrite dans le cône et tangente au plan sécant par une sphère inscrite qui coupe le plan sécant, on établit aisément les propriétés des cercles focaux et en particulier celle-ci :

Toute section plane d'un cône droit peut être regardée comme le lieu des points tels que, pour chacun d'eux, le rapport de sa distance à une droite donnée avec la longueur de la tangente menée de ce même point à un cercle aussi donné soit constant.

Voici comment on peut établir la même propriété pour les sections planes des cônes circulaires obliques.

Soit S le sommet d'une cône circulaire oblique coupé par un plan X suivant la courbe AMA_1N ; je cherche la ligne droite suivant laquelle l'un des plans cycliques coupe le plan X et je mène au cône un des plans tangents parallèles à cette droite, il coupera le plan X suivant une droite AL tangente en A au cône et parallèle à la précédente. Par la droite AL, je puis donc mener un plan qui soit parallèle au plan cyclique et qui par suite coupe le cône suivant un cercle. Je cherche de même la ligne droite suivant laquelle l'autre plan cyclique coupe le plan X et je mène les deux plans tangents au cône qui sont parallèles à cette droite ; ils couperont le plan X suivant deux droites par chacune desquelles on peut mener un plan parallèle au plan cyclique, mais je ne construis que celui qui coupe le cône du

même côté du plan X que le plan P. Le plan P_1 ainsi construit coupe le cône suivant un cercle, le plan X suivant une droite A_1L tangente en A_1 au cône, et le plan P suivant la ligne LTT′. Les cercles suivant lesquels les plans P et P_1 coupent le cône se rencontrent en T et T′, et par suite sont situés sur une même sphère OOOO. Les lignes AL et A_1L sont tangentes à cette sphère, elles sont donc égales. La sphère coupe le plan X suivant un cercle $ACC'A_1C''$.

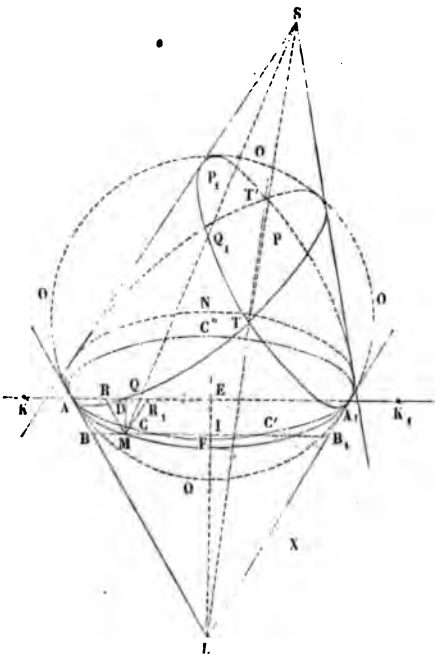


Fig. 2.

Soit M un point quelconque de l'intersection du cône avec le plan X; je mène la génératrice de ce point, elle coupera le plan P en Q et le plan P_1 en Q_1. Considérons d'abord le point Q; par le point M, je mène un plan parallèle au plan P, il coupera le plan X suivant une droite MR parallèle à la droite AL, et la droite AA_1 en R.

Par le sommet S, je mène un plan parallèle au plan P, il coupera la droite AA_1 en un certain point K (qui n'est qu'indiqué). La génératrice SM et la droite AA_1 sont coupées par trois plans parallèles; on a donc

$$\frac{MQ}{RA} = \frac{QS}{AK}.$$

Je construis de même les points R_1 et K_1 en menant par les points M et S les plans parallèles au plan P_1; on a

$$\frac{MQ_1}{R_1A_1} = \frac{Q_1S}{A_1K_1},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1} = \frac{QS.Q_1S}{AK.A_1K_1} = \frac{ST^2}{AK.A_1K_1},$$

puisque la génératrice ST est tangente à la sphère.

Je mène par le point M une parallèle à la droite AA_1, elle coupe les lignes AL et A_1L aux points B et B_1, et la sphère aux points C et C′ situés sur le

cercle $ACC'A_1C''$. J'abaisse du point L une perpendiculaire sur la corde AA_1, elle rencontre cette corde et sa parallèle BB_1 en E et en I ; le point I est le milieu de la corde CC' et de la longueur BB_1.

Les produits $MQ.MQ_1$ et $MC.MC'$ sont égaux, les longueurs RA et R_1A_1 sont respectivement égales aux longueurs MB et MB_1 ; on a donc

$$\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1}=\frac{MC.MC'}{MB.MB_1}=\frac{MI^2-IC^2}{IB^2-MI^2},$$

et, en égalant les deux valeurs du rapport $\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1}$,

$$\frac{MI^2-IC^2}{IB^2-MI^2}=\frac{ST^2}{AK.A_1K_1}.$$

En ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, cette égalité devient

$$\frac{MI^2-IC^2}{IB^2-IC^2}=\frac{ST^2}{ST^2+AK.A_1K_1},$$

où MI^2-IC^2 est égal au produit $MC.MC'$, et aussi au carré de la longueur MF de la tangente menée du point M au cercle $ACC'A_1C''$. De même IB^2-IC^2 est égal à BA^2 ; on a donc

$$\frac{MF^2}{BA^2}=\frac{ST^2}{ST^2+AK.A_1K_1}.$$

J'abaisse du point M la perpendiculaire MD sur la corde AA_1 ; on a

$$\frac{BA}{MD}=\frac{LA}{LE},$$

et, en remplaçant BA par sa valeur dans l'équation précédente,

$$\frac{MF^2}{MD^2}=\frac{LA^2}{LE^2}\,\frac{ST^2}{ST^2+AK.A_1K_1}=\text{constante}.$$

Donc, etc.

Remarque. — Si les plans P et P_1 étaient menés de manière à couper le cône de côtés différents du plan X, la démonstration subsisterait dans ses parties principales, et on étendrait facilement les propriétés des cercles focaux aux cercles bitangents extérieurement.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 5 MARS 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire annonce que MM. Brocard, Mannheim, se sont fait inscrire comme *sociétaires perpétuels*.

Le secrétaire donne communication d'une lettre du secrétaire perpétuel de la Société royale des sciences de Gœttingue, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Naschrichten*.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Fabre, ancien élève de l'École polytechnique, à Nimes; Lax, ingénieur des ponts et chaussées, à Paris; Philippon, secrétaire de la faculté des sciences, à la Sorbonne; Roux, architecte, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. le comte Léopold Hugo communique à la Société *Quelques renseignements relatifs à un collier à grains polyédriques, conservé dans la salle des bijoux antiques du Louvre*.

M. Fouret communique à la Société une note sur la *Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques*.

M. Hatt présente à la Société *Quelques observations sur la question de probabilités traitée par M. E. Lemoine*.

M. Kœhler communique à la Société une note *Sur les réseaux de courbes planes*.

SÉANCE DU MERCREDI 19 MARS 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne communication d'une lettre du secrétaire de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Publications;* d'une lettre du secrétaire de l'Académie des sciences de l'institut de Bologne, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Memorie;* d'une lettre du secrétaire de l'Institut royal lombard, qui accepte le *Bul-*

letin en échange de ses *Rendiconti ;* d'une lettre de M. F. Klein, professeur à l'université d'Erlangen, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Mathematische Annalen;* d'une lettre de M. G. Dillner, professeur à l'université d'Upsal, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Tidskrift;* d'une lettre de M. le Dr C. A. F. Peters, directeur de l'observatoire de Kiel, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Astronomische Nachrichten ;* d'une lettre de M. H. G. Zeuthen, professeur à l'université de Copenhague, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Tidsskrift;* d'une lettre de M. G. Battaglini, professeur à l'université de Rome, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Giornale;* d'une lettre de M. Enrico Betti, directeur de l'École normale supérieure de Pise, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Annali;* d'une lettre de M. le prince B. Boncompagni, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Bullettino;* d'une lettre de M. L. Cremona, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Annali.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Bertrand, membre de l'Institut; Florentin, capitaine d'artillerie, à Paris; Jos. Sivering, secrétaire de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Halphen communique à la Société un mémoire *Sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre.*

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur les intégrales des fonctions discontinues et sur les fonctions continues qui n'ont pas de dérivées.*

M. Rodet communique à la Société une note *Sur la gravitation universelle.*

SÉANCE DU MERCREDI 2 AVRIL 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire annonce que M. Camille Jordan s'est fait inscrire comme *sociétaire perpétuel.*

Le secrétaire donne communication d'une lettre du secrétaire de l'Académie des sciences de Berlin, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Monatsberichte;* d'une lettre du secrétaire de la Société des sciences de Finlande, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Acta;* d'une lettre du recteur de l'université de Pise, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Annali;* d'une lettre de M. C. W. Borchardt, de Berlin, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Journal.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Duguen, ancien élève de l'École centrale, à Roye (Somme); G. Lehr, élève de l'École des hautes études, à Marseille; Michelet, ingénieur civil, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. C. de Polignac communique à la Société *Quelques théorèmes d'arithmétique.*

M. de Saint-Germain communique à la Société une note *Sur la résolvante de deux équations du second degré.*

M. Camille Jordan communique à la Société une note *Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace.*

M. Brisse communique à la Société *Quelques formules relatives aux courbes gauches, déduites de celles de M. J. A. Serret.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques; par M. Fouret.

(Séance du 5 mars 1873)

En s'aidant du principe de correspondance qu'il a imaginé, et qui l'a conduit à des résultats si merveilleux, M. Chasles est parvenu à démontrer géométriquement d'une manière fort simple ce théorème fondamental dans le théorie des courbes, à savoir que :

Deux courbes d'ordres p et p' ont toujours pp' points communs réels ou imaginaires.

Une première démonstration de ce théorème a fait l'objet d'une communication de M. Chasles à la séance de l'Académie des sciences du 30 septembre 1872 (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 736). Une seconde démonstration du même théorème a été donnée par l'illustre géomètre dans la séance du 20 janvier 1873 (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 126).

M'étant proposé d'appliquer les mêmes procédés de démonstration au théorème analogue relatif aux surfaces, je suis parvenu, en ce qui concerne la première démonstration de M. Chasles, à un résultat satisfaisant que je vais exposer ici en quelques mots.

Théorème. — *Trois surfaces algébriques d'ordres p, p', p'' ont $pp'p''$ points communs réels ou imaginaires.*

Désignons par (S_p), $(S_{p'})$, $(S_{p''})$ ces trois surfaces, et soient I une droite

et O un point situés d'une manière quelconque par rapport à ces surfaces.

Par la droite I, faisons passer un plan (A) quelconque. Ce plan coupe les surfaces (S_p), $(S_{p'})$ suivant deux courbes d'ordres p et p' qui ont pp' points communs, d'après le théorème rappelé ci-dessus et démontré par M. Chasles. En joignant le point O à chacun des points a, on obtient pp' droites qui coupent chacune $(S_{p''})$ en p'' points; de sorte que ces pp' droites déterminent $pp'p''$ points b sur $(S_{p''})$.

Par la droite I et chacun des points b, faisons passer un plan; nous obtenons de la sorte $pp'p''$ plans (B), qui correspondent au plan (A).

Inversement, par I menons un plan (B) quelconque. Il coupe $(S_{p''})$ suivant une courbe d'ordre p''. Prenons cette courbe pour directrice d'un cône ayant pour sommet le point O; puis considérons un second cône ayant également son sommet en O et s'appuyant sur la courbe d'intersection des surfaces (S_p), $(S_{p'})$. Ce second cône d'ordre pp' coupe le premier, qui est d'ordre p'', suivant $pp'p''$ arêtes : cela résulte immédiatement de ce que les sections de ces deux cônes par un même plan sont deux courbes respectivement d'ordres pp' et p'' qui ont $pp'p''$ points communs, ainsi qu'il a été dit précédemment.

Or les $pp'p''$ arêtes communes aux deux cônes déterminent, sur les surfaces (S_p), $(S_{p'})$, $pp'p''$ points communs à ces deux surfaces, et, en faisant passer un plan par la droite I et par chacun de ces points, on obtient $pp'p''$ plans (A) qui correspondent au plan (B).

Donc à un plan (B) correspondent $pp'p''$ plans (A), de même qu'à un plan (A) correspondent $pp'p''$ plans (B); par suite, il existe $2pp'p''$ plans (A) qui coïncident chacun avec un de leurs correspondants (B). Mais $pp'p''$ de ces plans se confondent avec le plan passant par la droite I et le point O, et n'appartiennent pas à des points communs aux trois surfaces; tandis que chacun des $pp'p''$ autres plans détermine sur l'intersection de (S_p) avec $(S_{p'})$ un point a et sur $(S_{p''})$ un point b qui, situés en ligne droite avec O, doivent nécessairement coïncider. Ce qui démontre le théorème.

Corollaire I. — *Un système de trois équations algébriques à trois inconnues de degrés p, p', p'', admet en général et au plus $pp'p''$ solutions.*

Ce théorème, qui est une extension toute naturelle de celui de Bezout relatif à un système de deux équations, résulte immédiatement du théorème que nous venons de démontrer, en faisant abstraction des points communs aux trois surfaces qui sont situés à l'infini et auxquels ne correspondent pas de solutions dans les équations.

Ce premier corollaire se complète d'ailleurs par le suivant :

Corollaire II. — *Considérons un système de trois équations à trois inconnues x, y, z, respectivement de degrés p, p', p'',*

$$(x^m, y^n, z^r)^p = 0, \quad (x^{m'}, y^{n'}, z^{r'})^{p'} = 0, \quad (x^{m''}, y^{n''}, z^{r''})^{p''} = 0,$$

dans lequel les degrés des puissances les plus élevées sont respectivement : pour x, m, m', m''; pour y, n, n', n''; pour z, r, r' r''. Un pareil système d'équations a un nombre de solutions égal à

$$pp'p'' - (p-m)(p'-m')(p''-m'') - (p-n)(p'-n')(p''-n'') \\ - (p-r)(p'-r')(p''-r'') - \omega,$$

ω désignant le nombre des points à l'infini communs aux trois surfaces représentées par les trois équations, et situés en dehors des axes de coordonnées.

Cela résulte de ce que, par suite de la forme des équations, les surfaces correspondantes ont respectivement $mm'm''$ nappes qui se croisent en un point situé à l'infini sur l'axe des x, $nn'n''$ nappes qui se croisent à l'infini sur l'axe des y, $rr'r''$ nappes qui se croisent à l'infini sur l'axe des z.

Remarques. — 1° Le théorème précédent n'est qu'une extension d'un théorème analogue relatif à un système de deux équations à deux inconnues et que M. Chasles a énoncé dans sa communication à l'Académie des sciences du 30 septembre 1872.

2° En suivant un procédé de démonstration analogue à celui que nous avons exposé dans cette note, et en nous appuyant sur quelques considérations que l'on peut qualifier d'hypergéométriques, nous sommes parvenu à démontrer par le raisonnement, et sans l'aide du calcul, le théorème de Bezout étendu à un nombre quelconque d'équations contenant un pareil nombre d'inconnues. Cette démonstration fera l'objet d'une communication subséquente.

Sur les réseaux de courbes planes; par M. Kœhler.

(Séance du 5 mars 1873)

On sait par les travaux de Steiner et de M. Cremona que, dans un réseau d'ordre $n-1$, il y a en général $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ courbes à deux points doubles et $12(n-2)(n-3)$ courbes avec point de rebroussement. Mais ces nombres doivent être réduits lorsque les courbes du réseau ont en commun des points simples ou multiples. Je démontrerai à ce sujet le théorème suivant :

Tout point multiple commun, d'ordre p, diminue de $12p(p-1)$ le nombre des courbes du réseau à point de rebroussement.

M. Maximilien Curtze, professeur au gymnase de Thorn, a donné quelques indications sommaires sur cette question dans une des notes qui accompagnent sa traduction allemande de l'ouvrage de M. Cremona sur les courbes planes. Mais les résultats auxquels on arrive en suivant ses indications sont tout à fait en désaccord avec ceux que je vais présenter ici.

1. Je considère le réseau formé par les premières polaires de tous les points du plan relativement à une courbe fondamentale $U = 0$ d'ordre n. Les polaires à deux points doubles et les polaires à point de rebroussement correspondent respectivement aux points doubles et de rebroussement de la courbe de Steiner; cette courbe est, comme on sait, le lieu des points doubles de toutes les polaires coniques réductibles à un système de deux droites, ou encore le lieu des points dont les premières polaires ont un point double. Elle est de l'ordre $3(n-2)^2$ et de la classe $3(n-1)(n-2)$, lorsque U est dépourvue de points singuliers.

Si la courbe U possède un point multiple d'ordre p, son équation, mise sous la forme homogène, sera, en plaçant l'origine en ce point,

$$uz^{n-p} + vz^{n-p-1} + \ldots = 0,$$

les polynomes $u, v, \ldots$ étant homogènes en x et y, et des degrés $p, p+1, \ldots$; $u = 0$ donne le faisceau des p tangentes à l'origine. L'équation de la hessienne est, en désignant les dérivées secondes par des indices doubles,

$$H = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

et il est très-facile de voir que l'origine est un point multiple d'ordre $3p-4$, dont les tangentes sont représentées par

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ (n-p)u_1 & (n-p)u_2 & (n-p-1)u \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on retranche des éléments de la troisième colonne de ce déterminant ceux de la première multipliés par x et ceux de la seconde multipliés par y, on aura

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ (n-p)u_1 & (n-p)u_2 & -u \end{vmatrix} = 0,$$

et l'équation des $3p-4$ tangentes se réduit à $u(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) = 0$.

Le second facteur représente $2p-4$ tangentes qui ne sont pas communes aux courbes H et U; ce sont les rayons doubles de l'involution d'ordre $p-1$ formée par les faisceaux des tangentes à toutes les premières polaires de U.

Cela posé, les conditions pour qu'une courbe $F = 0$ ait un point de rebroussement sont

$$F_{23}^2 - F_{22}F_{33} = 0, \quad F_{13}^2 - F_{11}F_{33} = 0, \quad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0.$$

En calculant F_{23}, F_{22}, ..., pour la polaire $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = 0$ d'un point (x', y', z'), on obtient un groupe de trois équations dont j'écris la première, savoir :

$$(x'U_{123} + y'U_{223} + z'U_{233})^2 - (x'U_{122} + y'U_{222} + z'U_{223})(x'U_{133} + y'U_{233} + z'U_{333}) = 0.$$

L'élimination de (x', y', z') conduit à l'équation d'une courbe S d'ordre $4(n-3)$, dont les intersections avec la hessienne d'ordre $3(n-2)$ donnent les points de rebroussement des premières polaires. La fonction S est le covariant obtenu en remplaçant dans l'invariant S du quatrième ordre d'une forme cubique les coefficients de la forme par les troisièmes dérivées de U (Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung;* Crelle, t. 59) (*). L'expression de S peut s'écrire, en groupant convenablement les termes,

$$\begin{aligned}
S = {} & U_{123}^4 - 2U_{123}^2 U_{113} U_{223} + U_{113}^2 U_{223}^2 \\
& + U_{331}(3U_{123}U_{112}U_{223} - 2U_{221}U_{123}^2 + U_{123}U_{113}U_{222} - U_{113}U_{221}U_{223} - U_{111}U_{223}^2) \\
& + U_{332}(3U_{123}U_{221}U_{113} - 2U_{112}U_{123}^2 + U_{123}U_{223}U_{111} - U_{223}U_{112}U_{113} - U_{222}U_{113}^2) \\
& + U_{333}(U_{123}U_{221}U_{112} - U_{123}U_{111}U_{222} + U_{222}U_{112}U_{113} + U_{111}U_{221}U_{223} - U_{223}U_{112}^2 - U_{113}U_{221}^2) \\
& + U_{331}^2(U_{221}^2 - U_{112}U_{222}) + U_{332}^2(U_{112}^2 - U_{111}U_{221}) + U_{331}U_{332}(U_{111}U_{222} - U_{112}U_{221}).
\end{aligned}$$

Lorsque U est de la forme indiquée ci-dessus, on voit de suite que la plus haute puissance de z dans S est de l'ordre $4(n-p-1)$, de sorte que l'origine est un point multiple d'ordre $4(p-2)$ pour la courbe S. Pour obtenir l'équation des tangentes, il suffit de considérer les troisièmes dérivées du terme uz^{n-p}, c'est-à-dire de faire les substitutions suivantes

$$U_{111} = u_{111}z^{n-p}, \quad U_{112} = u_{112}z^{n-p}, \quad U_{113} = (n-p)u_{111}z^{n-p-1}, \ldots.$$

On obtient ainsi, abstraction faite du facteur $z^{4(n-p-1)}$,

$$\begin{aligned}
S = {} & (n-p)^4(u_{12}^2 - u_{11}u_{22})^2 \\
& + (n-p)^3(n-p-1)u_1(3u_{12}u_{22}u_{112} - 2u_{12}^2u_{221} + u_{11}u_{12}u_{222} - u_{11}u_{22}u_{221} - u_{22}^2u_{111}) \\
& + (n-p)^3(n-p-1)u_2(3u_{12}u_{11}u_{221} - 2u_{12}^2u_{112} + u_{22}u_{12}u_{111} - u_{22}u_{11}u_{112} - u_{11}^2u_{222}) \\
& + (n-p)^2(n-p-1)(n-p-2)u(u_{12}u_{112}u_{221} - u_{12}u_{111}u_{222} + u_{11}u_{112}u_{222} \\
& \qquad + u_{22}u_{221}u_{111} - u_{22}u_{112}^2 - u_{11}u_{221}^2) \\
& + (n-p)^2(n-p-1)^2[u_1^2(u_{221}^2 - u_{112}u_{222}) + u_2^2(u_{112}^2 - u_{221}u_{111}) \\
& \qquad + u_1u_2(u_{111}u_{222} - u_{112}u_{221})].
\end{aligned}$$

Si maintenant, dans la deuxième et la troisième ligne, on remplace u_1 par $xu_{11} + yu_{12}$, u_2 par $xu_{12} + yu_{22}$; si de plus on remarque que $u_{11} = xu_{111} + yu_{112}$, $u_{22} = xu_{221} + y_{222}$, $u_{12} = xu_{112} + yu_{22}$, on trouve, après quelques réductions

(*) Le moyen le plus simple de s'en assurer consiste à prendre la forme cubique sous sa forme canonique $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$; l'élimination de x, y, z entre $d^2x^2 - bcyz = 0$, $d^2y^2 - cazx = 0$, $d^2z^2 - abxy = 0$, conduit à l'invariant $S = dabc - d^4$.

faciles à apercevoir, l'expression $-2(n-p)^3(n-p-1)(u_{12}^2-u_{11}u_{22})^2$.

Le coefficient de u, dans la quatrième ligne, s'annule identiquement; enfin le dernier groupe de termes se réduit à

$$(n-p)^2(n-p-1)^2(u_{12}^2-u_{11}u_{22})^2.$$

Il résulte de là que les tangentes au point multiple de la courbe S sont comprises dans l'équation $(u_{12}^2-u_{11}u_{22})^2=0$. Ce sont précisément les tangentes de la hessienne qui ne sont pas communes à cette courbe et à la proposée, chacune d'elles étant comptée deux fois.

On conclut de là que le point multiple d'ordre p tient lieu de

$$12(p-1)(p-2)$$

points d'intersection des courbes H et S. Et, en effet, les $3p-4$ branches de H se subdivisent en deux groupes, l'un de p, l'autre de $2(p-2)$; le premier groupe donne $4p(p-2)$ points d'intersection à l'origine. Chacune des branches du second a 4 points infiniment voisins communs avec la branche correspondante de S, puisque la tangente de celle-ci est en réalité une tangente double dont les deux points de contact se sont réunis; de plus la branche de H doit être considérée comme coupant en un point chacune des $4(p-2)-2$ branches de S qui ne la touchent pas. On a, en définitive,

$$4p(p-2)+2(p-2)[4+4(p-2)-2]=12(p-1)(p-2).$$

En particulier, si U est une courbe du quatrième ordre avec un point triple à l'origine, la hessienne a un point quintuple; la courbe S se réduit à deux droites doubles, savoir : les rayons doubles de l'involution formée par les couples de tangentes des premières polaires, et elle rencontre la hessienne en 24 points confondus à l'origine.

Ainsi, lorsque la courbe U a un point multiple d'ordre p, le nombre des rebroussements de la courbe de Steiner se réduit à

$$12[(n-2)(n-3)-(p-1)(p-2)].$$

Comme on connaît l'ordre et la classe de cette courbe, on pourra déterminer par les formules de Plücker ses autres caractères, par exemple le nombre de ses points doubles, ou, ce qui revient au même, le nombre des polaires à deux points doubles.

Toutefois, il faut remarquer que le point multiple d'ordre p influe également sur l'ordre et sur la classe de la courbe de Steiner; l'ordre est diminué de $(p-2)(3p-2)$, et la classe de $(p-1)(3p-4)$ (*).

(*) Voir, à ce sujet, la traduction allemande de l'*Introduzione* de M. Crémona, addition à l'art. 88.

2. Si, au lieu de considérer un réseau de premières polaires, on considère un réseau général représenté par une équation de la forme

$$lA + mB + nC = 0,$$

A, B, C étant trois courbes d'ordre $n-1$, la recherche analytique de la courbe S est plus difficile: on a à éliminer l, m, n entre les trois équations suivantes du second degré :

$$(1)\quad \begin{cases} (lA_{23} + mB_{23} + nC_{23})^2 = (lA_{22} + mB_{22} + nC_{22})(lA_{33} + mB_{33} + nC_{33}) \\ (lA_{31} + mB_{31} + nC_{31})^2 = (lA_{33} + mB_{33} + nC_{33})(lA_{11} + mB_{11} + nC_{11}) \\ (lA_{12} + mB_{12} + nC_{12})^2 = (lA_{11} + mB_{11} + nC_{11})(lA_{22} + mB_{22} + nC_{22}). \end{cases}$$

Le résultant de ce système n'est autre chose que l'invariant, désigné habituellement par Σ, du système suivant :

$$(2)\quad \begin{cases} U = A_{11}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 + A_{33}\nu^2 + 2A_{23}\mu\nu + 2A_{31}\nu\lambda + 2A_{12}\lambda\mu = 0, \\ V = B_{11}\lambda^2 + B_{22}\mu^2 + B_{33}\nu^2 + 2B_{23}\mu\nu + 2B_{31}\nu\lambda + 2B_{12}\lambda\mu = 0, \\ W = C_{11}\lambda^2 + C_{22}\mu^2 + C_{33}\nu^2 + 2C_{23}\mu\nu + 2C_{31}\nu\lambda + 2C_{12}\lambda\mu = 0. \end{cases}$$

On sait, en effet, que $\Sigma = 0$ exprime la condition pour que la somme $lU + mV + nW$ soit un carré parfait; et, en formant les équations de condition, on trouve précisément le système (1). L'expression de Σ est si compliquée que son étude m'a paru impraticable ; l'extension à un réseau quelconque du théorème que j'ai donné plus haut n'est donc qu'une induction légitimée, il est vrai, par les analogies qui existent entre l'invariant Σ et l'invariant S de la forme cubique générale.

3. Applications à quelques cas particuliers.

1° Le réseau est du 4me ordre ; les courbes ont 3 points doubles et 3 points simples communs.

La hessienne est alors du 9me ordre ; elle se compose de 3 droites, côtés du triangle formé par les points doubles, et de 3 coniques passant respectivement par ces points et par 2 des points simples.

La courbe de Steiner est de l'ordre $3.3^2 - 3.7 = 6$, et de la classe $3(4.3) - 3.10 - 3.2 = 0$. Le nombre des points de rebroussement, qui est de 72 dans le cas du réseau le plus général, est diminué de 3.24 et se réduit à zéro, ce qui devait être. Les formules de Plücker montrent qu'il y a 15 points doubles ; ces 15 points ne correspondent pas seulement aux courbes du réseau à 5 points doubles, mais à celles qui ont un point double en un des points simples donnés.

Soient A, B, C les 3 points doubles communs, d, e, f les points simples. On a d'abord 3 courbes composées de 2 coniques, savoir : (ABCde)(ABCdf), (ABCed)(ABCef), ABCfd)(ABCfe) ; puis 12 courbes à 5 points doubles composées chacune d'une conique et de 2 droites, savoir : (ABCde, AB, Cf), (ABCde, AC, Bf), (ABCde, BC, Af), (ABCdf, AB, Ce), .. .

Dans cet exemple, on pouvait prévoir *a priori* les résultats donnés par les formules générales ; il n'en est plus de même pour le suivant.

2° Le réseau est du 6me ordre ; les courbes ont en commun 8 points doubles et un point simple.

La hessienne est du 15me ordre.

Dans le cas général, la courbe de Steiner est du 75me ordre, de la 90me classe et a 240 rebroussements. Ici l'ordre se réduit à $75 - 7.8 = 19$; la classe se réduit à $90 - 8.10 - 2 = 8$. Le nombre des rebroussements est diminué de 8.24 et devient égal à 48. La formule de Plücker $m = n(n-1) - 2\delta - 3\rho$ donne, en faisant $m = 8$, $n = 19$ et $\rho = 48$, $\delta = 95$. Un de ces 95 points doubles répond à la courbe qui a un point double au point simple donné. Donc enfin, parmi les courbes du 6me ordre passant par 8 points doubles et un point simple donné, il y en a 94 qui ont en tout 10 points doubles.

Remarque. — Dans ce qui précède, il faut entendre par courbe de Steiner du réseau le lieu des points qui *correspondent* à des courbes possédant un point double ; on sait qu'il est toujours possible d'établir d'une infinité de manières la correspondance entre les points du plan et les courbes d'un réseau.

Le problème que je viens de traiter se rattache à un sujet de recherches assez étendu sur lequel M. Salmon a le premier, je crois, appelé l'attention (*Higher plane Curves*, p. 33) ; c'est l'étude des relations géométriques existant entre les points doubles d'une courbe algébrique, lorsque le nombre de ces points (multiplié par 3) dépasse le nombre de conditions qui déterminent la courbe. La première et la plus simple des questions qui se présentent est relative à la courbe du 6me ordre ; elle peut avoir jusqu'à 10 points doubles (exemple : l'enveloppe des cordes communes à une ellipse et son cercle osculateur), mais 9 de ces points suffisent à la déterminer. On est alors conduit à la question suivante, dont j'ai transmis dernièrement l'énoncé à M. Brisse :

Un système de courbes du 6me ordre est assujetti à avoir 9 points doubles, 8 d'entre eux sont fixes ; quel lieu doit décrire le 9me pour que la courbe ait un 10me point double ?

J'ai trouvé que ce lieu était du 180me ordre.

La nature de ce résultat peut faire prévoir quelle serait la difficulté du problème pour les courbes d'ordre supérieur au 6me.

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre;
par M. Halphen.

(Séance du 19 mars 1875)

INTRODUCTION

Quand on considère des courbes ou des surfaces pour la détermination desquelles M conditions sont nécessaires, il y a lieu de se demander le nombre de ces courbes ou de ces surfaces qui satisfont à M conditions données. Il peut arriver que quelques-unes de ces conditions aient entre elles une telle dépendance qu'il ne soit pas possible de les considérer comme des conditions séparées sans introduire des solutions étrangères au problème proposé. On peut employer les noms de condition double, triple, etc., à désigner l'ensemble de plusieurs conditions inséparables.

D'une manière générale, les M conditions données peuvent se composer de m_1 conditions simples, m_2 conditions doubles, ..., m_i conditions multiples d'ordre i, ..., indépendantes les unes des autres, de sorte que l'on ait $m_1 + 2m_2 + \ldots + im_i + \ldots = M$. Chaque groupement des M conditions en conditions séparées donne lieu à un problème particulier, dont la solution fournira un théorème enseignant, dans chaque cas, *quels sont les nombres relatifs à toute condition simple, double, etc., qu'il faut connaître, et comment il faut combiner ces nombres pour obtenir celui qu'on cherche;* en d'autres termes, *quelle fonction représente ce dernier nombre.*

C'est ainsi que, relativement à la détermination du nombre des droites qui satisfont à deux conditions dans un plan, il suffit de connaître, pour chaque condition, le nombre des droites qui y satisfont et passent par un point.

Relativement à la détermination des plans, les théorèmes sont également bien connus. Pour la détermination des droites dans l'espace, les problèmes sont résolus par deux théorèmes que j'ai communiqués à l'Académie des sciences en 1871 et en 1872 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXXIII et LXXIV).

C'est en abordant ce genre de problèmes relativement aux coniques dans le plan que M. Chasles a tout d'abord ouvert la voie à cet ordre de recherches. Le premier problème est celui où l'une des conditions est simple. Les quatre autres conditions, qui peuvent être dépendantes ou indépendantes les unes des autres, déterminent un *système*. La solution du problème est contenue dans le théorème suivant :

Dans un système plan, le nombre des coniques qui passent en un point étant μ et le nombre de celles qui touchent une droite étant ν, le nombre de celles

qui satisfont à une condition quelconque est $\alpha\mu + \beta\nu$, *les nombres* α *et* β *ne dépendant que de la condition donnée* (*).

Ce beau théorème, que M. Chasles a découvert par l'induction, n'a pas encore été démontré.

Je me propose d'en donner une démonstration dans la première partie de ce mémoire.

Dans la seconde partie, j'aborderai le problème dans lequel les *cinq* conditions se partagent en deux, l'une triple, l'autre double. Ce problème est résolu par un théorème analogue au précédent ; mais la formule est à *trois* termes. L'énoncé de ce théorème est contenu implicitement dans une note de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 345), ainsi que l'a fait remarquer M. Cremona, en le donnant explicitement (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 776). Si la condition double se compose de deux conditions séparées, ce théorème découle facilement du précédent. Mais, s'il n'en est pas ainsi, il constitue un deuxième théorème distinct, non encore démontré, et dont on n'a même presque fait aucune vérification.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, je démontrerai ce théorème, et je ferai voir que l'ensemble de ces deux propositions fournit la solution complète des problèmes relatifs aux coniques dans le plan, de telle façon que, dans tous les cas, une condition simple, ainsi qu'une condition quadruple, est caractérisée par deux nombres, et une condition double ou triple par trois nombres.

Dans la troisième partie de ce mémoire, j'étudierai les problèmes relatifs à la détermination des coniques dans l'espace et des surfaces du second ordre ; et je démontrerai, à cette occasion, plusieurs théorèmes nouveaux.

La première partie contient, tout d'abord, quelques théorèmes étrangers à la question proposée, mais qui seront d'un usage fréquent dans tout le cours du mémoire.

PREMIÈRE PARTIE

I. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES INTERSECTIONS DES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

Soit, sur une courbe algébrique plane, un point O tel que la droite Oy ait r de ses points d'intersection avec la courbe réunis en O ; soit Ox une autre droite. L'équation de la courbe, rapportée aux axes Ox, Oy, est de la forme

$$(1) \qquad y^r(A + By + \ldots + Ky^R) + xP = 0;$$

(*) Les nombres μ et ν sont appelés première et deuxième caractéristiques du système.

A, B, ..., K sont des polynômes en x seul, dont le premier ne s'évanouit pas avec x, P est un polynôme dont le degré en y est inférieur à r.

Pour une valeur infiniment petite de x, l'équation (1) détermine r racines y infiniment petites. Le produit des autres racines est $\pm\frac{A}{K}$. Soit maintenant s le moindre degré de x dans les termes indépendants de y, en sorte que ces termes soient $x^s(a+bx+\ldots)$. Le produit de toutes les racines de (1) est $\pm\frac{x^s(a+bx+\ldots)}{K}$. Le produit des racines infiniment petites est donc égal à $\pm\frac{x^s(a+bx+\ldots)}{A}$, c'est-à-dire de l'ordre de x^s. Prenant x pour infiniment petit du premier ordre, désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les ordres de ces racines. Faisons le produit des r binômes $(y-x^\alpha)$. Nous obtenons un polynôme en y dont les r racines ont chacune un rapport fini avec une racine infiniment petite de (1). Les produits de ces deux groupes de racines ont donc un rapport fini, c'est-à-dire que la somme des nombres α est égale à s.

Or s marque le nombre des points d'intersection de la courbe et de Ox, confondus en O. Donc :

Théorème I. — *Le nombre des intersections d'une courbe et d'une droite, confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe et la droite sur une sécante quelconque, dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

On peut faire la remarque suivante : Une racine y étant de l'ordre α, on peut, pour trouver son rapport à x^α, se borner à considérer, dans (1), les termes en $y\,x^j$, tels que $j+i\alpha$ ait la même valeur pour tous ces termes. On en conclut aisément que les produits de ces rapports par x^α, ou les racines y de l'ordre α, bornées à leur premier terme, sont déterminés par une équation dont les coefficients ne contiennent que des puissances entières de x. On peut donc dire que : *si ρ est le nombre des segments ci-dessus de l'ordre α, le produit $\rho\alpha$ est toujours un nombre entier.*

Ce théorème est susceptible d'être étendu au cas de deux courbes, par l'analyse suivante.

Soient deux courbes S et S′ dans le même plan. On peut faire correspondre deux à deux les points de ces deux courbes qui ont même ordonnée y, et imaginer la courbe Σ dont les coordonnées rectilignes ξ, η sont les abcisses x, x' de deux points correspondants. Un point commun aux deux courbes S et S′ correspond à un point de Σ situé sur la bissectrice des axes. Supposons que le point O, origine des coordonnées x, y, soit commun aux deux courbes S, S′. La courbe Σ passe en Ω, origine des coordondées ξ, η.

D'après le théorème I, on trouvera le nombre des points communs à Σ et à la bissectrice des axes en considérant une valeur de ξ infiniment petite

du premier ordre, cherchant l'ordre de chacune des valeurs de $(\eta - \xi)$ infiniment petites correspondantes, et faisant la somme de ces ordres. Cette somme sera le nombre cherché. En se reportant aux courbes S et S', on voit que cela revient à : mener une parallèle à Oy, d'abcisse x du premier ordre; prendre les points m, infiniment voisins de O, où cette droite coupe S; par chaque point m, mener une parallèle à Ox; considérer sur chaque parallèle les points m' infiniment voisins de O et appartenant à S'; faire la somme des ordres des segments mm', interceptés sur ces parallèles.

En particulier, si les droites Ox, Oy ne sont pas tangentes à la courbe S', les points m' situés sur chaque parallèle à Ox sont en même nombre que les points m'_1 infiniment voisins de O situés sur la parallèle à Oy et sur S'; chaque segment mm'_1 est du même ordre qu'un segment mm', et les nombres de ces deux groupes de segments sont les mêmes. On peut donc remplacer la somme des ordres des segments mm' par celle des segments mm'_1. Donc :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* O, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre, et qui ne coïncide avec aucune tangente à l'une des courbes en ce point.*

De la remarque faite à propos du théorème I, on peut conclure ici que : *si $\rho\alpha$ est le nombre des segments d'ordre α, le produit $\rho\alpha$ est toujours un nombre entier.*

Au lieu de deux courbes quelconques, considérons maintenant deux courbes S et S' telles qu'à chaque point m de la première correspondent a points m' de la seconde, situés sur la droite qui joint m à un point fixe C, où ne passe pas S; et que les groupes de a points m', correspondant aux différents points m en ligne droite avec C, soient tous différents.

D'après cette définition, si p est le degré de S et n l'ordre de multiplicité du point C dans S', cette dernière courbe coupe les droites issues du point C en $ap+n$ points. Ce nombre marque dans son degré.

Projetons en μ, μ', sur une droite CA, deux points correspondants m, m', et imaginons la courbe Σ dont les coordonnées rectilignes sont Cm et Cm'. Cette courbe est de degré $2ap+n$, et a, à l'origine des coordonnées, un point multiple provenant des couples de points m, m' situés sur la perpendiculaire élevée en C sur CA. On voit très-facilement que ce point compte pour ap intersections de Σ et de la bissectrice des axes. Il reste donc $ap+n$ autres points communs à ces deux lignes. Donc :

Théorème III. — *Si, à chacun des points d'une courbe de degré p, situés sur une droite issue d'un point fixe, où ne passe pas cette courbe, correspond un groupe distinct de a points sur la même droite, et que le point fixe soit multiple d'ordre n sur le lieu de ces derniers, le degré de ce lieu,*

ainsi que le nombre des couples de points correspondants confondus, est égal à $ap + n$.

Les données restant les mêmes, si un point O est la réunion de plusieurs couples de points correspondants, on cherchera leur nombre en appliquant le théorème I à la courbe Σ. On sera conduit alors à mener une sécante à distance infiniment petite du premier ordre du point O, à considérer chaque point m d'intersection de cette sécante et de S infiniment voisin de O, à mener le rayon Cm et à faire la somme des ordres des segments mm' compris entre deux points correspondants infiniment voisins.

La sécante peut être prise non tangente à la courbe S. Si, de plus, le rayon CO n'est pas tangent à cette courbe, un rayon issu de C, et à distance du premier ordre de O, coupe S en des points à distance du premier ordre de ce point O, et en même nombre que la sécante considérée. Il y a donc sur ce rayon le même nombre de segments compris entre des points correspondants infiniment voisins de O, et du même ordre que sur les différents rayons considérés en premier lieu. Donc :

Théorème IV. — *S'il existe une correspondance entre les points de deux courbes situés sur les droites issues d'un point fixe* C, *et que* O *soit un point commun aux deux courbes, où aucune des tangentes à l'une d'elles ne passe en* C, *le nombre des couples de points correspondants, confondus en* O, *est égal à la somme des ordres des segments compris entre deux points correspondants infiniment voisins de* O, *et situés sur une droite issue de* C *dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

On remarquera encore que : *si* ρ *est le nombre des segments d'ordre* α, *le produit* $\rho\alpha$ *est toujours un nombre entier.*

II. — DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. CHASLES SUR LES SYSTÈMES DE CONIQUES DANS LE PLAN.

Étant donné un système plan de coniques, prenons dans le plan du système une droite arbitraire Δ, et une origine a sur cette droite. Soient m et m' les points où une conique du système rencontre Δ. Considérons la courbe dont les coordonnées rectilignes sont $x = \frac{1}{2}(am + am')$, $y = \frac{am.am'}{K}$, K étant une longueur constante. A chaque conique du système correspond un point de cette courbe, et à chaque point de la courbe correspond une conique. Pour abréger le langage, j'appellerai cette courbe *indicatrice* du système relative à la droite Δ. Je vais démontrer qu'*elle a pour degré la première caractéristique du système.*

Soit μ cette caractéristique. Considérons, pour un instant, la courbe dont les coordonnées ξ, η sont am et am'. Elle est de degré 2μ, symétrique par rapport à la bissectrice des axes de coordonnées, et elle a, à l'infini, sur

chacun des axes, un point multiple d'ordre μ. Les points de cette courbe, pour lesquels $am + am'$ a une valeur donnée, sont sur une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie. Ils sont donc en nombre 2μ et disposés symétriquement par rapport à cet axe. Ils répondent à μ coniques. En second lieu, les points, pour lesquels $am.am'$ a une valeur donnée, sont sur une hyperbole qui coupe la courbe en 4μ points, dont 2μ sont à l'infini et 2μ disposés symétriquement par rapport à l'axe de symétrie. Ces derniers répondent donc également à μ coniques. Donc, dans l'indicatrice, à chaque valeur de x ou de y répondent μ coniques du système et μ valeurs de y ou de x. D'ailleurs, x et y ne deviennent infinis qu'ensemble, pour les coniques ayant une asymptote parallèle à Δ. Donc l'indicatrice est de degré μ.

Un couple quelconque de points m et m' de la droite Δ peut être représenté sur le plan par un point dont les coordonnées sont : $x = \frac{1}{2}(am + am')$, $y = \frac{am.am'}{K}$. Deux points m et m' qui coïncident sont représentés par un point situé sur la parabole P dont l'équation est $Ky = x^2$. Si le point (x, y) décrit une ligne droite $Ax + By + C = 0$, les points m et m' sont liés par la relation $\frac{A}{2}(am + am') + B.am.am' + C = 0$, qui est l'équation générale de deux divisions homographiques *en involution*, sur la droite Δ. Donc : *Chaque droite du plan représente deux divisions en involution sur Δ, et inversement.* Par suite, *les deux points d'intersection d'une droite et de la parabole* P *représentent les deux points doubles de l'involution. Toute droite tangente à cette parabole représente une involution où les deux points doubles coïncident, c'est-à-dire une seule série de points variables sur Δ, et un point fixe dont la distance à l'origine sur Δ est égale à l'abscisse du point de contact.* Et, par suite, *chaque point du plan représente deux points sur Δ, dont les distances à l'origine sur cette droite sont les abscisses des points de contact des tangentes à la parabole issues du point considéré.*

Considérons maintenant les μ intersections d'une droite D et de l'indicatrice J d'un système de coniques. Ces μ points répondent aux μ coniques qui divisent harmoniquement le segment de Δ compris entre les points de cette droite correspondant aux points d'intersection de D et de la parabole P. Si la droite D est tangente à P, ces μ coniques passent au point de Δ correspondant au point de contact. Ainsi *les μ points d'intersection de l'indicatrice et d'une tangente à la parabole répondent à μ coniques se coupant sur Δ.*

Si la tangente à la parabole est en même temps tangente à l'indicatrice, deux de ces coniques sont infiniment voisines. Ainsi *le point de contact avec la parabole d'une tangente commune à cette courbe et à l'indicatrice représente un point où Δ coupe l'enveloppe du système de coniques.*

Les 2μ points d'intersection de l'indicatrice et de la parabole répondent

aux coniques qui coupent Δ en deux points réunis. Parmi ces coniques, les unes sont des coniques ordinaires tangentes à Δ, les autres sont des coniques réduites à une droite, que j'appellerai, pour abréger, des *droites-coniques*.

Il faut remarquer que les points répondant aux premières sont de simples points d'intersection des deux courbes. Car, s'il y avait contact, cela indiquerait que la droite Δ touche une conique du système en un point où cette conique touche l'enveloppe du système. La droite Δ serait donc tangente à cette enveloppe, ce qui n'aura pas lieu si la droite Δ est quelconque. En second lieu, si un de ces points était multiple dans l'indicatrice, cela indiquerait qu'il y correspond, ou une conique multiple tangente à Δ, ou deux coniques tangentes à Δ au même point ; ce qui n'aura pas lieu non plus, si la droite μ est quelconque. Par suite, si ω désigne le nombre des points d'intersection des deux courbes afférents aux droites-coniques, et ν la deuxième caractéristique du système, on a $\nu = 2\mu - \omega$.

Au contraire, aux points correspondants à des droites-coniques, il peut arriver que, quelle que soit la droite Δ, l'indicatrice soit multiple et touche la parabole P. Quand ce fait se produit, la droite-conique figure pour plusieurs unités dans le nombre ω. On dit alors d'habitude qu'elle est *multiple*. Il me paraît convenable de désigner par *ordre de multiplicité* de la droite-conique le nombre des branches de l'indicatrice au point correspondant. J'appellerai *valeur* de la droite conique le nombre des unités pour lesquelles elle figure dans ω. Cette valeur peut différer beaucoup de l'ordre de multiplicité, et être multiple quand ce dernier est l'unité. L'application du théorème II va servir à mettre en évidence les éléments géométriques qui déterminent la valeur d'une droite-conique dans un système.

Soit, sur l'indicatrice J, un point O répondant à une droite-conique, et, par suite, situé sur la parabole P. Menons une sécante arbitraire à distance du premier ordre du point O. Soit π le point voisin de O où elle coupe P, et et p un des points voisins de O où elle coupe J. Sur la droite Δ, soit M le point représenté par O, μ par π, et m, m' les deux points représentés par p. Le segment $M\mu$ est infiniment petit du premier ordre. Soit μ_1 le point de Δ représenté par le second point d'intersection de la sécante et de P. Le segment $M\mu_1$ est fini.

Pour trouver la valeur de la droite-conique, il suffit de faire la somme des ordres des segments $p\pi$. Soit θ l'angle de la sécante et de l'axe Ox. Chaque segment $p\pi$ est égal à la différence des abscisses des points p, π divisée par $\cos\theta$; c'est-à-dire, en désignant par C le milieu de mm', à $\frac{C\mu}{\cos\theta}$. Mais $C\mu = \frac{\overline{Cm}^2}{C\mu_1}$. Chaque segment a donc pour longueur $\frac{\overline{Cm}^2}{C\mu_1 \cos\theta}$, et est de l'ordre de $\overline{Cm}^2$. Ainsi, *pour trouver la valeur de la droite-conique, il suffit de*

chercher les coniques infiniment aplaties qui divisent harmoniquement un segment dont une extrémité est à distance infiniment petite du premier ordre de la droite-conique, et de faire la somme des ordres des carrés des segments interceptés par ces coniques. Si la sécante est perpendiculaire à l'axe Ox, le point p_1 est à l'infini ; mais $Cp_1 \cos\theta$ reste fini et devient égal à K. Par suite, *la même règle s'applique en considérant les coniques qui interceptent sur une droite des segments dont le milieu est à distance du premier ordre de la droite-conique.*

On parvient au même résultat en considérant directement les segments interceptés par les courbes sur une sécante parallèle à Oy, à distance λ du premier ordre de O. Un point p infiniment voisin de O sur cette sécante et sur l'indicatrice répond à une conique coupant Δ en deux points m, m', dont le milieu est à distance λ du point M. En désignant par σ le demi-segment mm', on a

$$\frac{am + am'}{2} = aM + \lambda, \quad \frac{am.am'}{K} = \frac{(aM+\lambda)^2}{K} - \frac{\sigma^2}{K};$$

$\frac{am.am'}{K}$ et $\frac{(aM+\lambda)^2}{K}$ sont les ordonnées de deux points de la sécante, situés sur l'indicatrice et sur la parabole. Le segment intercepté par ces deux courbes est donc $\frac{\sigma^2}{K}$.

Les coefficients angulaires des différentes tangentes à l'indicatrice en O sont les différentes valeurs de $\frac{\lambda(2aM+\lambda) - \sigma^2}{K\lambda}$, ou $\left(\frac{2aM}{K} - \frac{\sigma^2}{K\lambda}\right)$. Je vais montrer que $\frac{\sigma^2}{\lambda}$ ne peut être infini, si la droite Δ est quelconque ; c'est-à-dire qu'il ne saurait y avoir, dans ce cas, une tangente en O parallèle à l'axe des y.

Dans une conique, dont les axes sont a et b, si une droite Δ fait, avec l'axe b, l'angle φ, le diamètre conjugué de sa direction Δ' fait, avec l'axe a, l'angle χ, tel que l'on ait $\operatorname{tang}\chi = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi$. Si la conique est infiniment aplatie, c'est-à-dire si le rapport $\frac{b}{a}$ est infiniment petit et égal à ε, χ est de l'ordre de ε^2, dès que φ est fini. Si D est une droite faisant un angle infiniment petit ψ avec l'axe a, et coupant cet axe en un point d, les droites D et Δ' interceptent sur Δ un segment de l'ordre de $(\psi - \chi)$, si le point d n'est pas infiniment voisin de Δ, ce qui n'arriverait que pour des droites particulières Δ.

Supposons maintenant que D soit la droite-conique d'un système, et que la conique infiniment aplatie considérée soit une conique du système,

voisine de D ; le segment dont il vient d'être question est précisément la longueur λ. Donc λ est de l'ordre de $(\psi - \chi)$; d'ailleurs, σ est de l'ordre de ε. Puisque χ est de l'ordre de ε^2, le rapport de σ^2 à λ ne peut être infini que si ψ est du même ordre que χ, et si la différence $(\psi - \chi)$ est d'ordre supérieur, ce qui nécessiterait une direction déterminée pour la droite Δ. Donc, la droite Δ étant quelconque, la droite menée par O parallèlement à l'axe des y n'est pas tangente à l'indicatrice.

On voit, de plus, que le cas où λ est de l'ordre de σ^2 est le seul où l'indicatrice ne soit pas tangente à la parabole. Pour que ce fait se produise, il faut et il suffit que l'angle ψ soit d'un ordre égal ou supérieur à celui de σ^2. On en conclut : *si une droite-conique a pour valeur l'unité, le déplacement angulaire du grand axe, dans les coniques voisines, est d'un ordre égal ou supérieur au second, relativement à l'angle des asymptotes.*

Si λ est de l'ordre de σ, et qu'il n'y ait qu'une branche d'indicatrice au point O, il y a simple contact entre cette courbe et la parabole; la valeur de la droite-conique est 2. C'est le cas où *le déplacement angulaire de l'axe est du même ordre que l'angle des asymptotes.*

Soit λ infiniment petit par rapport à σ, mais d'ordre moindre que 2 relativement à σ, par exemple d'ordre $\left(2 - \frac{p}{q}\right)$, $\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible de numérateur impair. σ^2 est alors de l'ordre de $\lambda^{\frac{2}{2-\frac{p}{q}}}$, ou de l'ordre $\frac{2q}{2q-p}$, λ étant censé du premier. Or, d'après une remarque faite à la suite du théorème II, le nombre ρ des segments interceptés entre l'indicatrice et la parabole, qui sont de l'ordre $\frac{2q}{2q-p}$, est tel que $\rho \frac{2q}{2q-p}$ est un nombre entier. Donc ρ est un multiple de $(2q-p)$; et, par suite, la valeur de la droite-conique est égale ou supérieure à $2q$, suivant qu'il n'y aura pas ou qu'il y aura d'autres segments.

Si le numérateur p est pair et égal à $2p'$, on trouvera de même que la valeur de la droite-conique est au moins égale à q.

Dans le premier cas, q est au moins égal à 2, dans le second à 3. Donc la valeur de la droite-conique est toujours supérieure à 2.

Soit maintenant λ infiniment grand par rapport à σ, de façon que σ soit de l'ordre $\left(\frac{p}{q}\right)$ $(p > q)$, λ étant du premier. $\frac{p}{q}$ étant irréductible, on voit comme ci-dessus que : 1° si q est impair, la valeur de la droite-conique est au moins $2p$, qui ne peut être moindre que 4 ; 2° si q est pair, elle est au moins égale à p qui ne peut être moindre que 3.

Les éléments géométriques qui déterminent la valeur d'une droite-conique étant ainsi nettement mis en évidence de la manière la plus générale, il va

être facile de trouver le nombre des coniques d'un système qui satisfont à une condition donnée.

Soit un système de coniques A dans le plan. Prenons une conique fixe quelconque Σ. Par les points d'intersection de chaque conique A et de Σ menons les coniques A_1 qui satisfont à une condition donnée. Soit a le nombre des coniques qu'on peut mener par quatre points et satisfaisant à cette condition. Les coniques A_1 forment un système dont chaque conique répond à une conique A coupant Σ aux mêmes points; et à chaque conique A répondent a coniques A_1. Deux pareilles coniques A et A_1 seront dites *correspondantes*. Sur une sécante Δ, deux coniques correspondantes et la conique fixe Σ déterminent une involution, dont deux points, ceux de Σ, sont fixes. Par suite, les indicatrices J, J_1 de ces deux systèmes, relatives à une même droite Δ, sont deux courbes dont les points se correspondent de la manière définie au théorème III. De plus, l'indicatrice J_1, ainsi que l'indicatrice J, ne passe pas au point C, représentatif des deux points de Σ sur Δ. Donc, d'après le théorème III, l'indicatrice J_1 est de degré $a\mu$, puisque J est de degré μ; en second lieu, le nombre des couples de points correspondants confondus sur ces deux courbes est aussi $a\mu$. Si ces $a\mu$ points répondent à des coniques ordinaires A, ils répondent en même temps à des coniques ordinaires A_1 qui se confondent avec leurs correspondantes A. Ce sont des coniques communes aux deux systèmes. Mais il n'en est pas ainsi, en général; et quelques-uns de ces points répondent à des coniques infiniment aplaties. Il faut donc trouver le nombre de ces points, et, en le retranchant de $a\mu$, on aura le nombre des coniques ordinaires du système A qui satisfont à la condition donnée.

Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrilatère, a le point de concours des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$; b celui des côtés $\beta\gamma$, $\delta\alpha$; et c le point de concours des diagonales $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ (*). A la condition, pour une conique, de passer par les points α, β, γ, δ, on peut substituer celle de passer en l'un d'eux α, et de toucher en t, t', sur la droite bc, deux droites at, at' formant avec ab et ac un faisceau harmonique. Si l'on cherche les coniques qui passent aux quatre points donnés et satisfont à une condition donnée, cette condition servira à déterminer l'arbitraire qui subsiste dans le couple de droites at, at'.

Si les droites $b\beta$ et $b\alpha$ font un angle infiniment petit θ, les mêmes choses subsistent. Mais, par la nature de la condition considérée, il peut arriver que, parmi les couples de droites at, at' que cette condition détermine, les uns diffèrent du couple $a\alpha$, $a\delta$, les autres en soient infiniment peu différents. Pour qu'une conique ainsi déterminée ne soit pas infiniment aplatie, il faut et il suffit que les droites at, at' fassent respectivement avec les droites $a\alpha$, $a\delta$ des angles infiniment petits du second ordre par rapport aux longueurs

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ou par rapport à l'angle 0, si l'on suppose le point b à distance finie des côtés du quadrilatère. Le nombre des couples de droites at, at', satisfaisant à cette condition, marquera le nombre des coniques ordinaires passant aux quatre points donnés et satisfaisant à la condition donnée.

Les autres couples de droites at, at' déterminent des coniques infiniment aplaties. Si les droites at, at' font avec $a\alpha$, $a\delta$ respectivement des angles finis, la conique infiniment aplatie correspondante a ses sommets, qui sont infiniment voisins de t et t', à des distances finies des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ du quadrilatère. Si, au contraire, ces angles sont de l'ordre des longueurs $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, les sommets sont infiniment voisins des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ du quadrilatère. Mais il est aisé de voir que ce dernier fait ne se produira que si le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ a quelque liaison avec la condition donnée, et non pas s'il est absolument quelconque.

Considérons, en effet, le système des coniques qui satisfont à la condition donnée, ont la droite bc pour polaire du point a et touchent la droite at au point t sur bc. Le point de contact des secondes tangentes menées de a aux coniques de ce système décrit une ligne, et vient en t' quand la conique variable devient infiniment aplatie. Ce point t' est donc déterminé par la condition, le point a, la droite bc, et le point t. Donner ce dernier équivaut à donner le côté $\alpha\beta$ du quadrilatère. Mais, avec ces données, le quadrilatère n'est pas déterminé, et le côté $\delta\gamma$ peut être sur une droite quelconque issue de a. Donc, pour que les droites at et at' fassent, avec les droites $a\alpha$, $a\gamma$, des angles du même ordre que les côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ respectivement, le quadrilatère doit être particularisé ; et ce fait ne saurait se produire s'il est absolument quelconque relativement à la condition donnée.

En particulier, si ce quadrilatère est formé par les points d'intersection d'une conique fixe Σ avec une conique infiniment aplatie d'un système A, on voit qu'on peut évidemment choisir la conique Σ de manière à ce que ce fait ne se produise pas.

Ceci établi, soit b le nombre des couples de droites at, at', faisant avec $a\alpha$, $a\gamma$ des angles finis, déterminés par la condition donnée. A chaque conique infiniment aplatie du système A, correspondent $a - b$ coniques ordinaires, et b coniques infiniment aplaties. Puisqu'il n'y a aucune liaison entre le système proposé et la condition donnée, les couples de droites at et at', relatives à deux coniques infiniment aplaties correspondantes, diffèrent. D'ailleurs, la conique Σ étant quelconque, les segments $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ interceptés sur cette conique par une conique infiniment aplatie A sont infiniment petits de l'ordre de l'angle de ses asymptotes ; et, en second lieu, les points t et t' de contact des tangentes, issues d'un point a, à la conique infiniment aplatie A_1, étant à distance finie, les mêmes segments sont aussi de l'ordre de l'angle des asymptotes de cette dernière conique. Donc, sur une droite

quelconque Δ, deux coniques infiniment aplaties correspondantes A et A_1 déterminent deux segments infiniment voisins et du même ordre, qui est celui de l'angle des asymptotes de A. D'ailleurs, les extrémités de ces segments sont à des distances du même ordre, puisque les sommets des deux coniques infiniment aplaties diffèrent. Il en résulte aisément que la distance du milieu de ces segments est de l'ordre de leurs carrés.

En effet, dans une conique infiniment aplatie, les polaires de tous les points du plan non infiniment rapprochés du grand axe font entre elles des angles de l'ordre du carré de l'angle des asymptotes. Dans les deux coniques A et A_1, les polaires d'un même point du plan, ou les diamètres conjugués d'une même direction, font donc des angles du second ordre (l'angle des asymptotes de A étant admis être du premier ordre) avec la droite bc qui est, pour toutes deux, la polaire du point a. Les diamètres conjugués d'une même droite Δ, relativement aux deux coniques, font donc entre elles un angle du second ordre relativement aux segments interceptés sur cette droite.

Revenons maintenant à la considération des indicatrices, J et J_1, des deux systèmes A et A_1. Puisque, à chaque conique infiniment aplatie A correspondent b coniques également aplaties A_1, et que la distance des milieux des cordes interceptées par une conique A et une conique A_1 correspondantes sur Δ est de l'ordre du carré de ces cordes, il en résulte qu'à chaque point p de J, infiniment voisin du point O, correspondent b points p_1 de J_1, situés sur la droite Cp, et dont les distances au point p sont de l'ordre du carré de la corde interceptée sur Δ par la conique répondant au point p.

Par suite, la distance de deux pareils points p, p_1 est du même ordre que la distance du point p au point π où la même droite coupe la parabole P, puisqu'on a démontré plus haut que $p\pi$ est de l'ordre du carré de cette corde.

Si l'on mène par C une sécante dont la distance à O soit du premier ordre, comme la droite CO n'est pas tangente à J, la somme des ordres des segments pp_1 terminés par des points correspondants de J et de J_1 sur cette sécante marque, d'après le théorème IV, le nombre des couples de points correspondants confondus en O. Mais chacun de ces segments est de l'ordre d'un segment $p\pi$; et, à chacun des segments $p\pi$, répondent b segments pp_1 du même ordre que $p\pi$.

La somme dont il s'agit est donc marquée par celle des ordres des segments $p\pi$ répétée b fois, c'est-à-dire b fois la valeur de la droite-conique répondant au point O.

Par suite, le nombre total des couples de points correspondants confondus, qui répondent à des droites-coniques des deux systèmes, est égal à b fois la somme des valeurs des droites-coniques du premier système. En désignant cette somme par ω, on a, pour le nombre des coniques ordinaires com-

munes aux deux systèmes, $N = a\mu - b\omega$; et, en mettant pour ω sa valeur $(2\mu - \nu)$, on a $N = (a - 2b)\mu + b\nu$. Cette formule exprime le théorème de M. Chasles, qui se trouve ainsi entièrement démontré (*).

Sur la résolvante de deux équations du second degré;
par M. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 2 avril 1873)

Pour résoudre un système de deux équations du second degré à deux inconnues :

$$S = Ax^2 + 2Bxy + \ldots + F = 0, \quad S' = A'x^2 + \ldots + F' = 0,$$

on lui substitue ordinairement le système équivalent

$$(1) \qquad S + \lambda_1 S' = 0, \quad S + \lambda_2 S' = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant tellement choisis que les premiers membres de ces équations se décomposent en un produit de facteurs linéaires. On pose, pour abréger,

$$S + \lambda S' = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f;$$

et l'on sait que λ_1 et λ_2 doivent être racines de l'équation du troisième degré :

$$(2) \qquad \Delta = \frac{1}{c}\left[(be - cd)^2 - (b^2 - ac)(e^2 - cf)\right] = 0.$$

Il peut être bon, pour l'étude algébrique du système proposé, de voir, par la forme de cette équation, qu'elle admet généralement une ou trois racines réelles et rendant positives les quantités $H = b^2 - ac$, $K = e^2 - cf$; cette triple condition étant nécessaire pour que $S + \lambda S'$ se décompose en un produit de facteurs réels. L'équation (2) prouvant que H et K sont de même signe, il suffit d'établir que H est > 0 pour une ou trois racines de l'équation.

Si H conserve le même signe pour toutes les valeurs de λ, ce sera le signe $+$, qui est en évidence pour $\lambda = -\frac{C}{C'} = \lambda'$, car H se réduit alors à b^2. Dans ce cas, la racine, ou les trois racines réelles de l'équation (2), donnent pour $S + \lambda S'$ des facteurs réels.

(*) Depuis que ces lignes ont été écrites, une démonstration analytique de ce théorème a été donnée par M. Clebsch, dans les *Mathematische Annalen*. Je suis, depuis longtemps, en possession d'une démonstration analytique très-simple de la même proposition, que j'aurai occasion d'exposer en un autre moment.

Supposons au contraire que H s'annule pour $\lambda = \mu$ et $\lambda = \nu$, et que de plus λ' soit compris entre ces deux quantités; H sera positif pour les valeurs de λ renfermées dans le même intervalle. Mais μ et ν substitués à λ dans Δ font prendre à ce polynôme le signe de c, qui n'est pas le même pour les deux. L'équation (2) aura donc une ou trois racines comprises entre μ et ν, et par suite rendant $H > 0$. Dans le cas où λ' serait en dehors de l'intervalle μ, ν, ces nombres mis à la place de λ dans Δ lui feraient prendre des valeurs de même signe ; l'équation (2) aurait donc une ou trois racines réelles en dehors de l'intervalle, et c'est alors précisément la condition pour qu'elles rendent $H > 0$.

Si une des racines de l'équation (2) annule H, on considérera K qui donne lieu aux mêmes résultats ; et notre analyse ne sera en défaut que si cette racine annule à la fois Δ, H et K. Mais il est évident qu'alors $be - cd$, H et K ayant un facteur commun, l'équation (2) aura une racine double qui fera de $S + \lambda S'$ un carré parfait réel ; quant à la troisième racine, elle peut aussi bien donner une décomposition en facteurs réels qu'imaginaires. Ce dernier cas fait exception à la proposition générale, et se présente quand le système proposé admet deux solutions doubles et imaginaires.

Rien de plus facile que d'achever algébriquement la discussion du système (1), qui peut prendre les formes :

$$MN = 0, \quad PQ = 0;$$
$$MN = 0, \quad P^2 + Q^2 = 0;$$
$$(M + N\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1}) = 0, \quad (M - N\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1}) = 0,$$

auxquelles répondent 4, 0 ou 2 solutions réelles. Le cas où l'équation (2) a des racines égales s'étudie en écrivant que ces racines ont une différence qu'on fait tendre vers zéro. Ainsi, dans le cas d'une racine triple, le système (1) prend la forme

$$MN = 0, \quad \left(M + h\frac{dM}{d\lambda} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2M}{d\lambda^2} + \ldots\right)\left(N + h\frac{dN}{d\lambda} + \ldots\right) = 0;$$

ou, à la limite,

$$MN = 0, \quad M\frac{dN}{d\lambda} + N\frac{dM}{d\lambda} = 0.$$

Les quatre solutions sont :

$$M = 0, \ N = 0; \ M = 0, \frac{dM}{d\lambda} = 0; \ N = 0, \ M = 0; \ N = 0, \frac{dN}{d\lambda} = 0.$$

Mais ces solutions doivent aussi satisfaire à l'équation

$$\left(M + k\frac{dM}{d\lambda} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2M}{d\lambda^2} + \ldots\right)\left(N + k\frac{dN}{d\lambda} + \ldots\right) = 0,$$

qui, en tenant compte des deux premières, se réduit, à la limite, à

$$M\frac{d^2N}{d\lambda^2}+2\frac{dM}{d\lambda}\frac{dN}{d\lambda}+N\frac{d^2M}{d\lambda^2}=0.$$

Pour que la solution $M=0$, $N=0$ y satisfasse, il faut que $\frac{dM}{d\lambda}$ ou $\frac{dN}{d\lambda}$ s'annule en vertu des deux premières relations, ce qui rend la deuxième ou la quatrième solution (3) identique à la première et à la troisième. Il y a solution triple.

Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace;
par M. Camille Jordan.

(Séance du 2 avril 1873)

Nous nous proposons d'établir, dans cette note, que les équations qui définissent analytiquement le mouvement d'une figure plane dans son plan fournissent immédiatement, outre les principaux théorèmes déjà connus relativement à ce mouvement, une classe étendue de propositions nouvelles. Appliquant ensuite les mêmes principes au mouvement d'un solide dans l'espace, nous obtiendrons une série de théorèmes analogues, quoique moins élégants.

I

Considérons une figure plane en mouvement dans son plan. Soient x_0, y_0 les coordonnées de l'un de ses points à l'instant initial; ses coordonnées au bout du temps t seront données par les formules

$$(1)\qquad x=ax_0+by_0+\alpha,\quad y=bx_0+ay_0+\beta,$$

a, b, α, β étant des fonctions de t liées par la relation $a^2+b^2=1$, où a et b désignent le sinus et le cosinus de l'angle dont la figure a tourné.

Désignons par x^m, y^m, a^m, ... les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de x, y, a, ... par rapport à t, suivant la notation de Lagrange; on aura, en différenciant les équations (1),

$$x^m=a^mx_0+b^my_0+\alpha^m,\quad y^m=b^mx_0+a^my_0+\beta^m.$$

Posons, pour abréger,

$$x^mx^n+y^my^n=A_{mn},\quad x^my^n-x^ny^m=B_{mn}.$$

On voit sans peine qu'en remplaçant x^m, y^m, x^n, y^n par leurs valeurs, ces expressions seront de la forme

$$A_{mn}=(a^ma^n+b^mb^n)(x_0^2+y_0^2)+Mx_0+Ny_0+P,$$
$$B_{mn}=(a^nb^m-a^mb^n)(x_0^2+y^2)+M'x_0+N'y_0+P'.$$

Donc le lieu des points, pour lesquels A_{mn} aura une valeur constante k, sera un cercle. En faisant varier k, on obtiendra une série de cercles concentriques.

De même pour le lieu des points pour lesquels B_{mn} est constant.

Les points pour lesquels on aura $A_{mn} = kA_{\mu\nu}$ seront encore sur des cercles, passant tous par les points d'intersection des deux cercles $A_{mn} = 0$, $A_{\mu\nu} = 0$.

De même pour le lieu des points qui satisfont à l'une des équations $A_{mn} = kB_{\mu\nu}$, $B_{mn} = kB_{\mu\nu}$.

La signification géométrique des quantités A_{mn}, B_{mn} est évidente. Désignons en effet par D_m la droite dont les projections sur les axes coordonnés sont x^m, y^m; soit en outre (D_mD_n) l'angle des deux droites D_m et D_n; on aura évidemment

$$A_{mn} = D_mD_n \cos(D_mD_n), \quad B_{mn} = D_mD_n \sin(D_mD_n),$$

car B_{mn} représente, comme on sait, l'aire du triangle formé sur les deux droites D_m et D_n.

En nous bornant aux dérivées du second ordre, nous remarquerons que D_0 désigne le rayon vecteur du point (x, y), D_1 sa vitesse, D_2 son accélération, $D_2 \cos(D_1D_2)$ et $D_2 \sin(D_1D_2)$ les accélérations tangentielle et normale; et celles des relations précédentes, dans lesquelles figurent ces seules quantités, nous donneront un cercle pour chacun des lieux suivants :

1° Vitesse aréolaire constante $B_{01} = k$;

2° Vitesse constante $A_{11} = k$ (théorème connu);

3° Accélération constante $A_{22} = k$ (théorème connu);

4° Rapport constant entre la vitesse D_1 et l'une quelconque des trois accélérations D_2, $D_2 \cos(D_1D_2)$, $D_2 \sin(D_1D_2)$;

5° Angle constant entre la vitesse et l'accélération (théorème connu dans le cas où cet angle est nul ou égal à 90°); etc.

On doit remarquer d'ailleurs que tous ces théorèmes s'étendent au cas où l'on considérerait, au lieu d'un mouvement continu, une suite de déplacements finis. Les quantités x^m, y^m, au lieu de désigner les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de x, y, représenteraient leurs différences $m^{\text{ièmes}}$.

Remarquons encore qu'il n'a été fait aucun usage de l'équation de condition $a^2 + b^2 = 1$. Nos résultats subsisteraient donc encore en supposant que la figure considérée éprouve dans le cours de son déplacement des mouvements de contraction ou de dilatation, les mêmes dans tous les sens.

II

Passons au mouvement d'un solide dans l'espace. Le point dont les coordonnées initiales étaient x_0, y_0, z_0 aura pour coordonnées à un instant quelconque

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + \alpha, \\ y = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + \beta, \\ z = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + \gamma, \end{cases}$$

$a_{11}, \ldots, \gamma$ étant des fonctions de t satisfaisant, comme on sait, aux six équations de condition

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{\rho 1}^2 + a_{\rho 2}^2 + a_{\rho 3}^2 = 1 \quad (\rho = 1, 2, 3), \\ a_{\rho 1}a_{\sigma 1} + a_{\rho 2}a_{\sigma 2} + a_{\rho 3}a_{\sigma 3} = 1 \quad (\sigma \lessgtr \rho); \end{cases}$$

en outre, le déterminant des a doit être égal à $+1$.

En différentiant les équations (2), on voit que les $m^{\text{ièmes}}$ dérivées des coordonnées x^m, y^m, z^m s'expriment chacune par des fonctions linéaires de x_0, y_0, z_0. Soit, comme précédemment, D_m la ligne dont ces dérivées sont les projections respectives sur les axes coordonnés; on aura immédiatement les résultats suivants :

Le lieu des points pour lesquels D_m a une direction constante est défini par les équations

$$x^m : y^m : z^m :: p : q : r,$$

p, q, r étant les constantes qui définissent la direction donnée. Ce sera une droite, comme on le voit en remplaçant les dérivées par leurs valeurs en x_0, y_0, z_0.

Le lieu des points pour lesquels D_m est parallèle à un plan donné sera le plan défini par les équations

$$x^m \cos\varphi + y^m \cos\psi + z^m \cos\chi = 0,$$

φ, ψ, χ étant les angles que la normale au plan donné fait avec les axes.

Plus généralement, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'un cône de degré r passant par l'origine. Le lieu des points pour lesquels D_m est parallèle à une génératrice de ce cône sera un cône du même degré $F(x^m, y^m, z^m) = 0$, dont le sommet S sera défini par les trois équations linéaires $x^m = y^m = z^m = 0$. Si ces trois équations sont incompatibles, le cône se changera en un cylindre.

Le lieu des points, pour lesquels on aura

$$D_m^2 = x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = \text{une constante } k^2,$$

sera un ellipsoïde ayant son centre en S, point pour lequel $D_m = 0$. Si les trois équations du point S sont incompatibles, les ellipsoïdes se réduiront à des cylindres concentriques, dont l'axe sera le lieu des points pour lesquels D_m est minimum.

On sait que cette circonstance se présente en général pour la ligne D_1. Ce résultat connu se déduirait très-facilement des équations de condition (3), dont nous n'avons pas tenu compte, Il est aisé de voir au contraire que si $m > 1$, les équations $x^m = y^m = z^m = 0$ sont en général compatibles.

Le lieu des points pour lesquels on a

$$(4) \qquad D_m D_n \cos(D_m D_n) = x^m x^n + y^m y^n + z^m z^n = \text{constante}$$

sera une surface du second degré. Celui des points qui satisfont à la relation

$$(5) \quad [D_m D_n \sin(D_m D_n)]^2 = (x^m y^n - x^n y^m)^2 + (y^m z^n - y^n z^m)^2 + (z^m x^n - z^n x^m)^2 = k^2$$

sera une surface du quatrième ordre.

En particulier, le lieu des points pour lesquels $(D_m D_n) = 0$ s'obtiendra en posant $k = 0$. Ce sera l'intersection commune des trois hyperboloïdes

$$x^m y^n - x^n x^m = 0, \quad y^m z^n - y^n z^m = 0, \quad z^m x^n - z^n x^m = 0.$$

Les deux premiers hyperboloïdes ont pour intersection la droite $y^m = y^n = 0$ et une cubique gauche, qui constituera à elle seule le lieu cherché, la droite n'étant pas sur le troisième hyperboloïde.

En divisant la formule (5) par le carré de la formule (4), on voit que le lieu des points pour lesquels $(D_m D_n)$ est une constante, différente de 0 et de $\frac{\pi}{2}$, sera une surface du quatrième ordre. Mais si $(D_m D_n) = \frac{\pi}{2}$, on aura $x^m x^n + y^m y^n + z^m z^n = 0$, équation d'une surface du second degré..

Le lieu des points pour lesquels D_p est perpendiculaire à D_m et à D_n sera une biquadratique gauche. Enfin il y aura huit points pour lesquels D_m, D_n et D_p seront rectangulaires.

Le tétraèdre formé sur les trois lignes D_m, D_n, D_p a pour volume, comme on le sait, le déterminant Δ_{mnp} formé avec les quantités x^m, y^m, z^m; x^n, y^n, z^n; x^p, y^p, z^p. En l'égalant à une constante, on aura pour lieu une surface du troisième ordre.

En particulier, si le déterminant est nul, les trois droites D_m, D_n, D_p seront dans un même plan.

Le lieu des points pour lesquels quatre droites D_m, D_n, D_p, D_q sont dans un même plan sera l'intersection commune des surfaces du troisième ordre

$$\Delta_{mnp} = 0, \quad \Delta_{mnq} = 0; \quad \Delta_{mpq} = 0, \quad \Delta_{npq} = 0.$$

Les deux premières surfaces se coupent suivant la cubique gauche, lieu des points pour lesquels $(D_m D_n) = 0$, et suivant une courbe complémentaire du sixième ordre, qui sera le lieu cherché.

Enfin les points pour lesquels les cinq droites D_m, D_n, D_p, D_q, D_r sont dans un même plan seront communs aux surfaces

$$\Delta_{mnp} = 0, \quad \Delta_{mnq} = 0, \quad \Delta_{mpr} = 0, \quad \Delta_{pqr} = 0.$$

Ils sont au nombre de neuf. En effet, les trois premières surfaces se coupent en vingt-sept points. Mais neuf d'entre eux sont l'intersection de Δ_{mpr} avec la cubique gauche $(D_m D_n) = 0$; neuf autres sont l'intersection de Δ_{mnq} avec la cubique $(D_m D_p) = 0$. En général, ces dix-huit points n'auront aucune raison d'appartenir à la quatrième surface Δ_{pqr}. Il ne reste donc que neuf points qui satisfassent à la question.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 16 AVRIL 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne communication d'une lettre du secrétaire de la Société astronomique de Berlin, qui accepte le *Bulletin* en échange de sa *Vierteljahrsschrift*; d'une lettre du secrétaire de la Société mathématique de Moscou, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Matematitchesky Sbornik*.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. le général Didion, membre correspondant de l'Institut, à Nancy; Allégret, professeur à la faculté des sciences de Clermont; Collet, agrégé de l'Université, à Lyon; Jully, chef d'institution, à Paris; Th. Lévy, ingénieur, à Paris; Liguine, professeur à l'université d'Odessa; Saint-Loup, professeur à la faculté des sciences de Besançon; Perrin, ingénieur des mines, à Paris; Philippe, ingénieur, à Corbeil.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Allégret communique à la Société une note *Sur la courbe balistique*.

MM. Darboux et Resal déclarent traiter la question de la même manière dans leurs cours.

M. Mathé communique à la Société une note *Sur la modification qu'éprouve une action attractive ou répulsive par suite de la translation du centre d'action.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur certains réseaux formés de courbes algébriques.*

M. Liguine communique à la Société une note *Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes.*

M. Brisse donne lecture, de la part de M. Haag, d'une note *Sur quelques formules relatives aux courbes planes.*

M. Brisse donne lecture, de la part de M. Resal, d'une note *Sur un théorème de Poncelet et sur sa généralisation par M. Horvarth.*

M. le comte Léopold Hugo signale à la Société un carré magique qui se trouve sur une estampe d'Albert Dürer.

M. Brisse donne un moyen simple de reconstituer ce carré magique.

SEANCE DU MERCREDI 30 AVRIL 1873

PRÉSIDÉE PAR M. BIENAYMÉ

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne communication d'une lettre du bibliothécaire de la Société des sciences naturelles de Zürich, qui accepte le *Bulletin* en échange de sa *Vierteljahrsschrift;* d'une lettre du secrétaire de l'Académie des sciences de Vienne, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Sitzungsberichte*. Le secrétaire annonce en outre que l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique accepte le *Bulletin* en échange de ses *Publications;* que l'Académie des sciences de Paris accepte le *Bulletin* en échange de ses *Comptes rendus;* que la Société philomathique de Paris accepte le *Bulletin* en échange de son *Bulletin;* que M. Giusto Bellavitis, professeur à l'université de Padoue, accepte le *Bulletin* en échange de ses *Publications.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Moutier, ancien élève de l'École polytechnique, à Paris ; Catalan, professeur à l'université de Liége ; Émile Mathieu, professeur à la faculté des sciences de Besançon ; Lauth, ingénieur des ponts et chaussées, en Alsace.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Laguerre communique à la Société, de la part de M. Émile Mathieu, un *Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la mécanique analytique.*

M. Camille Jordan communique à la Société un *Mémoire sur les groupes primitifs.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur les caractéristiques.*

M. Halphen communique à la société une note *Sur un problème de probabilités.*

M. Brisse communique à la Société, de la part de M. Brocard, une note *Sur la démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson.*

M. Maurice Lévy communique à la Société une note *Sur l'application des mathématiques à la théorie d'un système de barres métalliques articulées.*

SÉANCE DU MERCREDI 14 MAI 1873

PRÉSIDÉE PAR M. LAFFON DE LADÉBAT

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Enrico d'Ovidio, professeur à l'université de Turin ; Vintéjoux, professeur au lycée Saint-Louis.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur la géométrie de la sphère.*

MM. Darboux, Moutard et Laguerre font quelques remarques à la suite de cette communication.

M. le comte Léopold Hugo dépose sur le bureau une *Proposition relative à l'adoption du méridien du Marboré.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur la courbe balistique ; par M. ALLÉGRET.

(Séance du 16 avril 1873)

Si l'on suppose une loi de résistance représentée par

$$a + bv^n,$$

a, b, n étant trois constantes et v la vitesse du projectile qu'on suppose réduit à un simple point ; les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad v = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy'}{dt} = g + (a + bv^n)\dfrac{y'}{v}, \\ \dfrac{dx'}{dt} = (a + bv^n)\dfrac{x'}{v}, \end{cases}$$

en désignant par x', y' les composantes de la vitesse v par rapport à deux axes, l'un vertical et l'autre horizontal, par t le temps et par g l'accélération due à la pesanteur. On déduit des équations (2), en éliminant dt,

$$(a + bv^n)(x'dy' - y'dx') = gvdx';$$

et en posant

$$(3)\qquad y' = ux',$$

u étant une nouvelle variable auxiliaire, il viendra

$$\frac{dx'}{du} = x'^2 \frac{a + bv^n}{gv} = \frac{a}{g}(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} x' + \frac{b}{g}(1 + u^2)^{\frac{n-1}{2}} x'^{n+1}.$$

Cette dernière équation est celle de Jacques Bernoulli. On la rend linéaire en divisant par x'^{n+1} et faisant

$$(4)\qquad z = x'^{-n},$$

ce qui la transforme en

$$(5)\qquad \frac{dz}{du} + \frac{a}{gn}(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} z + \frac{b}{gn}(1 + u^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0.$$

On intégrera donc sans difficulté l'équation (5) et on aura, au moyen de (4), (3) et (1), x', y', v en fonction de u. Portant ces valeurs dans l'une des équations (2), une nouvelle quadrature donnera ensuite t en fonction de u. Enfin les coordonnées x et y du mobile seront fournies par les formules

$$x = \int x'dt, \qquad y = \int y'dt.$$

Les six quantités x, y, t, x', y' et v dépendront ainsi d'une même variable auxiliaire u. Le problème est donc complétement résolu.

Cette méthode élémentaire permet, comme on voit, de retrouver assez rapidement le résultat signalé par Jacobi, qui comprenait d'ailleurs tout ce qu'on avait obtenu antérieurement sur ce sujet.

Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes;

par M. V. Liguine.

(Séance du 16 avril 1873)

M. Jordan, dans une savante communication faite à la séance du 2 avril 1873, a énoncé un grand nombre de résultats très-intéressants sur les lieux géométriques de divers points singuliers d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, et a trouvé entre autres, pour le lieu des points dont les accélérations d'un ordre quelconque n sont constantes, une surface *générale* du second degré. On peut spécialiser la nature de cette surface dans le cas particulier de $n=1$, c'est-à-dire de l'accélération proprement dite ou du premier ordre, et faire voir que dans ce cas le lieu en question est un *ellipsoïde à trois axes inégaux* ayant pour centre le centre respectif des accélérations du premier ordre.

Cette remarque est une conséquence immédiate des formules données par M. Resal (*) pour les composantes de l'accélération du premier ordre suivant trois axes rectangulaires dans le mouvement le plus général d'un système invariable. Désignons, pour un instant donné t, par ω la vitesse angulaire du système mobile autour de l'axe instantané de rotation et de glissement, par v_g la vitesse de glissement, par U la vitesse orthogonale (*) du système, par θ la vitesse angulaire de l'axe instantané, par φ_1 l'accélération du premier ordre d'un certain point du système, et soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires dont l'origine se trouve dans le point d'intersection de l'axe instantané relatif au temps t avec la plus courte distance de cet axe et sa position infiniment voisine correspondant au temps $t+dt$, et dont les directions sont choisies de manière que l'axe des z soit dirigé suivant l'axe instantané et estimé positif dans le sens dans lequel doit être couché le long de cet axe un observateur ayant les pieds en o et voyant la rotation ω s'effectuer de sa gauche vers sa droite, et que l'axe positif des x soit dirigé suivant la vitesse orthogonale U dans le sens même de cette vitesse. Ces conventions faites, on a, comme l'a démontré M. Resal, pour les composantes $\varphi_{1,x}$, $\varphi_{1,y}$, $\varphi_{1,z}$ de l'accélération φ_1 d'un point $M(x, y, z)$ du système mobile suivant les axes ox, oy, oz, les expressions (**)

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_{1,x} = -\omega^2 x - \dfrac{d\omega}{dt} y + \omega\theta z, \\ \varphi_{1,y} = \dfrac{d\omega}{dt} x - \omega^2 y + \omega U + v_g\theta, \\ \varphi_{1,z} = -\omega\theta x + \dfrac{dv_g}{dt}. \end{cases}$$

(*) Voy. le mémoire de M. Resal *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide*, dans le 37e cahier du *Journ. de l'Éc. polytech.*

(**) *Loc. cit.*; voy. aussi la *Cinématique pure* du même auteur, p. 206, formule (5).

Transportons l'origine des axes ox, oy, oz, sans altérer leurs directions, dans le centre des accélérations du premier ordre relatif au temps t ou dans un point quelconque de l'axe des accélérations du même ordre, si cet axe existe; nommons x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux axes ox, oy, oz et par x', y', z' les coordonnées du point considéré M par rapport aux nouveaux axes. Retranchons respectivement les équations

$$0 = -\omega^2 x_0 - \frac{d\omega}{dt} y_0 + \omega\theta z_0,$$

$$0 = \frac{d\omega}{dt} x_0 - \omega^2 y_0 + \omega U + v_\theta \theta,$$

$$0 = -\omega\theta x_0 + \frac{dv_\theta}{dt},$$

qui déterminent le point (x_0, y_0, z_0), des équations (1), et remplaçons ensuite dans les résultats les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ respectivement par x', y', z'; on trouve ainsi les expressions très-simples pour les composantes de φ_1 :

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_{1,x} = -\omega^2 x' - \dfrac{d\omega}{dt} y' + \omega\theta z', \\ \varphi_{1,y} = \dfrac{d\omega}{dt} x' - \omega^2 y', \\ \varphi_{1,z} = -\omega\theta x'. \end{cases}$$

Ces composantes étant perpendiculaires entre elles, tous les points du système mobile ayant à un instant donné t des accélérations du premier ordre constantes $= p$ doivent satisfaire à la condition

$$\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{1,y}^2 + \varphi_{1,z}^2 = p^2.$$

En portant dans cette égalité les valeurs (2), on obtient, après quelques réductions, l'équation

$$(3) \quad \left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^2\theta^2\right] x'^2 + \left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] y'^2 + \omega^2\theta^2 z'^2 - 2\omega^3\theta x'z' - 2\omega \frac{d\omega}{dt} \theta y'z' = p^2,$$

et c'est cette relation entre x', y', z' qui exprime le lieu géométrique cherché. Or il est facile de s'assurer que l'équation (3) représente un ellipsoïde à troix axes inégaux dont le centre se trouve dans le point (x_0, y_0, z_0). On est donc conduit à ce théorème :

Dans le mouvement le plus général d'un système invariable, les lieux géométriques des points de ce système qui, à un instant considéré, ont des accélérations du premier ordre constantes, sont des ellipsoïdes à trois axes inégaux

dont le centre commun se trouve dans le centre respectif des accélérations du même ordre.

Les expressions des axes de ces ellipsoïdes étant assez compliquées, il n'y a pas d'avantage à transformer l'équation (3) en rapportant la surface à ses diamètres principaux.

Dans le cas où il y a un point fixe dans le système, il faut poser $v_g = 0$, $U = 0$; mais, comme les quantités v_g, U se sont éliminées dans les expressions pour les composantes de φ_1 par le transport de l'origine des axes au centre des accélérations et ne figurent plus dans l'équation (3), on voit que *le théorème énoncé subsiste encore pour ce cas particulier.*

Enfin, dans le cas où le système se déplace parallèlement à un plan fixe, ou, ce qui revient au même, dans le cas du mouvement d'une figure plane dans son plan, il faut poser $v_g = 0$ et $\theta = 0$, et l'équation (3) devient

$$x'^2 + y'^2 = \frac{p^2}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

ce qui montre que, dans ce cas particulier, les ellipsoïdes se transforment en cylindres concentriques à bases circulaires dont l'axe commun est l'axe des accélérations du premier ordre; en d'autres termes :

« Tous les points d'une figure plane qui glisse sur son plan possédant, à un instant considéré, la même accélération du premier ordre p, sont situés sur une circonférence décrite autour du centre respectif des accélérations avec un rayon égal au quotient qu'on obtient en divisant la quantité p par la valeur commune des accélérations premières des points de la figure qui sont situés à l'unité de distance du centre des accélérations. »

Cette propriété particulière des mouvements plans a été énoncée pour la première fois par M. Schell dans son excellent traité de mécanique intitulé : *Theorie der Bewegung und der Kraefte*, p. 383, et étendue par le même savant (*ibid.*, p. 484) au cas le plus général des accélérations d'un ordre quelconque. Sous cette dernière forme, la même propriété fut encore démontrée par une voie complétement différente par M. Somoff, membre de l'académie de Saint-Pétersbourg, dans sa *Cinématique*, p. 338, parue en russe en 1872, ouvrage plein des plus intéressantes recherches sur la mécanique géométrique et ses applications, et extrêmement remarquable par une méthode nouvelle et féconde de démonstration que le savant auteur y développe et qu'on pourrait nommer « méthode des opérations géométriques », car elle consiste dans une extension plus large des principes posés par MM. Bellavitis et de Saint-Venant sur la sommation, soustraction, multiplication et division de droites, considérées en même temps en grandeur et en direction.

Sur un théorème de Poncelet et sa généralisation par M. Horvarth;
par M. H. Resal.

(Séance du 16 avril 1873)

Poncelet, dans son cours lithographié de l'École d'application du génie et de l'artillerie, s'est proposé, en vue de simplifier le calcul de l'effet utile de certaines machines, de remplacer approximativement l'expression $\sqrt{x^2+y^2}$ par $\lambda x+\mu y$, λ et μ étant des constantes qu'il détermine par la condition que l'erreur relative commise soit le moindre possible lorsque le rapport $\frac{y}{x}$ peut varier entre des limites données. Il étudie d'abord par l'analyse le cas où la limite supérieure est infinie, puis il résout géométriquement la question, quelles que soient les limites, en faisant intervenir la considération d'un cône.

Plus tard, M. Horvarth, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, a généralisé le théorème de Poncelet en cherchant à substituer à $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ le trinôme $\lambda x+\mu y+\nu z$, dans des conditions telles qu'en considérant x, y, z comme les composantes suivant trois axes rectangulaires d'une force F, l'erreur relative commise soit aussi petite que possible lorsque la direction de cette force doit être comprise dans l'angle trièdre formé par trois droites données OF_1, OF_2, OF_3. M. Horvarth ne considère qu'une sphère et un plan; sa méthode, appliquée au cas de deux variables, est donc plus simple que celle de Poncelet, mais je crois qu'elle l'est moins que la suivante qui, tout en permettant de mettre les valeurs λ, μ, ν sous une forme élégante, fait reconnaître que la somme géométrique F peut sortir de l'angle trièdre ci-dessus, pourvu qu'elle reste comprise dans le cône droit à base circulaire circonscrit au même angle.

L'erreur relative

$$e=\frac{\lambda x+\mu y+\nu z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

peut se mettre sous la forme

$$(1)\qquad e=\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{\sqrt{x^2+y^2+r^2}}-1,$$

d'après laquelle e n'est autre chose que la différence entre les rayons vecteurs de deux sphères: l'une (A) dont l'équation est

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2-(\lambda x+\mu y+\nu z)=0,$$

et qui passe par l'origine; l'autre (B) ayant pour centre cette origine et dont le rayon est l'unité.

Le moyen qui paraît le plus avantageux pour atteindre le but proposé consiste à exprimer que e est négatif et a la même valeur absolue pour les droites OF_1, OF_2, OF_3, et que cette valeur est égale au maximum de l'erreur relative.

La question étant ainsi posée, soient C le centre du petit cercle $F_1F_2F_3$ de la sphère (B), déterminé par les droites ci-dessus désignées; α, β, γ les angles formés par OC avec Ox, Oy, Oz, et qui sont des données de la question, de même que l'angle 2ε du cône (C) ayant O pour sommet et le cercle précité pour base.

Il est visible que le centre O′ de la sphère (A) doit se trouver sur OC et que la position de F, au lieu d'être limitée par les faces de l'angle trièdre, peut occuper une position quelconque dans l'intérieur de (C).

Soient encore Ox' la trace sur xOy du plan mené par Oz et Oc; h, k les intersections de la direction de OO′ avec (A) et (B); a_1, a_2 les points de (A), b_1, b_2 les points de (B) respectivement situés sur les génératrices du cône (C) comprises dans le plan zOc et qui font le plus petit et le plus grand angle avec Ox'; $r = OO' = O'k$ le rayon de (A).

On doit d'abord avoir $a_1b_1 = a_2b_2 = hk$, ce qui se traduit par l'égalité

$$2r - 1 = 1 - 2r\cos\varepsilon,$$

d'où

$$r = \frac{1}{2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3}$$

L'erreur relative maximum est, par suite,

$$e_m = 2r - 1 = \operatorname{tang}^2\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

et l'on a pour l'équation de (A)

$$(x - r\cos\alpha)^2 + (y - r\cos\beta)^2 + (z - r\cos\gamma)^2 = r^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0. \tag{4}$$

De la comparaison des équations (2) et (4) on déduit, pour les valeurs des coefficients cherchés,

$$\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \mu = \frac{\cos\beta}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \nu = \frac{\cos\gamma}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{5}$$

Supposons, par exemple, que F puisse occuper une position quelconque dans l'angle trièdre formé par les axes coordonnés; les angles α, β, γ, ε sont égaux; leur cosinus a pour valeur $\sqrt{\frac{1}{3}}$, et l'on a

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 0{,}732,$$
$$e_m = 0{,}268.$$

Dans le cas de deux variables, les sphères sont remplacées par deux cercles; mais il se déduit du précédent en y supposant $\gamma = 90^\circ$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \mu = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

Soient $\operatorname{tang}\theta_1$, $\operatorname{tang}\theta_2$ les valeurs minimum et maximum de $\frac{y}{x}$, ou les angles a_1Ox, b_2Ox; on a $\alpha = \frac{\theta_2+\theta_1}{2}$, $\varepsilon = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}$, d'où

$$\lambda = \frac{\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}{\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{4}}, \quad \mu = \frac{\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}{\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{4}}.$$

Ce qui n'est autre chose que les formules établies en premier lieu par Poncelet.

Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la mécanique analytique; par M. Émile Mathieu.

(Séance du 30 avril 1873)

En cherchant à simplifier la démonstration de quelques formules de la Mécanique analytique, j'ai été conduit à la théorie suivante, qui a aussi de l'intérêt au point de vue de l'analyse pure.

DES DIFFÉRENTS GROUPES DE DÉRIVÉES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES QUI NE SONT PAS INDÉPENDANTES.

1. Considérons une fonction α d'un nombre pair de variables que nous désignerons par $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, et supposons que, entre ces variables, il existe k équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0,$$

k étant $< 2m$. D'après cela, α est une fonction donnée des variables q_i, p_i; mais, à cause des équations (1), α peut aussi être considéré comme fonction des mêmes variables d'une infinité d'autres manières.

Nous désignerons sous le nom de dérivées, *immédiates* de la fonction α les dérivées par rapport aux quantités q_i, p_i de la fonction donnée pour α. Mais, à cause des équations qui lient entre elles ces variables, la fonction α peut être mise sous différentes formes renfermées dans la formule

$$\alpha' = \alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant des fonctions des mêmes variables qui ne deviennent pas infinies dans les limites où l'on fait varier ces variables. Les dérivées de α' sont renfermées dans les deux formules

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha'}{dq_i} &= \frac{d\alpha}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dq_i} \\ &\quad + \frac{d\lambda_1}{dq_i} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dq_i} f_2 + \ldots + \frac{d\lambda_k}{dq_i} f_k, \\ \frac{d\alpha'}{dp_i} &= \frac{d\alpha}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dp_i} \\ &\quad + \frac{d\lambda_1}{dp_i} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dp_i} f_2 + \ldots + \frac{d\lambda_k}{dp_i} f_k,\end{aligned}$$

où l'on doit donner à i les valeurs $1, 2, \ldots, m$. Mais, en nous appuyant sur les équations (1), nous pouvons réduire ces dérivées aux expressions

$$\begin{aligned}&\frac{d\alpha}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dq_i}, \\ &\frac{d\alpha}{dp_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \lambda_k \frac{df_k}{dp_i};\end{aligned}$$

nous désignerons ces expressions sous le nom de dérivées *virtuelles* de la fonction α, et chaque groupe de dérivées virtuelles variera avec les fonctions adoptées pour les *multiplicateurs* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

On peut encore définir les dérivées virtuelles de α d'une autre manière. Faisons varier, dans la fonction donnée pour α, les variables q_i, p_i de quantités infiniment petites indiquées par la caractéristique δ, la variation de α sera

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\alpha}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_m}\delta q_m + \frac{d\alpha}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{d\alpha}{dp_m}\delta p_m,$$

et, en différentiant les équations qui lient entre elles les variables q_i, p_i, nous aurons

$$0 = \frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_m}\delta p_m,$$
$$0 = \frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_m}\delta p_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions ces équations respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et ajoutons-les à la variation de α; nous obtiendrons ainsi $\delta\alpha$ sous différentes formes et les coefficients des variations des variables dans chacune des formes de $\delta\alpha$ forment un groupe de dérivées virtuelles.

DÉRIVÉES PRINCIPALES D'UNE FONCTION.

2. Pour distinguer les dérivées virtuelles des dérivées immédiates, nous placerons les premières entre parenthèses, et nous écrirons

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right) = \frac{d\alpha}{dq_1} + \lambda_1\frac{df_1}{dq_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dq_1}, \\ \left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right) = \frac{d\alpha}{dq_2} + \lambda_1\frac{df_1}{dq_2} + \lambda_2\frac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right) = \frac{d\alpha}{dp_1} + \lambda_1\frac{df_1}{dp_1} + \lambda_2\frac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dp_1}, \\ \left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right) = \frac{d\alpha}{dp_2} + \lambda_1\frac{df_1}{dp_2} + \lambda_2\frac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_k\frac{df_k}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Suivant une notation généralement adoptée, posons, u et v étant deux fonctions quelconques des variables,

$$\begin{aligned}[u,v] = &\frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_m}\frac{dv}{dp_m} \\ &- \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_m}\frac{dv}{dq_m};\end{aligned}$$

si nous multiplions les équations (2) respectivement par $\frac{df_i}{dp_1}, \frac{df_i}{dp_2}, \ldots$, et les équations (3) par $\frac{df_i}{dq_1}, \frac{df_i}{dq_2}, \ldots$, et que nous retranchions la somme des secondes de celle des premières, nous aurons

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right)\frac{df_i}{dp_1} + \left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right)\frac{df_i}{dp_2} + \ldots + \left(\frac{d\alpha}{dq_m}\right)\frac{df_i}{dp_m} \\ &- \left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right)\frac{df_i}{dq_1} - \left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right)\frac{df_i}{dq_2} - \ldots - \left(\frac{d\alpha}{dp_m}\right)\frac{df_i}{dq_m} \\ &= [\alpha, f_i] + [f_1, f_i]\lambda_1 + [f_2, f_i]\lambda_2 + \ldots + [f_k, f_i]\lambda_k;\end{aligned}$$

et i étant susceptible des valeurs $1, 2, 3, \ldots, k$, cette équation en renferme k distinctes.

Jusqu'à présent, nous avons laissé absolument arbitraires les valeurs des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; adoptons maintenant pour ces fonctions celles qui rendent nul le second membre de l'équation précédente, et qui sont les solutions des k équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \star + [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_k, f_1]\lambda_k = [f_1, \alpha], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 + \star + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_k, f_2]\lambda_k = [f_2, \alpha], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [f_1, f_k]\lambda_1 + [f_2, f_k]\lambda_2 + [f_3, f_k]\lambda_3 + \ldots + \star = [f_k, \alpha]. \end{array}\right.$$

Il en résulte que les dérivées virtuelles de la fonction α satisfont aux k équations renfermées dans la suivante

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{df_i}{dp_1}\left(\dfrac{d\alpha}{dq_1}\right) + \dfrac{df_i}{dp_2}\left(\dfrac{d\alpha}{dq_2}\right) + \ldots + \dfrac{df_i}{dp_m}\left(\dfrac{d\alpha}{dq_m}\right) \\ -\dfrac{df_i}{dq_1}\left(\dfrac{d\alpha}{dp_1}\right) - \dfrac{df_i}{dq_2}\left(\dfrac{d\alpha}{dp_2}\right) - \ldots - \dfrac{df_i}{dq_m}\left(\dfrac{d\alpha}{dp_m}\right) = 0, \end{array}\right.$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, k$.

Quand les quantités λ auront les valeurs déterminées par les équations (4), nous donnerons au groupe des dérivées de α le nom de groupe des *dérivées principales*. Comme on a

$$[f_2, f_1] = -[f_1, f_2], \quad [f_3, f_1] = -[f_1, f_3], \ldots,$$

le déterminant des équations (4) est gauche, et l'on sait qu'un tel déterminant est nul si le nombre des équations est impair; nous supposerons donc essentiellement k pair.

Réciproquement, si les dérivées virtuelles de α satisfont aux équations (5) supposées en nombre pair, les quantités λ satisferont aux équations (4). Nous avons donc ce théorème :

Théorème I. — *α étant une fonction des $2m$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, liées entre elles par un nombre pair d'équations*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0,$$

il existe un groupe de dérivées virtuelles de la fonction α et il en existe un seul qui satisfait aux équations linéaires (5). *Ce groupe de dérivées, dites principales, s'obtient en prenant pour les multiplicateurs λ les valeurs fournies par les équations* (4).

De ce théorème on peut déduire comme corollaire le suivant :

Théorème II. — *Le groupe des dérivées principales de α ne dépend pas de la forme sous laquelle α a été donné.*

En effet, supposons qu'on parte d'une autre forme α_1 donnée à α; les dif-

férents groupes de dérivées virtuelles resteront évidemment les mêmes. Le groupe des dérivées principales satisfera encore aux k équations (5), et comme, parmi le nombre infini de groupes de dérivées virtuelles, il n'y en a qu'un qui satisfasse à ces équations d'après le théorème précédent, le groupe des dérivées principales qu'on obtient en partant de la forme α_1 est le même que celui qu'on obtient en partant de la forme donnée d'abord.

La propriété renfermée dans ce dernier théorème est de nature à faire comprendre l'utilité qu'il peut y avoir à distinguer le groupe des dérivées principales d'entre tous les autres groupes de dérivées.

Théorème III. — *Chaque dérivée principale de la somme de deux fonctions par rapport à une des variables q_i, p_i, est égale à la somme des dérivées principales de ces deux fonctions par rapport à la même variable.*

Si l'on résout les équations (4), on aura pour les quantités λ des expressions qu'on peut représenter par

$$\lambda_u = L_{u,1}[f_1,\alpha] + L_{u,2}[f_2,\alpha] + \ldots + L_{u,k}[f_k,\alpha] = \sum_s L_{u,s}[f_s,\alpha],$$

s étant susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, k$; et, de plus, il est aisé de reconnaître que l'on a

$$L_{u,s} = -L_{s,u}, \quad L_{u,u} = 0.$$

Nous aurons pour la dérivée principale de α par rapport à q_i

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \frac{d\alpha}{dq_i} + \sum_u \lambda_u \frac{df_u}{dq_i} = \frac{d\alpha}{dq_i} + \sum_u \sum_s L_{u,s} \frac{df_u}{dq_i}[f_s,\alpha],$$

u étant comme s susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, k$. Nous aurons les dérivées principales

$$\left(\frac{d\alpha'}{dq_i}\right), \quad \left(\frac{d(\alpha+\alpha')}{dq_i}\right),$$

en remplaçant, dans l'expression de $\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right)$, α par α' et $\alpha+\alpha'$; et, comme on a $[f_s,\alpha]+[f_s,\alpha'] = [f_s,\alpha+\alpha']$, on en conclut

$$\left(\frac{d(\alpha+\alpha')}{dq_i}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) + \left(\frac{d\alpha'}{dq_i}\right),$$

comme il fallait le démontrer.

Exemple. — Considérons le cas où les équations de condition se réduisent à deux

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

on aura, pour la formule des dérivées principales,

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \frac{d\alpha}{dq_i} + \frac{[f_2, \alpha]}{[f_1, f_2]}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{[f_1, \alpha]}{[f_1, f_2]}\frac{df_2}{dq_i},$$

les dérivées par rapport à p_i s'en déduisent en y changeant q en p. Enfin on pourra vérifier le théorème II et reconnaître directement que le second membre de l'équation précédente ne change pas de valeur, quand on y remplace α par $\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DES DÉRIVÉES PRINCIPALES.

3. Considérons $2m - 2r$ fonctions des $2m$ variables q_i, p_i, que nous désignerons par la lettre β :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_1(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m),\\
\beta_2 &= \beta_2(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{2(m-r)} &= \beta_{2(m-r)}(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m),
\end{aligned}$$

où les variables q_i, p_i sont supposées satisfaire aux $2r$ équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

Au moyen de ces $2m$ équations, on peut exprimer les $2m$ variables q_i, p_i en fonction des quantités β et d'une manière unique, et si l'on nous donne une fonction α des quantités q_i, p_i, cette fonction pourra elle-même s'exprimer au moyen des quantités β et d'une seule manière.

Si, après avoir exprimé α au moyen des quantités β, nous en prenons la variation, nous aurons

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta_1}\delta\beta_1 + \frac{d\alpha}{d\beta_2}\delta\beta_2 + \ldots + \frac{d\alpha}{d\beta_{2(m-r)}}\delta\beta_{2(m-r)} = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\delta\beta,$$

ou encore

$$\delta\alpha = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\beta}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\beta}{dq_m}\delta q_m + \frac{d\beta}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{d\beta}{dp_m}\delta p_m\right).$$

On a ensuite, en différentiant les équations qui relient entre elles les variables,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_m}\delta p_m,\\
0 &= \frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_m}\delta q_m + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_m}\delta p_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Désignons par $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$,..., $\mu_{2r}(\beta)$ un groupe de $2r$ quantités correspondant à une quelconque des fonctions β, et qui varie d'une fonction β à l'autre ; multiplions les $2r$ équations précédentes respectivement par

$$\sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\mu_1(\beta),\quad \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\mu_2(\beta),\ \ldots,$$

et ajoutons-les à la variation de α ; nous aurons

$$\delta\alpha = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\beta}{dq_1} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_1} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_1} + \ldots\right)\delta q_1 + \ldots \\ + \left(\frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i} + \ldots\right)\delta q_i + \ldots \\ + \left(\frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i} + \ldots\right)\delta p_i + \ldots \end{array}\right.$$

Les coefficients des variations des quantités q_i, p_i forment un groupe de dérivées virtuelles de la fonction α (n° 1), et ces dérivées sont données par les deux formules

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i}\right), \\ \left(\frac{d\alpha}{dp_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i}\right), \end{array}\right.$$

dans lesquelles i est susceptible des valeurs 1, 2, 3,..., m.

Les quantités renfermées entre parenthèses dans les seconds membres sont les dérivées virtuelles de β. Prenons pour les multiplicateurs $\mu(\beta)$ les quantités qui satisfont aux $2r$ équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad\star\quad + [f_2,f_1]\,\mu_2(\beta) + [f_3,f_1]\,\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r},f_1]\,\mu_{2r}(\beta) = [f_1,\beta], \\ [f_1,f_2]\,\mu_1(\beta) + \quad\star\quad + [f_3,f_2]\,\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r},f_2]\,\mu_{2r}(\beta) = [f_2,\beta], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right.$$

alors le groupe des dérivées virtuelles de chaque fonction β deviendra celui des dérivées principales. Désignons, pour abréger, ces dérivées principales par

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),\quad \left(\frac{d\beta}{dp_i}\right),$$

et les dérivées virtuelles de α deviendront

$$(8)\qquad \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),\quad \left(\frac{d\alpha}{dp_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right).$$

Or, je dis que ces dernières dérivées de α sont les dérivées principales.

En effet, les dérivées principales de β satisfont aux $2r$ équations renfermées dans la suivante

$$\begin{aligned}&\frac{df_i}{dp_1}\left(\frac{d\beta}{dq_1}\right)+\frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{d\beta}{dq_2}\right)+\ldots+\frac{df_i}{dp_m}\left(\frac{d\beta}{dq_m}\right)\\&-\frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{d\beta}{dp_1}\right)-\frac{df_i}{dq_2}\left(\frac{d\beta}{dp_2}\right)-\ldots-\frac{df_i}{dq_m}\left(\frac{d\beta}{dp_m}\right)=0,\end{aligned}$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, 2r$ (n° 2). On en conclut immédiatement que les expressions (8) satisfont aux mêmes équations dans lesquelles la lettre β est remplacée par la lettre α, et par suite les expressions (8) sont bien les dérivées principales de α.

Ainsi les dérivées principales de la fonction α peuvent se représenter, d'une part, par

$$\begin{aligned}&\frac{d\alpha}{dq_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dq_i}+\lambda_2\frac{df_2}{dq_i}+\ldots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dq_i},\\&\frac{d\alpha}{dp_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dp_i}+\lambda_2\frac{df_2}{dp_i}+\ldots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dp_i},\end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ayant pour valeurs les solutions des équations (4) du n° 2, où $k=2r$; et, d'autre part, elles peuvent se mettre sous la forme (6), en prenant pour les fonctions $\mu(\beta)$ celles qui satisfont aux équations (7). En égalant ces deux genres d'expressions, on obtient le théorème suivant :

Théorème IV. — *On imagine $2m-2r$ fonctions, désignées généralement par β, des $2m$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, et on suppose entre ces variables les $2r$ équations*

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad \ldots,\quad f_{2r}=0;$$

alors, en désignant par α une fonction quelconque de ces variables, on aura les deux formules

$$\begin{aligned}&\frac{d\alpha}{dq_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dq_i}+\ldots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dq_i}=\sum_\beta\frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i}+\ldots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i}\right),\\&\frac{d\alpha}{dp_i}+\lambda_1\frac{df_1}{dp_i}+\ldots+\lambda_{2r}\frac{df_{2r}}{dp_i}=\sum_\beta\frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}+\mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i}+\ldots+\mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i}\right),\end{aligned}$$

les quantités $\mu_1(\beta), \mu_2(\beta), \ldots$ étant les solutions des équations (7), et les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ étant les solutions des mêmes équations dans lesquelles les seconds membres sont remplacés par

$$[f_1,\alpha],\quad [f_2,\alpha],\quad \ldots,\quad [f_{2r},\alpha].$$

Nous ne considérerons plus désormais de dérivées virtuelles que celles qui sont principales ; nous pouvons donc convenir maintenant que les dérivées immédiates placées entre parenthèses représenteront les dérivées prin-

cipales, et le théorème précédent sera renfermé d'une manière concise et très-élégante dans les deux formules (8), qui montrent que le théorème élémentaire relatif à la dérivée d'une fonction composée est applicable aux dérivées principales d'une fonction composée, renfermant plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes.

Exemple. — Examinons le cas particulier où le nombre des équations qui lient les variables q_i, p_i se réduit à deux

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

le nombre des fonctions β sera $2m-2$, et nous aurons la formule

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \sum_\beta \frac{d\alpha}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

en posant

$$\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\right) = \frac{d\alpha}{dq_i} + \frac{[f_2,\alpha]}{[f_1,f_2]}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{[f_1,\alpha]}{[f_1,f_2]}\frac{df_2}{dq_i},$$
$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{d\beta}{dq_i} + \frac{[f_2,\beta]}{[f_1,f_2]}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{[f_1,\beta]}{[f_1,f_2]}\frac{df_2}{dq_i};$$

si l'on donne à α la valeur particulière p_s prise parmi les variables $p_1, p_2, \ldots, p_m$, cette formule deviendra

$$\sum_\beta \frac{dp_s}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{1}{[f_1,f_2]}\left(\frac{df_2}{dq_s}\frac{df_1}{dq_i} - \frac{df_1}{dq_s}\frac{df_2}{dq_i}\right).$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE DANS LE CAS D'ÉQUATIONS DE CONDITION ENTRE LES VARIABLES.

4. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_m$ des variables propres à déterminer la position d'un système de n points matériels en mouvement et sollicités par des forces ; on suppose de plus qu'il existe des équations de condition entre les variables q_i :

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0.$$

Imaginons la demi-force vive T exprimée par $q_1, q_2, \ldots, q_m$ et leurs dérivées prises par rapport au temps t, que nous représenterons par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$; puis différentions T par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$, de manière à former les quantités

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_m} = p_m;$$

nous pouvons, d'après cela, exprimer T au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_m$ et de p_1,

$p_2, \ldots, p_m$; nous supposons aussi qu'il existe une fonction de forces U que nous exprimons au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_m$; enfin, formons les dérivées partielles de $T - U = H$ dans ces hypothèses ; alors nous aurons les équations

$$(2) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \ldots, \frac{dq_m}{dt} = \frac{dH}{dp_m},$$

avec celle-ci

$$(3) \quad 0 = \left(\frac{dH}{dq_1} + \frac{dp_1}{dt}\right)\delta q_1 + \left(\frac{dH}{dq_2} + \frac{dp_2}{dt}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(\frac{dH}{dq_m} + \frac{dp_m}{dt}\right)\delta q_m$$

(*Œuvres de Jacobi*, t. III, p. 194), $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ représentant les variations de $q_1, q_2, \ldots$ d'après les équations (1) ; ces variations satisfont donc aux équations

$$\begin{aligned} &\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_m}\delta q_m = 0 \\ &\frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df_2}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_m}\delta q_m = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Multiplions les équations précédentes respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et ajoutons-les à l'équation (3) ; alors, pourvu qu'on dispose convenablement de ces multiplicateurs, les coefficients des variations δq_i dans l'équation résultante seront nuls, et l'on aura

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{dH}{dq_1} - \lambda_1 \frac{df_1}{dq_1} - \lambda_2 \frac{df_2}{dq_1} - \ldots - \lambda_r \frac{df_r}{dq_1}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{dH}{dq_2} - \lambda_1 \frac{df_1}{dq_2} - \lambda_2 \frac{df_2}{dq_2} - \ldots - \lambda_r \frac{df_r}{dq_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{dH}{dq_m} - \lambda_1 \frac{df_1}{dq_m} - \lambda_2 \frac{df_2}{dq_m} - \ldots - \lambda_r \frac{df_r}{dq_m}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on différentie l'équation $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots = 0,$$

ou

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dH}{dp_2} + \ldots = 0,$$

qu'on peut représenter, d'après une notation précédente, par

$$[f_i, H] = 0;$$

désignons-la, pour abréger, par $F_i = 0$, et nous aurons les r équations

$$(5) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_r = 0,$$

auxquelles satisfont les quantités q_i, p_i.

Différentions les équations (5) et remplaçons les $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{dp_i}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (2) et (4), et nous aurons les r équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [F_1, H] = [f_1, F_1]\lambda_1 + [f_2, F_1]\lambda_2 + \ldots + [f_r, F_1]\lambda_r, \\ [F_2, H] = [f_1, F_2]\lambda_1 + [f_2, F_2]\lambda_2 + \ldots + [f_r, F_2]\lambda_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

desquelles on pourra tirer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ pour les porter dans les équations (4). On peut remarquer entre les coefficients les égalités faciles à démontrer :

$$[f_1, F_2] = [f_2, F_1], \ \ldots, \ [f_u, F_v] = [f_v, F_u], \ \ldots.$$

Si l'on prend pour les variables q_i les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i des points matériels, on a

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

les équations (2) deviennent

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i',$$

et les équations (4) prennent la première forme donnée par Lagrange aux équations de la dynamique

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{dH}{dx_i} - \lambda_1 \frac{df_1}{dx_i} - \lambda_2 \frac{df_2}{dx_i} - \ldots.$$

Quoique, en général, on doive réduire les variables au moindre nombre possible, on comprend aisément qu'il puisse être utile dans certains cas de considérer les équations (2) et (4).

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DU NUMÉRO PRÉCÉDENT.

5. Nous allons considérer une question plus générale que la précédente. Imaginons que les $2m$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ satisfassent à l'équation

$$(7) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \frac{dq_2}{dt}\delta p_2 + \ldots + \frac{dq_m}{dt}\delta p_m \\ - \left(\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \ldots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m\right) = \delta H,$$

H étant une fonction de ces variables, en sorte que l'on a

$$\delta H = \frac{dH}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dH}{dq_m}\delta q_m + \frac{dH}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dH}{dp_m}\delta p_m.$$

Si les variables q_i, p_i étaient indépendantes, les coefficients de leurs variations seraient égaux dans les deux membres de l'équation (7); mais on suppose entre les variables q_i, p_i un nombre pair d'équations

$$(8) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

En introduisant des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$ comme dans la question précédente, on déduit des équations (7) et (8) les $2m$ équations suivantes

$$(A) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dH}{dp_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dp_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dH}{dp_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$$(B) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_1} - \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_1} - \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_1} - \ldots - \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dq_1}, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_2} - \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_2} - \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_2} - \ldots - \lambda_{2r}\dfrac{df_{2r}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En différentiant une des équations (8), $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df_i}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{df_i}{dp_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots = 0,$$

et, en remplaçant les dérivées des q_i, p_i d'après les équations (A) et (B), on a

$$[f_i, H] + \lambda_1 [f_i, f_1] + \lambda_2 [f_i, f_2] + \ldots = 0;$$

les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$ satisfont donc aux $2r$ équations suivantes

$$\begin{array}{l} \star + [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_r, f_1]\lambda_r \\ + [f_{r+1}, f_1]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_1]\lambda_{r+2} + \ldots + [f_{2r}, f_1]\lambda_{2r} = [f_1, H], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 + \star + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_r, f_2]\lambda_r \\ + [f_{r+1}, f_2]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_2]\lambda_{r+2} + \ldots + [f_{2r}, f_2]\lambda_{2r} = [f_2, H], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [f_1, f_{2r}]\lambda_1 + [f_2, f_{2r}]\lambda_2 + \ldots + [f_r, f_{2r}]\lambda_r \\ + [f_{r+1}, f_{2r}]\lambda_{r+1} + [f_{r+2}, f_{2r}]\lambda_{r+2} + \ldots + \star = [f_{2r}, H], \end{array}$$

et on pourra les tirer de ces équations pour les porter dans (A) et (B). Si l'on compare ces équations aux équations (4) du n° 2, on voit que les seconds membres des équations (A) et (B) représentent les dérivées principales

de la fonction H ; les équations (A) et (B) peuvent donc s'écrire, d'après la notation des dérivées principales,

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \left(\dfrac{dH}{dp_1}\right), \dfrac{dq_2}{dt} = \left(\dfrac{dH}{dp_2}\right), \ldots, \dfrac{dq_m}{dt} = \left(\dfrac{dH}{dp_m}\right), \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\left(\dfrac{dH}{dq_1}\right), \dfrac{dp_2}{dt} = -\left(\dfrac{dH}{dq_2}\right), \ldots, \dfrac{dp_m}{dt} = -\left(\dfrac{dH}{dq_m}\right). \end{cases}$$

Montrons comment le problème actuel renferme celui du numéro précédent. Il faut alors supposer que les r premières équations (8)

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_r = 0$$

ne renferment plus les variables p_i, et il en résulte

$$[f_u, f_v] = 0,$$

toutes les fois que u et v ne surpassent pas r; ensuite on supposera de plus que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ satisfont aux équations

$$[f_1, H] = 0,\quad [f_2, H] = 0,\quad \ldots,\quad [f_r, H] = 0;$$

enfin on prendra pour $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots$ les fonctions $F_1 = [f_1, H]$, $F_2 = [f_2, H], \ldots$.

Examinons d'abord les r premières équations qui donnent les quantités λ; leurs seconds membres sont nuls et, dans leurs premiers membres, les coefficients de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont nuls aussi; on en conclut que les valeurs de $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{2r}$ elles-mêmes s'annulent. Ensuite les r équations suivantes en λ fourniront $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ et coïncideront avec les équations (6) du numéro précédent.

Les r derniers termes des équations (A) et (B) s'annuleront parce que $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{2r}$ sont nuls, et les autres termes multipliés par des λ disparaîtront aussi des équations (A), parce que les r premières fonctions f ne renferment pas les variables p_i. Les équations (A) et (B) coïncideront donc avec les équations (2) et (4).

Ainsi les équations (2) et (4) sont aussi de la forme (C), et on doit remarquer que les dérivées principales de la fonction H par rapport aux p_i coïncident avec les dérivées immédiates.

SUR LE PROBLÈME DES PERTURBATIONS DANS LE CAS OU IL EXISTE DES ÉQUATIONS DE CONDITION ENTRE LES VARIABLES DU PROBLÈME.

6. Supposons que l'on ait intégré les équations (2) et (4) du n° 4 à l'occasion d'un problème de dynamique et qu'on ait trouvé pour intégrales

$$(1)\qquad \beta_1 = \psi_1,\quad \beta_2 = \psi_2,\quad \ldots,\quad \beta_{2(m-r)} = \psi_{2(m-r)},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ désignant les $2m-2r$ constantes arbitraires qui y entrent. Supposons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème dans lequel la fonction H est remplacée par $H+\Omega$, de sorte que Ω est la fonction perturbatrice. Alors les seconds membres des équations (1) ne sont plus constants, et on prend pour inconnues les fonctions β définies par les équations (1) et dont les dérivées par rapport au temps sont en général de très-petites quantités.

Tel est le problème des perturbations. Quand les équations de condition entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_m$ disparaissent, ce problème se résout par des formules dues à Lagrange, ou par d'autres dues à Poisson ; les premières ne changent pas par les équations de condition ; ce sont donc les formules analogues à celles de Poisson que nous nous proposons de déterminer. Mais nous allons résoudre ce problème en adoptant la généralisation du n° 5. Quand une généralisation a pour effet de compliquer des calculs, elle présente souvent plus d'inconvénients que d'avantages ; mais on ne peut faire ce reproche à celle-ci, car elle simplifie les calculs en confondant deux genres de fonctions qui remplissent exactement le même rôle dans la question.

Supposons donc entre les $2m$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ les $2r$ équations finies

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

et ces variables sont aussi assujetties aux $2m$ équations différentielles

$$(3) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

H étant une fonction des mêmes variables, et les seconds membres désignant les dérivées principales de la fonction H.

Concevons que l'on ait intégré ces équations et que l'on ait trouvé pour intégrales les $2m-2r$ équations

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m), \\ \beta_2 = \psi_2(q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2(m-r)}$ désignent des constantes arbitraires, qui ne figurent pas dans les seconds membres. Supposons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème dans lequel la fonction H est remplacée par $H+\Omega$, Ω étant très-petit, de sorte que les équations (2) subsistent encore, mais les équations (3) sont remplacées par

$$(5) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i}\right).$$

Alors les fonctions des q_i, p_i qui forment les seconds membres des équations (4) n'ont plus des valeurs constantes; mais leurs dérivées par rapport à t sont en général de très-petites quantités qu'il s'agit de déterminer. Ces fonctions, que nous désignerons par β, sont définies par les équations (4), et ces équations jointes aux $2r$ équations (2) permettront d'exprimer les $2m$ variables q_i, p_i au moyen des quantités β et d'une seule manière.

Soit $\alpha = \psi$ une intégrale du problème *sans perturbations*, c'est-à-dire une des équations (4), et α est la constante arbitraire. En différentiant cette équation, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right] + \frac{d\psi}{dt},$$

dont le dernier terme est nul, si t ne se présente pas explicitement dans ψ, et, d'après les équations (3), on obtient

$$(6) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{dH}{dp_i}\right) - \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{dH}{dq_i}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Si l'on passe ensuite au problème *avec perturbations*, on regarde, dans l'équation $\alpha = \psi$, α comme une fonction de t, et, en la différentiant, on aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right] + \frac{d\psi}{dt},$$

les dérivées de q_i, p_i étant fournies par les équations (5), et il en résulte

$$(7) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i}\right) - \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt}.$$

Retranchons l'équation (6) de l'équation (7), et nous aurons, en mettant dans le résultat la lettre α au lieu de ψ, ce qui ne peut plus maintenant amener de confusion,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right) - \frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)\right].$$

Les fonctions Ω peuvent s'exprimer au moyen des quantités β et d'une seule manière, et, d'après le n° 3, les dérivées principales de Ω sont données par les formules

$$\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right) = \sum_{\beta} \frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right), \quad \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right) = \sum_{\beta} \frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right);$$

on a donc

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{\beta} \frac{d\Omega}{d\beta} \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right) - \frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)\right].$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i} + \ldots,$$
$$\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right) = \frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i} + \ldots,$$

$\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$, ... étant les solutions des équations (7) du n° 3 ; en remplaçant, on obtient

$$(8) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{\beta} \frac{d\Omega}{d\beta}\Big([\alpha,\beta] + \mu_1(\beta)[\alpha,f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha,f_2] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha,f_{2r}]\Big),$$

qui est la formule cherchée. On voit que, grâce à la considération des dérivées principales, les calculs se sont présentés de la même manière que s'il n'y avait pas eu d'équations conditionnelles.

SUR DES FORMULES REMARQUABLES RELATIVES A L'EXPRESSION $[\alpha,\beta]$.

7. Nous allons déduire de la formule des perturbations un autre formule très-importante.

Si l'on considère d'abord le cas particulier où l'on part des équations du n° 4, on a entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_m$ les r équations

$$(a) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0,$$

d'où l'on déduit, entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_m$ et $p_1, p_2, \ldots, p_m$, r autres équations

$$(b) \qquad f_{r+1} = F_1 = 0, \quad f_{r+2} = F_2 = 0, \quad \ldots, f_{2r} = F_r = 0,$$

et, d'après ces équations de condition, on peut remplacer, comme on sait, les $2m$ variables q_i, p_i par $2m-2r$ variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-r}, P_1, P_2, \ldots, P_{m-r}$ indépendantes entre elles et qui satisfont aux $2m-2r$ équations différentielles

$$(c) \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i}.$$

Nous montrerons dans une autre occasion comment, dans le cas le plus général du n° 5, on peut remplacer aussi les $2m$ variables q_i, p_i par $2m-2r$ autres variables qui satisfont aux équations (c).

Désignons par $[\alpha,\beta]'$ par rapport aux variables Q_i, P_i l'analogue de $[\alpha,\beta]$ pour les variables q_i, p_i; c'est-à-dire posons

$$[\alpha,\beta]' = \frac{d\alpha}{dQ_1}\frac{d\beta}{dP_1} + \frac{d\alpha}{dQ_2}\frac{d\beta}{dP_2} + \dots + \frac{d\alpha}{dQ_{m-r}}\frac{d\beta}{dP_{m-r}}$$
$$- \frac{d\alpha}{dP_1}\frac{d\beta}{dQ_1} - \frac{d\alpha}{dP_2}\frac{d\beta}{dQ_2} - \dots - \frac{d\alpha}{dP_{m-r}}\frac{d\beta}{dQ_{m-r}};$$

comme il n'existe pas d'équations conditionnelles entre les variables Q_i, P_i, la formule des perturbations, si l'on emploie ces variables, se réduit à

$$(9) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{\beta} \frac{d\Omega}{d\beta}\,[\alpha,\beta]'.$$

Or, il est aisé de comprendre que les coefficients de $\frac{d\Omega}{d\beta}$ doivent être les mêmes dans les deux équations (8) et (9); on a donc cette formule très-importante, qui permet de passer des variables Q_i, P_i aux variables q_i,,

$$(D) \qquad [\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] + \mu_1(\beta)[\alpha,f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha,f_2] + \dots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha,f_{2r}].$$

Cette équation renferme la formule trouvée par Jacobi (*Nova methodus*, § 46, t. III de ses Œuvres), et qu'il se propose de découvrir dès le § 38 : *Quum propter rei utilitatem, tum propter egregiam ejus difficultatem, tum quia accurate examinare juvat quæcunque spectant ad expressionem* $[\alpha,\beta]$ *tantis proprietatibus gaudentem.*

La formule à laquelle Jacobi est parvenu par des calculs très-compliqués se rapporte au cas où les équations de condition se réduisent aux équations (*a*) et (*b*).

On peut remplacer la formule (D) par une autre dont le second membre renferme de la même manière α et β. On a d'abord

$$[\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] + \sum_{u} \mu_u(\beta)[\alpha,f_u],$$

u étant susceptible des valeurs 1, 2, 3,.., $2r$. En résolvant les équations (7) du n° 3, on a

$$\mu_u(\beta) = \sum_{s} L_{u,s}[f_s,\beta],$$

$L_{u,s}$ ne dépendant pas de β, mais seulement des fonctions f, et l'on a

$$L_{u,s} = -L_{s,u};$$

on obtient ainsi la formule

$$(E) \qquad [\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta] - \sum_{u}\sum_{s} L_{u,s}[\alpha,f_u][\beta,f_s].$$

Il est aisé de vérifier que l'expression du second membre ne fait que changer de signe, quand on y permute α et β. Elle devient en effet

$$[\beta,\alpha] - \sum_u \sum_s L_{u,s} [\beta,f_u] [\alpha,f_s];$$

comme u et s sont susceptibles des mêmes valeurs 1, 2, 3,..., $2r$, il est permis de les permuter, ce qui donne

$$[\beta,\alpha] - \sum_u \sum_s L_{s,u} [\beta,f_s] [\alpha,f_u];$$

enfin, comme on a $L_{u,s} = -L_{s,u}$, on a

$$-[\alpha,\beta] + \sum_u \sum_s L_{u,s} [\beta,f_s] [\alpha,f_u],$$

ce qui est bien l'expression (E) changée de signe.

Jacobi met aussi l'expression de $[\alpha,\beta]'$ sous une forme tout à fait différente, dans le § 48 de son mémoire. Mais, pour obtenir la forme analogue, nous ne pouvons plus conserver la généralité dans laquelle nous avons établi les formules (D) et (E), et il faut faire sur les fonctions f des restrictions indiquées par le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que les r premières fonctions f, savoir $f_1, f_2, \ldots, f_r$, soient toutes indépendantes des variables p_i, ou supposons seulement, ce qui est beaucoup plus général, qu'elles satisfassent aux $\frac{r(r-1)}{2}$ équations*

$$(g) \qquad [f_1,f_2] = 0, \quad [f_1,f_3] = 0, \quad \ldots, \quad [f_{r-1},f_r] = 0,$$

on a la formule

$$(F) \qquad [\alpha,\beta]' = [\alpha + A, \beta + B],$$

en posant

$$A = f_{r+1} \sum_{u=1}^{u=r} L_{u,r+1} [\alpha,f_u] + f_{r+2} \sum_{u=1}^{u=r} L_{u,r+2} [\alpha,f_u] + \ldots + f_{2r} \sum_{u=1}^{u=r} L_{u,2r} [\alpha,f_u],$$

$$B = f_{r+1} \sum_{u=1}^{u=r} L_{u,r+1} [\beta,f_u] + f_{r+2} \sum_{u=1}^{u=r} L_{u,r+2} [\beta,f_u] + \ldots + f_{2r} \sum_{u=1}^{u=r} L_{u,2r} [\beta,f_u].$$

Les fonctions L qui entrent dans les expressions de A et B sont les mêmes que celles qui entrent dans la formule (E). Le déterminant gauche des

équations qui déterminent les fonctions $\mu(\beta)$ est un carré que nous représenterons par D^2, et l'on a

$$L_{u,v} = \frac{1}{D}\frac{dD}{d[f_u, f_v]}.$$

Nous ne développerons pas les calculs qui conduisent au théorème précédent, qui n'est pas d'ailleurs difficile à vérifier; mais nous ferons remarquer que la formule (F) a aussi plus d'étendue que celle de Jacobi (§ 48 de son mémoire); en effet, dans la formule de Jacobi, $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont assujettis à satisfaire aux équations

$$[f_1, H] = 0, \quad [f_2, H] = 0, \quad \ldots, \quad [f_r, H] = 0,$$

et les fonctions $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots$ sont précisément les premiers membres de ces équations. Or la formule (F) n'exige pas ces restrictions.

On peut remarquer que si les équations de condition entre les variables se réduisent à deux, r est égal à l'unité, et le nombre des équations (g) se réduit à zéro. Donc, dans ce cas, la formule (F) est toujours applicable, sans que les fonctions f_1 et f_2 soient assujetties à aucune restriction.

Mémoire sur les groupes primitifs; par M. Camille Jordan.

(Séance du 30 avril 1873)

Nous avons démontré, dans un précédent mémoire (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVI), que le degré d'un groupe primitif G, ne contenant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution donnée A qui déplace N lettres, ne saurait dépasser une certaine limite $L = N + M$. La quantité M est une fonction F(N) du nombre N.

Nous examinons, dans le mémoire qui suit, le cas où l'ordre de A est un nombre premier p. Tous les autres cas peuvent se ramener à celui-là ; car une substitution quelconque, élevée à une puissance convenable, donne une substitution d'ordre premier.

Nous arrivons à ce résultat remarquable, qu'*on peut assigner à* M *une valeur qui ne dépend pas du nombre p, mais seulement du nombre q des cycles de* A. Nous démontrons, en effet, qu'on peut assigner deux fonctions de q, $\varphi(q)$ et $f(q)$ jouissant de la propriété suivante :

Le degré d'un groupe primitif G, *ne contenant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution* A *d'ordre premier p et à q cycles, ne peut dépasser* $pq + \varphi(q)$, *si l'on a* $p > f(q)$.

Donc, en appelant $\mathfrak{F}(q)$ la plus grande des quantités $F(2q)$, $F(3q)$, ..., $F(f(q)q)$, $\varphi(q)$, on pourra prendre pour limite $L = pq + \mathfrak{F}(q) = N + \mathfrak{F}(q)$.

Le premier paragraphe de notre mémoire est consacré à démontrer la proposition suivante, qui est le fondement de notre analyse :

Soit A une substitution d'ordre premier p à q cycles; si le groupe primitif G contient la substitution A, on pourra y déterminer une suite de substitutions A, B, C, ... semblables à A, et dont chacune déplace quelque lettre que les précédentes laissaient immobile, jusqu'à ce que l'on ait épuisé le nombre des lettres de A; mais si $p > q$, on pourra déterminer la suite A, B, C, ..., de telle sorte que chacune de ces substitutions successives ne puisse contenir dans aucun de ses cycles plus d'une lettre nouvelle.

Cela posé, notre théorème étant supposé démontré pour les nombres inférieurs à q (nous avons trouvé précédemment, p. 42, lorsque $q = 1$, $\varphi(q) = 2$, quel que soit p), nous le démontrons pour q, en établissant des formules récurrentes qui lient $\varphi(q)$ et $f(q)$ à $\varphi(q-1), \ldots, f(q-1), \ldots$. C'est là l'objet des sections II à VI.

Dans la section VII, nous discutons ces formules, et nous en déduisons les inégalités suivantes :

$$\varphi(q) \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + 2q,$$

en prenant pour $f(q)$ la plus grande des quantités suivantes :

$$\frac{2}{\log 2} q \log q + q + 1, \quad 3q + 2, \quad 18.$$

Il est certain d'ailleurs, d'après notre mode d'opérer, que ces limites sont loin d'être assez resserrées. Une étude plus minutieuse (VIII) nous a en effet montré qu'on pouvait prendre pour limites

$$\varphi(q) = q + 1, \quad f(q) = q,$$

lorsque $q = 2, 3, 4$ ou 5; et nous avons de fortes raisons de croire qu'on arriverait au même résultat pour les valeurs suivantes de q.

I

1. Soient G un groupe primitif; A l'une de ses substitutions; A, A', ... les diverses substitutions semblables à A qui sont contenues dans G. Il est clair que toute substitution de G les transformera les unes dans les autres; donc le groupe H = (A, A', ...) sera permutable à toutes les substitutions de G.

Le groupe H sera transitif; car, sans cela, on sait que G ne pourrait être primitif. Si donc A ne déplace qu'une partie des lettres, l'une au moins des autres substitutions A', ..., dont H est dérivé, contiendra réunies dans un de

ses cycles des lettres déplacées par A et quelques-unes des lettres restantes ; sans quoi H, permutant exclusivement entre elles les lettres que A déplace, ne serait pas transitif. Si la suite A′, ... contient plusieurs substitutions jouissant de la propriété ci-dessus, soit B l'une d'elles, choisie de telle sorte que G ne contienne aucune substitution qui jouisse des mêmes propriétés, tout en ne déplaçant qu'une partie des lettres nouvelles que B déplace.

S'il existe encore des lettres qui ne soient déplacées ni par A ni par B, l'une au moins des substitutions A′, ... devra de même mêler dans ses cycles quelques-unes de ces lettres à celles que déplaçaient déjà A et B. Si plusieurs de ces substitutions jouissent de cette propriété, on en choisira une C de telle sorte qu'il n'y en ait pas d'autre qui ne déplace qu'une partie des lettres nouvelles introduites dans C. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu une suite de substitutions A, B, C, ..., telle que toute lettre se trouve déplacée au moins par l'une d'elles.

2. Nous admettrons, dans ce mémoire, que A soit une substitution d'ordre premier p et à q cycles, q étant un entier $<p$.

Les substitutions B, C, ..., étant successivement définies comme il vient d'être indiqué, nous aurons la proposition suivante, qui va servir de fondement à toute notre analyse.

Théorème. — *Aucune des substitutions successives* B, C, ... *ne peut contenir dans aucun de ses cycles plus d'une lettre nouvelle.*

3. Nous allons démontrer d'abord cette proposition pour la substitution B. Pour y arriver, nous supposerons que l'un des cycles de B contienne plusieurs lettres nouvelles ; et nous en déduirons l'existence, dans la suite A, A′, ..., d'une substitution qui mêle dans ses cycles les lettres de A à des lettres nouvelles, tout en déplaçant moins de lettres nouvelles que B ; conséquence inadmissible, comme contraire à la définition même de B.

4. Soit I le groupe dérivé de celles A, A_1, ... des substitutions A, A′, ... qui ne déplacent aucune lettre nouvelle. Les pq lettres déplacées par les diverses substitutions de I pourront se répartir en classes, en groupant ensemble celles que les substitutions de I permettent de permuter entre elles. Si I permute transitivement les pq lettres, il n'y aura qu'une classe ; sinon il y en aura plusieurs ; mais dans aucun cas il n'y en aura plus de q, car chacune d'elles contient au moins p lettres, nombre des lettres associées dans chacun des cycles de A.

5. Soient maintenant x, y deux lettres nouvelles, contenues dans un même cycle de B. On peut admettre qu'elles s'y suivent immédiatement. Car si y suivait x à r rangs de distance, on n'aurait qu'à considérer, au lieu de la substitution B, la substitution B^r, qui lui est semblable, et dont l'un des cycles contient x suivi immédiatement de y.

Cela posé, les lettres nouvelles que B déplace seront de deux espèces ; les lettres y, ... que B fait succéder à des lettres nouvelles ; et les lettres

que B fait succéder à des lettres anciennes a, a', ... Il existe nécessairement des lettres de cette seconde espèce, puisque B contient au moins un cycle où les lettres nouvelles sont mêlées aux anciennes.

6. *Les lettres a, a', ..., auxquelles* B *fait succéder des lettres nouvelles, formeront par leur réunion une ou plusieurs des classes entre lesquelles nous avons réparti les lettres de* I. Supposons en effet qu'il en fût autrement, et qu'il y eût une classe contenant à la fois des lettres a, ... de la suite a, a', ..., et d'autres lettres α, ... non contenues dans cette suite. Le groupe I étant transitif par rapport aux lettres de cette classe, l'une au moins des substitutions A, A', ..., dont il est dérivé, mêlera dans ses cycles les lettres a, ... aux lettres α, ... Supposons, par exemple, que A contienne dans un même cycle les deux lettres a et α. La transformée de A par B sera semblable à A. Elle contiendra dans un de ses cycles la lettre que B fait succéder à a, laquelle est nouvelle, et celle que B fait succéder à α, laquelle est ancienne. Elle jouira donc comme B de la propriété de mêler dans ses cycles des lettres anciennes à des lettres nouvelles. Cependant elle déplace moins de lettres nouvelles que B, car elle laisse immobiles les lettres y, ... de première espèce que B déplaçait. Ce résultat est inadmissible, comme contraire à la définition de B.

7. On peut répartir d'une seconde façon les lettres nouvelles que B déplace en deux catégories : 1° les lettres x, ... auxquelles B fait succéder des lettres nouvelles; 2° celles auxquelles B fait succéder des lettres anciennes b, ... Et l'on verra de même que *les lettres b, ... formeront par leur réunion une ou plusieurs des classes de lettres de* I; car s'il en était autrement, l'une au moins des substitutions A, A', ..., étant transformée par B^{-1}, donnerait une nouvelle substitution jouissant de la même propriété que B, mais déplaçant moins de lettres nouvelles, ce qui est inadmissible.

8. Les classes de lettres qui constituent la suite a, ... peuvent appartenir en tout ou en partie à la suite b, ... Nous admettrons pour plus de généralité qu'elles ne lui appartiennent pas en totalité.

Soient a', ... celles des lettres a, ... qui n'appartiennent pas à b, ... Par la définition même de ces suites, B fera succéder a', ... à des lettres anciennes c, ...

9. *Les lettres c, ... formeront encore une ou plusieurs classes dans* I.

Cette proposition est le nœud de notre démonstration; pour l'établir, considérons le groupe $\mathfrak{J}$ transformé de I par B. Ses diverses substitutions laisseront immobiles les lettres que B fait succéder à des lettres nouvelles, c'est-à-dire les lettres nouvelles de première espèce, et les lettres anciennes de la suite b, ... Mais au contraire elles déplaceront les lettres nouvelles de seconde espèce, ainsi que les lettres a', ...

Les substitutions de I permutant exclusivement entre elles les lettres a, ..., celles de $\mathfrak{J}$ permuteront exclusivement entre elles les lettres nouvelles

de la seconde espèce, que B leur fait succéder. D'autre part, ces diverses substitutions remplaceront respectivement le système s' des lettres a', ... par divers systèmes de lettres s', s'', ..., dont chacun sera exclusivement formé de lettres anciennes.

10. En premier lieu, *chacun des systèmes s', s'', ... sera formé par l'ensemble des lettres d'une ou plusieurs classes.* En effet, soit S celle des substitutions de $\mathfrak{J}$ qui remplace les lettres de s' par celles de s''. La transformée B′ de B par S sera une substitution semblable à B, dont les cycles contiendront les mêmes lettres nouvelles que ceux de B (puisque, parmi les lettres nouvelles que B contenait, les unes ne sont pas déplacées par S et les autres sont permutées ensemble). Soit d'ailleurs x' la lettre que S fait succéder à x; l'un des cycles de B contenant deux lettres nouvelles consécutives x, y, l'un des cycles de B′ contiendra les deux lettres nouvelles consécutives x', y. Donc B′ jouira des mêmes propriétés caractéristiques que B; et le raisonnement déjà fait sur B, étant appliqué à B′, montrera que les lettres anciennes auxquelles B′ fait succéder des lettres nouvelles doivent former par leur réunion une ou plusieurs classes. Mais ces lettres sont, d'une part, les lettres communes aux deux suites a, ... et b, ..., lesquelles forment une ou plusieurs classes, et, d'autre part, les lettres de s''. Donc ces dernières lettres, considérées isolément, formeront une ou plusieurs classes, ce qu'il fallait démontrer.

11. Deux cas pourront maintenant se présenter, suivant que les systèmes s', s'', ... seront tous formés des mêmes classes de lettres, ou différeront les uns des autres par quelques lettres.

Dans le premier cas, les substitutions de $\mathfrak{J}$ permuteront exclusivement entre elles les lettres a', ... du système s'; donc les substitutions de I, dont elles sont les transformées par B, permutaient exclusivement entre elles les lettres c, ..., que B remplaçait par a', ... Donc les lettres c, ... forment dans I une ou plusieurs classes, comme nous voulions l'établir.

12. Supposons au contraire que les systèmes s', s'', ... diffèrent par quelques classes; nous aboutirons à une absurdité.

On voit d'abord que chaque substitution de $\mathfrak{J}$ remplace les uns par les autres les systèmes s', s'', ... Supposons en effet que l'une d'elles S remplace s'' par un autre système de lettres s_1; $\mathfrak{J}$, contenant une substitution T qui remplace s' par s'', contiendra ST, qui le remplace par s_1; donc s_1 sera par définition l'un des systèmes de la suite s', s'', ...

Il résulte évidemment de là que, s'il existe des classes communes à tous les systèmes s', s'', ..., les lettres de ces classes seront permutées exclusivement entre elles par les substitutions de $\mathfrak{J}$. Si l'on supprime ces lettres communes dans chacun des systèmes s', s'', ..., les systèmes de lettres restantes σ', σ'', ... jouiront encore de la propriété d'être permutés entre eux par les substitutions de $\mathfrak{J}$.

13. Supposons, pour fixer les idées, qu'il existe des classes communes à μ systèmes de la suite σ', σ'', ..., mais qu'il n'en existe aucune commune à $\mu+1$ systèmes. Les classes communes à tous les systèmes ayant été supprimées, μ sera inférieur au nombre des systèmes; il se réduira à l'unité, si les systèmes pris deux à deux n'ont aucune classe commune.

Soient σ', σ'', ..., σ^{μ}, μ systèmes ayant des classes communes, et soient τ le système des lettres formant les classes communes à ces systèmes; τ, τ_1, τ_2, ... les systèmes de lettres que les diverses substitutions 1, S_1, S_2, ... du groupe $\mathfrak{J}$ font succéder à τ; τ_1, par exemple, sera formé des classes communes à ceux des systèmes σ'_1, ..., σ^{μ}_1 de la suite σ', ... que S_1 fait succéder à σ', ..., σ^{μ}. D'ailleurs deux quelconques des systèmes τ, τ_1, τ_2, ... ne peuvent avoir aucune classe commune sans être identiques. En effet, si τ_1 et τ_2, par exemple, avaient une classe commune, cette classe appartiendrait à la fois aux μ systèmes σ'_1, ..., σ^{μ}_1 que S_1 fait succéder à σ', ..., σ^{μ}, et aux μ systèmes σ'_2, ..., σ^{μ}_2 que S_2 leur fait succéder. Mais, par hypothèse, aucune classe n'appartient à plus de μ systèmes de la suite σ', ... Donc ces μ derniers systèmes se confondent avec les précédents; donc les lettres de τ_2, qui leur sont communes, se confondent avec celles de τ_1, communes aux précédents.

14. Nous remarquerons encore que *la suite τ, τ_1, ... contient nécessairement plusieurs systèmes distincts.* Car $\mathfrak{J}$ contient une substitution S_1 qui remplace σ' par un système $\sigma^{\mu+1}$ différent de σ', ..., σ^{μ}; cette substitution remplacera τ par un nouveau système τ_1, dont les lettres appartiendront à $\sigma^{\mu+1}$, tandis que les lettres de τ ne lui appartenaient pas; donc τ_1 diffère de τ. Mais, d'un autre côté, *le nombre des systèmes distincts de la suite τ, τ_1, ... ne peut dépasser q*, puisque chacun d'eux est formé d'une ou plusieurs classes de lettres, et que le nombre total des classes est au plus égal à q.

15. Cela posé, le groupe I étant dérivé des substitutions A, A', ... qui sont d'ordre p, son transformé $\mathfrak{J}$ par B sera dérivé des substitutions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, ... transformées de celles-là par B, et qui seront aussi d'ordre p. Et puisque $\mathfrak{J}$ contient une substitution S_1 qui déplace les systèmes τ, τ_1, ..., l'une au moins $\mathfrak{A}$ des substitutions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, ... dont il est dérivé déplacera ces systèmes. Soit $\mathfrak{A}^{\rho}$ la première des puissances successives de $\mathfrak{A}$ qui ne déplace plus les systèmes; ρ sera un entier >1 et qui divisera $1.2...q$, le nombre des systèmes étant moindre que q. Il est évident d'ailleurs que celles des puissances de $\mathfrak{A}$ qui ne déplacent pas les systèmes sont $\mathfrak{A}^{\rho}$, $\mathfrak{A}^{2\rho}$, ..., $\mathfrak{A}^{m\rho}$, ... Mais $\mathfrak{A}^{p}$, se réduisant à l'unité, ne déplacera pas les systèmes. Donc p sera un multiple de ρ; et comme il est premier, on aura $p=\rho$; résultat absurde, p ne divisant pas $1.2...q$.

16. Il est donc établi, ainsi que nous l'avions annoncé, que les lettres de la suite c, ... forment une ou plusieurs classes. Ces classes pourront être contenues en tout ou en partie parmi celles de la suite b, ... Supposons

pour plus de généralité qu'elles n'y soient pas toutes contenues. Si, parmi les lettres de la suite c, ..., on efface celles qui lui sont communes avec la suite b, ..., les lettres restantes c', ... jouiront de la propriété que B les fait succéder à des lettres anciennes d, ...

Un raisonnement identique au précédent fera voir que les lettres d, ... forment une ou plusieurs classes.

17. Continuant ainsi, on arrive au résultat suivant : *Pour qu'il n'existe aucune substitution déplaçant moins de lettres nouvelles que* B *et les mêlant dans ses cycles aux lettres anciennes, il faut que les lettres anciennes* a, ..., *que* B *remplace par des lettres nouvelles, forment une ou plusieurs classes; de même pour les lettres anciennes* c, ..., *que* B *remplace par des lettres anciennes, mais que* B^2 *remplace par des lettres nouvelles ; de même pour les lettres anciennes* d, *que* B *et* B^2 *remplacent par des lettres anciennes, mais que* B^3 *remplace par des lettres nouvelles, etc.*

18. Cela posé, considérons l'une des classes contenues dans la suite a, ... Elle contient au moins p lettres, toutes déplacées par B qui n'a que q cycles. Donc deux au moins de ces lettres, a, a_1, seront contenues dans un même cycle, où elles seront respectivement remplacées par deux lettres nouvelles z, z_1; on aura donc, en mettant ces lettres en évidence,

$$B = (az \ldots a_1 z_1 \ldots)(\ldots)\ldots,$$

et en élevant B à une puissance convenable on obtiendra une substitution semblable à B et de la forme

$$B^k = (aa_1 \ldots zz_1 \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Cette substitution contient les mêmes lettres nouvelles que B, et son premier cycle contient deux lettres nouvelles consécutives; on peut donc raisonner sur elle comme sur B. D'ailleurs elle ne satisfait pas à la condition que nous venons de trouver (17). Car soit $m+2$ le rang de la première lettre nouvelle que renferme le cycle $(aa_1 \ldots zz_1 \ldots)$. La première puissance de B^k qui remplace a_1 par une lettre nouvelle sera la $m^{\text{ième}}$; si la condition était satisfaite, elle devrait remplacer a, qui appartient à la même classe, par une lettre nouvelle, ce qu'elle ne fait pas.

Donc on pourra déduire de B^k une substitution analogue, mais déplaçant moins de lettres nouvelles, ce qui est inadmissible.

19. Notre proposition est donc complétement démontrée pour la substitution B. Les mêmes principes serviront à l'établir pour la substitution suivante C, et de proche en proche pour toutes les autres.

Soit en effet I_1 le groupe formé par les substitutions A, A_1, ..., B, B_1, ... de la suite A, A', ... qui ne déplacent aucune lettre autre que celles déjà déplacées par A et B. On pourra y répartir les lettres en classes, en groupant ensemble celles que I_1 permute entre elles. Elles ne pourront former plus de

q classes. En effet, considérons d'abord les pq lettres anciennes que A déplaçait. Étant associées p à p dans les cycles de A, le nombre des classes distinctes entre lesquelles elles se répartissent ne pourra dépasser q. Passons maintenant aux lettres nouvelles introduites par la substitution B. Chacune d'elles se trouve dans un des cycles de B, associée à des lettres anciennes, et viendra s'adjoindre à la classe déjà formée par ces lettres. Donc l'introduction de ces lettres nouvelles ne pourra faire apparaitre de nouvelles classes. Au contraire, le nombre des classes distinctes pourra se trouver réduit par l'adjonction des substitutions B, B_1, ...

Cela posé, les raisonnements que nous avons faits sur le groupe I et la substitution B deviennent identiquement applicables au groupe I_1 et à la substitution C. Ils le seront également au groupe I_2 formé par celles des substitutions semblables à A qui sont contenues dans G et ne déplacent que les lettres de A, B, C, et à la substitution suivante D; etc.

20. Nous remarquerons d'ailleurs que chacune des substitutions B, C, ..., ne pouvant contenir plus d'une lettre nouvelle dans chacun de ses cycles, le nombre total des lettres nouvelles introduites par l'une quelconque de ces substitutions ne pourra dépasser q, nombre des cycles.

II

21. Théorème. — *Un groupe primitif* G, *qui contient une substitution d'ordre p à q cycles, contient nécessairement le groupe alterné si son degré dépasse une certaine limite $pq + \varphi(q)$, toutes les fois que p surpassera lui-même une certaine limite $f(q)$.*

22. Pour démontrer ce théorème, et déterminer en même temps la forme des fonctions $\varphi(q)$, $f(q)$, nous admettrons que la proposition soit établie, et les limites déterminées pour toutes les valeurs de q inférieures à celles que l'on considère.

Nous admettrons en outre que l'on ait déterminé pour ces mêmes valeurs de q le degré maximum $pq + \psi(q)$ des groupes simplement transitifs que peut contenir un groupe primitif G dont une substitution est d'ordre p à q cycles, mais qui ne contient pas le groupe alterné (il est clair que $\psi(q)$ sera au plus égal à $\varphi(q)$; mais il pourra être moindre).

Cela posé, considérant les groupes qui contiennent une substitution d'ordre p à q cycles sans contenir de substitutions d'ordre p à moins de q cycles, nous assignerons les limites supérieures des trois quantités $\varphi(q)$, $f(q)$, $\psi(q)$, en fonction des quantités connues $\varphi(q-1)$, $\varphi(q-2)$, ..., $f(q-1)$, ..., $\psi(q-1)$, ...

23. Notre proposition sera dès lors démontrée; car nous avons établi le théorème dans le cas où $q = 1$ (même tome, p. 42) et trouvé pour ce cas les

limites $\varphi(1) = 2$, $f(1) = 1$. D'ailleurs un groupe primitif de degré n qui contient une substitution circulaire d'ordre p, étant au moins $n - p + 1$ fois transitif, ne pourra contenir un groupe simplement transitif de degré $> p$. On aura donc $\psi(1) = 0$.

Substituant ces valeurs dans les formules récurrentes qui donnent $\varphi(q)$, $f(q)$, $\psi(q)$, on trouvera facilement les limites suivantes :

$$\varphi(q) \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + 2q, \qquad \psi(q) \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + q,$$

et la valeur correspondante de $f(q)$ sera la plus grande des quantités $\psi(q) + 1$, $3q + 2$, 18.

On obtiendra d'ailleurs des limites plus étroites dans chaque cas particulier en serrant le problème de plus près, ainsi que nous le ferons voir dans la section VIII.

III

24. Considérons la suite des groupes I, I_1, ..., définis comme précédemment. Nous avons vu que, si l'on répartit en classes les lettres déplacées par chacun de ces groupes, en groupant ensemble celles qui sont permutées transitivement, aucun des groupes de la suite ne contiendra plus de classes que celui qui le précède. D'ailleurs la suite se termine par le groupe H, qui est transitif. Soit donc I_r le premier groupe transitif que contienne la suite; les groupes suivants I_{r+1}, ..., H seront tous transitifs.

Si $r = 0$, le groupe I sera lui-même transitif; nous laisserons provisoirement de côté ce cas, qui est relativement simple.

25. Soient $x_1, \ldots, x_\mu$ les lettres nouvelles que I_r déplace, mais que I_{r-1} ne déplaçait pas. Si $\mu > 1$, le *groupe* I_r *ne sera pas primitif; mais ses lettres se grouperont* μ *à* μ *en systèmes, dont l'un sera formé des lettres* $x_1, \ldots, x_\mu$. En effet, considérons le groupe J formé de celles des substitutions de I_r qui ne déplacent pas x_1. Celles de ses substitutions qui sont semblables à A laissent immobiles les lettres $x_2, \ldots, x_\mu$; car leur nombre $\mu - 1$ est inférieur à q (20) et par suite à p. Si donc il existait une substitution S semblable à A et déplaçant tout ou partie de ces lettres, elle les mêlerait dans ses cycles à des lettres anciennes, car ces lettres nouvelles sont en nombre insuffisant pour former à elles seules un cycle dans S. Mais, en vertu de la définition même des groupes successifs I, I_1, ..., il ne peut exister aucune substitution semblable à A, déplaçant moins de μ lettres nouvelles et les mêlant dans ses cycles avec celles de I_{r-1}. Donc S ne peut exister.

D'autre part, les substitutions semblables à A dont I_{r-1} est dérivé sont

contenues dans J, et déplacent toutes les lettres anciennes. Il résulte de là (voir notre *Traité des substitutions*, n° 399) que les lettres de I_r peuvent être réparties en systèmes, dont l'un sera formé des lettres $x_1, \ldots, x_\mu$, ce qu'il nous fallait démontrer.

26. Il se peut qu'il existe d'autres manières de répartir les lettres de I_r en systèmes (tels que chaque substitution de I_r remplace ces lettres de chaque système par celles d'un même système); mais, *dans chacune de ces répartitions diverses, les systèmes qui contiennent quelqu'une des lettres nouvelles $x_1, \ldots, x_\mu$ sont exclusivement formés de lettres nouvelles.*

Supposons en effet qu'il existât un système s contenant à la fois la lettre x_1 et l'une des anciennes lettres α. Les substitutions de I_{r-1}, laissant x_1 immobile, ne déplaceront pas ce système; donc les lettres $\alpha, \beta, \ldots$ qu'elles font succéder à α appartiennent toutes à ce système. Or I_{r-1} est dérivé de substitutions d'ordre p; soit S une de ces substitutions, laquelle déplace α; celui de ses cycles qui contient α contiendra p lettres distinctes, qui toutes appartiendront à la suite $\alpha, \beta, \ldots$. Donc s, contenant $x_1, \alpha, \beta, \ldots$, contiendra plus de p lettres.

Cela posé, I_r étant transitif, l'une au moins T des substitutions d'ordre p dont il est dérivé remplacera le système s par un autre. Mais T n'a que q cycles, et comme elle déplace toutes les lettres de s, en nombre $> p$, elle en contiendra deux au moins dans l'un de ses cycles. Supposons qu'elles s'y suivent à m rangs de distance; T^m, remplaçant une des lettres de s par une autre, ne déplacera pas ce système, et T, qui est une puissance de T^m, ne le déplacera pas non plus, comme nous l'avions supposé. Les μ lettres $x_1, \ldots, x_\mu$ formant à elles seules un certain nombre des systèmes de la nouvelle répartition, il est clair que chacun des anciens systèmes de μ lettres sera également formé de la réunion d'un certain nombre des systèmes de la nouvelle répartition.

27. Il résulte de là : 1° que *le nombre des lettres de chaque système de la nouvelle répartition divise μ*, puisque les μ lettres $x_1, \ldots, x_\mu$ forment à elles seules un ou plusieurs systèmes; 2° que *si $\mu = 1$, I_r sera primitif*, puisqu'il sera impossible d'y déterminer des systèmes contenant plus d'une seule lettre.

28. Les raisonnements que nous venons de faire pour le groupe I_r seront également applicables aux groupes suivants $I_{r+1}, \ldots, H$, qui sont également transitifs. On en tire de plus cette conséquence que H *est primitif*.

En effet, si H n'était pas primitif, le nombre λ des lettres déplacées par ce groupe et non déplacées par le précédent serait > 1. Et parmi les diverses manières qui peuvent exister de répartir les lettres de H en systèmes, il en existerait une seule où chaque système contînt λ lettres, à savoir celle où les systèmes formés par les lettres nouvelles se réduiraient à un seul contenant toutes ces lettres. Cela posé, les substitutions de G, étant per-

mutables à H, remplaceraient les systèmes de λ lettres ainsi déterminés dans H par de nouveaux systèmes de λ lettres jouissant également de la propriété que chaque substitution de H remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système. Mais puisqu'il n'existe qu'une manière de déterminer dans H de semblables systèmes, les nouveaux systèmes se confondront avec les anciens, et les substitutions de G remplaçant ces anciens systèmes les uns par les autres, G ne sera pas primitif, comme on le suppose.

Revenons à la considération du groupe I_r. Deux cas seront à distinguer, suivant que l'on aura $\mu > 1$ ou $\mu = 1$.

IV

29. *Premier cas*, $\mu > 1$. — Soit $pq + k$ le nombre des lettres déplacées par I_r; nous allons déterminer une limite supérieure du nombre k.

Si $r = 1$, on obtiendra immédiatement la limite cherchée; en effet, I déplaçant pq lettres, I_1 en déplacera $pq + \mu$. On aura donc $k = \mu \leqslant q$.

30. Soit au contraire $r > 1$. Les lettres de I_r pourront se grouper μ à μ en systèmes $s, t, u, \ldots$. Les lettres déplacées par I_r sans l'être par I_{r-1} formeront l'un de ces systèmes s; *quant aux lettres déplacées par* I_{r-1} *sans l'être par* I_{r-2}, *elles formeront un ou plusieurs des systèmes de la suite* $t, u, \ldots$. Soit en effet α l'une de ces lettres, appartenant par exemple au système t; et soient $\beta, \ldots$ les autres lettres de cette sorte. Si I_{r-2} les déplaçait, l'une des substitutions d'ordre p dont I_{r-2} est dérivé les déplacerait. D'ailleurs cette substitution, laissant immobile α, ne déplacerait pas le système t; donc elle permuterait exclusivement entre elles les lettres $\beta, \ldots$; résultat absurde, car ces lettres, en nombre $< p$, ne peuvent former un cycle à elles seules.

31. *Les substitutions de* I_{r-1} *ne peuvent permuter les systèmes* $t, u, \ldots$ *les uns dans les autres d'une manière trois fois transitive*. Supposons en effet que cela eût lieu. Celles des substitutions de I_{r-1} qui ne déplacent pas t forment un groupe M deux fois transitif par rapport aux systèmes restants. Celles de ces substitutions qui sont d'ordre p, étant combinées ensemble, forment un groupe N, évidemment permutable aux substitutions de M, et par suite transitif. D'ailleurs les substitutions de M devant permuter exclusivement entre elles les μ lettres de t, celles d'entre elles qui sont d'ordre p laisseront ces lettres immobiles. D'ailleurs elles appartiendront à I_{r-2}; car si l'une d'elles S déplaçait quelqu'une des lettres nouvelles (en nombre $\leqslant q$) que I_{r-2} ne déplaçait pas, mais que I_{r-1} déplace, elle les mêlerait dans ses cycles avec les lettres de I_{r-2}; et, en transformant par S les substitutions semblables à A dont I_{r-2} est dérivé, on obtiendrait de nouvelles substitutions semblables

à A, mais contenant moins de lettres nouvelles que n'en déplace I_{r-1}; résultat inadmissible, comme contraire à la définition de ce groupe.

32. Donc I_{r-2} contient N, et par suite permute transitivement les systèmes restants u, ... D'ailleurs *le nombre de ces systèmes est au moins égal à* p. En effet, I_{r-2} contient la substitution A d'ordre p. Les lettres contenues dans chacun de ses cycles appartiendront nécessairement à p systèmes distincts. Supposons en effet qu'un même cycle c contînt deux lettres γ et δ d'un même système u, et que ces lettres se suivissent à m rangs de distance. A^m, remplaçant γ par δ, ne déplacerait pas le système u; il en serait de même de A, qui est une puissance de A^m; donc toutes les lettres du cycle qui contient γ et δ appartiendraient au système u; ce qui est absurde, le nombre μ des lettres du système étant $<p$.

33. On voit enfin qu'*il n'existera qu'une manière de répartir les lettres de* I_{r-1} *en systèmes de* μ *lettres*. Imaginons en effet qu'on ait opéré une semblable répartition, et soit t' celui de ces nouveaux systèmes qui contient une lettre α de t; il ne pourra contenir en même temps une lettre γ de l'un des systèmes restants u, ... En effet les substitutions de I_{r-2}, ne déplaçant pas α, ne déplaceraient pas le système t'; donc les lettres que ces substitutions permutent avec γ appartiendraient à t'; résultat absurde, leur nombre étant au moins égal à p. Donc t' doit se confondre avec t, et la nouvelle répartition avec l'ancienne.

34. Cela posé, I_r n'étant pas primitif, ne sera pas le dernier terme de la suite I, I_1, ..., II (28). Soient I_{r+1} le terme suivant, μ' le nombre des lettres nouvelles déplacées par I_{r+1} sans l'être par I_r. Des raisonnements analogues à ceux du n° 25 montrent que les lettres de I_{r+1} peuvent se répartir en systèmes de μ' lettres, l'un de ces systèmes ρ étant formé des lettres nouvelles qui viennent d'être introduites. Chacun des anciens systèmes de μ lettres s, t, ... sera formé par les lettres d'un ou plusieurs de ces nouveaux systèmes (26). Donc μ' sera égal à μ ou à un diviseur de μ.

35. Supposons d'abord $\mu' < \mu$; nous arriverons à une conséquence absurde.

Soient respectivement σ, σ', ...; τ, τ', ...; ... ceux des nouveaux systèmes dont la réunion forme s, t, ...; le groupe I_r, étant transitif, permutera transitivement ces systèmes, et I_{r+1} sera deux fois transitif par rapport aux systèmes ρ, σ, σ', ..., τ, τ', ... Donc il contient une substitution S qui remplace le système ρ par le système σ et réciproquement.

36. *La substitution* S *est permutable à* I_{r-1}. En effet, I_{r-1} est dérivé de substitutions semblables à A et ne déplaçant ni les lettres de ρ ni celles de σ. Soit T l'une quelconque de ces substitutions. Sa transformée par S ne déplacera pas ces mêmes lettres. Elle ne pourra d'ailleurs déplacer aucune des lettres des systèmes σ', ...; car ces lettres, en nombre $\mu - \mu' < p$, ne pourraient y former un cycle entier; elles se trouveraient donc mêlées dans les

cycles de la transformée avec les lettres de I_{r-1}; on aurait ainsi une substitution semblable à A et mêlant dans ses cycles aux lettres de I_{r-1} des lettres nouvelles en nombre $< \mu$; résultat inadmissible comme contraire à la définition de I_r. Donc la transformée, ne déplaçant que les lettres de I_{r-1}, appartiendra à ce groupe.

37. Cela posé, les systèmes $t, u, \ldots$ jouissent de la propriété que chaque substitution de I_{r-1} remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système. Les systèmes de lettres $t', u', \ldots$, que S leur fait succéder, jouiront de la même propriété dans le groupe transformé de I_{r-1} par S, lequel n'est autre que I_{r-1}. Mais il n'existe qu'une répartition des lettres de I_{r-1} en systèmes de μ lettres; donc $t', u', \ldots$ *se confondront, à l'ordre près, avec* $t, u, \ldots$.

Donc S *permute les uns dans les autres les systèmes* $t, u, \ldots$; et, par suite, elle permutera exclusivement ensemble les lettres de $\sigma', \ldots$.

38. Considérons maintenant le groupe I'_r transformé de I_r par S; les lettres s'y répartiront μ à μ en systèmes, respectivement formés des lettres que S fait succéder à celles de $s, t, u, \ldots$; ces nouveaux systèmes seront $(\rho, \sigma', \ldots), t, u, \ldots$, et I'_r les permutera d'une manière trois fois transitive. Il contiendra donc une substitution U qui remplace $(\rho, \sigma', \ldots)$ par t et réciproquement. Le groupe I'_{r-1}, transformé de I_{r-1} par U, déplacera toutes les lettres, sauf celles de σ et de t. Mais I_r, étant deux fois transitif par rapport aux systèmes $s = (\sigma, \sigma', \ldots), t, \ldots$, contient une substitution V qui remplace s par t et réciproquement. Le groupe I''_{r-1}, transformé de I'_{r-1} par V, ne déplacera pas les lettres de s. Donc les lettres nouvelles qu'il déplace, et que I_{r-1} ne déplaçait pas, se réduisent aux μ' lettres de ρ. Il dérive d'ailleurs de substitutions d'ordre p, comme I_{r-1} dont il est le transformé. Ces substitutions devront mêler dans leurs cycles les lettres nouvelles en nombre $\mu' < \mu$ avec les anciennes. Ce résultat est inadmissible, comme contraire à la définition du groupe I_r.

39. *On aura donc* $\mu' = \mu$; *donc les lettres de* I_{r+1} *se répartiront encore* μ *à* μ *en systèmes, et* I_{r+1} *ne sera pas primitif.*

40. Passons au groupe suivant I_{r+2}. Soit μ'' le nombre des lettres nouvelles déplacées par ce groupe; on verra de la même manière que $\mu'' = \mu$, et que I_{r+2} n'est pas primitif. De même pour I_{r+3}, etc. On pourra poursuivre indéfiniment, sans jamais arriver à un groupe primitif H qui puisse fermer la suite.

41. Il est donc établi, ainsi que nous l'avons annoncé (31), que I_{r-1} ne peut être plus de deux fois transitif par rapport aux systèmes $t, u, \ldots$; par suite I_r, qui est deux fois transitif par rapport à $s, t, u, \ldots$, le sera tout au plus trois fois.

42. Nous pouvons déduire de ce qui précède une limite pour le nombre k.

Considérons en effet les déplacements d'ensemble opérés sur les $\frac{pq+k}{\mu}$ systèmes s, t, ... par les substitutions de I_r. Le groupe J_r formé par ces déplacements sera m fois transitif, m étant égal à 2 ou à 3; il sera donc primitif. Il contient d'ailleurs une substitution d'ordre p à $\frac{q}{\mu}$ cycles.

Considérons en effet la substitution A. Nous avons vu (32) que les lettres de chacun de ses cycles appartiennent à p systèmes différents, que A permute entre eux. D'ailleurs chacun de ces p systèmes contenant μ lettres, l'ensemble de leurs lettres formera μ cycles dans A. Donc A contiendra les lettres de $\frac{pq}{\mu}$ systèmes, formant $\frac{q}{\mu}$ classes telles que A permute circulairement entre eux les p systèmes de chaque classe.

43. Cela posé, si le groupe J_r contient le groupe alterné, on aura $k \leqslant 2\mu$. En effet, J_r devra être $\frac{pq+k}{\mu} - 2$ fois transitif; mais il l'est tout au plus trois fois. On aura donc $\frac{pq+k}{\mu} \leqslant 5$. Mais on a par hypothèse $\mu > 1$, $q \geqslant \mu$, $p > q$, d'où $p \geqslant 3$. La condition ci-dessus ne pourra donc être satisfaite qu'en posant $p = 3$, $q = \mu = 2$, $k \leqslant 2\mu$.

44. Si J_r ne contient pas le groupe alterné, soit L le groupe formé par celles de ses substitutions qui laissent immobile $m-1$ systèmes donnés. Il sera simplement transitif par rapport aux systèmes restants. Il est d'ailleurs contenu dans J_r, qui est primitif, ne contient pas le groupe alterné, mais contient une substitution d'ordre p à $\frac{q}{\mu}$ cycles. Donc, en vertu de l'hypothèse admise (22), le nombre des systèmes que L déplace ne pourra dépasser $p\frac{q}{\mu} + \psi\left(\frac{q}{\mu}\right)$. Donc le nombre total des systèmes de J_r ne pourra dépasser $p\frac{q}{\mu} + \psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + m - 1$; et chacun d'eux contenant μ lettres, le nombre des lettres déplacées par I_r aura pour limite supérieure

$$pq + \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + (m-1)\mu.$$

On aura donc

$$k \leqslant \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + (m-1)\mu,$$

ou, en remarquant que $m \leqslant 3$,

$$(1) \qquad k \leqslant \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + 2\mu.$$

Cette limite, étant évidemment plus élevée que les limites μ et 2μ trouvées précédemment (29 et 43), s'appliquera à tous les cas et pourra être conservée seule.

45. Le groupe G, contenant un groupe transitif, mais non primitif I_r, de degré $pq+k$, contiendra un groupe deux fois transitif, K, et de degré $d=pq+k+q'+r'+s'+\ldots+1$, chacun des entiers $q', r', s'\ldots$ divisant le précédent, et q' étant un nombre tel, que les lettres de I_r puissent se répartir de deux manières différentes en systèmes de q' lettres. S'il n'existait aucun nombre q' jouissant de cette propriété, le degré de K se réduirait simplement à $pq+k+1$ (*Voir*, pour la démonstration, les nos 2 à 8 du mémoire intitulé *Théorèmes sur les groupes primitifs; Journal de Liouville*, 2e série, t. XVI).

Or nous avons vu (26) qu'il n'existe qu'une seule répartition des lettres de I_r en systèmes de μ lettres, et que dans les autres répartitions, s'il en existe, le nombre des lettres de chaque système est un diviseur de μ; donc q' divisera μ, et, si α désigne le nombre des facteurs premiers de μ, on aura

$$q'+r'+s'+\ldots+1 \leqslant \mu\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^\alpha}\right) \leqslant \mu-1.$$

On aura donc

$$(2) \qquad \Delta = d-pq \leqslant k+\mu-1 \leqslant \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right)+3\mu-1.$$

D'autre part $k \geqslant \mu$, puisque I_r déplace μ lettres nouvelles; d'ailleurs $q'+r'+\ldots+1$ est au moins égal à 1; d'où la limite inférieure

$$(3) \qquad \Delta \geqslant \mu+1 \geqslant k.$$

46. Soit maintenant $n=d+e$ le degré de G; ce groupe, contenant un groupe deux fois transitif de degré d, sera $e+2$ fois transitif, et le degré des groupes simplement transitifs qu'il peut contenir ne pourra dépasser la limite $d-1$. Car un groupe de degré $d-1+r$ contenu dans G serait $r+1$ fois transitif. On aura donc dans ce cas

$$pq+\psi(q) \leqslant d-1,$$

d'où

$$(4) \qquad \psi(q) \leqslant \Delta-1 \leqslant \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right)+3\mu-2.$$

47. Cela posé, admettons que l'on ait

$$(5) \qquad p > \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right)+3\mu-1, \quad \text{d'où} \quad p > \Delta;$$

nous allons trouver une limite supérieure pour le nombre inconnu n.

En premier lieu, nous établirons que *l'ordre* Ω *de* K *ne peut être divisible par* p^2.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les Δ lettres déplacées par K sans l'être par I, et soient respectivement L le groupe formé par l'ensemble des substitutions de G qui ne déplacent que les lettres de K (ce groupe, contenant K, sera au moins deux fois transitif) ; $L_1, L_2, L_3, \ldots$ les groupes formés par celles des substitutions de L qui laissent immobile α; α et β; α, β et γ; etc. Soient $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ les ordres respectifs de ces groupes ; O celui de I. Le groupe L étant deux fois transitif, on aura

$$\Omega = (pq + \Delta)\,\Omega_1 = (pq + \Delta)(pq + \Delta - 1)\,\Omega_2;$$

et, comme δ est > 2 et $< p$, Ω contiendra le facteur p à la même puissance que Ω_2.

On aura d'ailleurs

$$\Omega_2 = l\,\Omega_3,$$

l étant le nombre des lettres que L_2 permute avec γ. Ces lettres seront de deux sortes : les unes qui figuraient dans le groupe I; les autres nouvelles. Le nombre de ces dernières lettres sera au plus égal à $\Delta - 2$, et au moins égal à 1 (γ pouvant toujours être permuté avec lui-même) ; il sera donc premier à p. Au contraire, le nombre des lettres de la première sorte sera un multiple de p ; car L_2, contenant I, contiendra la substitution A dans les cycles de laquelle les lettres anciennes sont associées p à p ; et il est clair que si les substitutions de L_2 permutent γ avec une lettre ancienne quelconque ε, elles permettront de la permuter avec chacune des p lettres qui sont contenues dans le même cycle que celle-là. Donc l sera premier à p, et Ω_2 contiendra le facteur p à la même puissance que Ω_3.

Continuant ainsi, on verra que Ω contient le facteur p à la même puissance que O.

Or soient I' le groupe formé par celles des substitutions de I qui laissent immobile une lettre ε; O' son ordre ; l' le nombre des lettres avec lesquelles les substitutions de I permutent ε; on aura

$$O = l'O'.$$

Or l' est au plus égal à pq ; il est donc $< p^2$ et ne peut contenir qu'une fois le facteur p. D'autre part, O' est premier à p; sans quoi I' contiendrait une substitution d'ordre p, laquelle aurait moins de q cycles, le nombre total des lettres de I' étant $pq - 1$; résultat inadmissible, car G, et *a fortiori* I', ne contient par hypothèse aucune semblable substitution (22).

48. Soient maintenant H, H_1, H_2 les groupes respectivement formés par celles des substitutions de L, L_1, L_2 qui sont permutables au groupe I

formé par les puissances de A ; ω, ω_1, ω_2 les ordres de ces groupes ; on aura, d'après le théorème de M. Sylow,

$$\Omega \equiv \omega, \quad \Omega_1 \equiv \omega_1, \quad \Omega_2 \equiv \omega_2 \bmod p^2,$$

et, par suite,

$$(6) \qquad \omega \equiv (pq + \Delta)\omega_1, \quad \omega_1 \equiv (pq + \Delta - 1)\omega_2.$$

Mais les substitutions de H_1, étant permutables à Γ, devront permuter exclusivement entre elles les $\Delta - 1$ lettres $\beta, \gamma, \ldots$ que Γ ne déplace pas ; et il est clair que l'on aura $\omega_1 = r\omega_2$, r étant le nombre de celles de ces lettres que les substitutions de H_1 permutent avec la lettre β, que les substitutions de H_2 ne déplacent pas. On aura par suite

$$r\omega_2 \equiv (pq + \Delta - 1)\omega_2 \bmod p^2,$$

et comme ω_2, diviseur de Ω_2, n'est pas divisible par p^2, on aura

$$r \equiv \Delta - 1 \bmod p,$$

et enfin, comme $r < \Delta - 1 < p$,

$$(7) \qquad r \equiv \Delta - 1.$$

Donc les substitutions de H_1 permutent transitivement les lettres $\beta, \gamma, \ldots$.

On verra de la même manière que les substitutions de H permutent transitivement α avec $\beta, \gamma, \ldots$; il permutera donc les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ entre elles d'une manière deux fois transitive.

49. Soient maintenant y, z, $u, \ldots$ les lettres, en nombre e, que G déplace, mais que L ne déplaçait pas. Le groupe G, étant $e + 2$ fois transitif, contiendra une substitution S qui laisse immobiles $e - 1$ lettres $z, \ldots$, et qui remplace y par α et réciproquement. Cette substitution sera permutable à L_1 ; car les transformées des substitutions de L_1 par S appartiendront à G ; d'autre part, elles laissent immobiles les lettres $y, z, \ldots, \alpha$ que L_1 ne déplace pas et que S permute exclusivement entre elles ; donc elles appartiendront à L_1, en vertu de la définition de ce groupe. Quant au groupe L, S le transformera en un groupe semblable L′, où la lettre y jouera le même rôle que α jouait dans le groupe L. Cela posé, le groupe L′, contenant L_1, contiendra la substitution A, dont les puissances forment le groupe Γ ; et, en appliquant à L′ les mêmes raisonnements qu'à L, on voit que le groupe H′ formé par celles des substitutions de L′ qui sont permutables à Γ permutera exclusivement entre elles, et d'une manière deux fois transitive, les lettres $y, \beta, \gamma, \ldots$ que Γ ne déplace pas.

Les substitutions de H et de H′ combinées ensemble permettront évidemment d'amener y à la place de l'une quelconque des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, y$; puis,

sans déplacer y, d'amener α et β à deux quelconques des places restantes; donc le groupe (H, H') sera trois fois transitif par rapport à ces lettres.

50. On voit de la même manière que G contient un groupe H'', dont les substitutions sont permutables à Γ, laissent immobiles les lettres y, u,..., et permutent entre elles, d'une manière deux fois transitive, les lettres z, β, γ,..., etc.; et que le groupe (H, H', H'') sera quatre fois transitif par rapport aux lettres α, β, γ,..., y, z. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé le nombre des lettres y, z, ...

51. Soit maintenant $\mathfrak{H}$ le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à Γ et permutent exclusivement entre elles les $e+4$ lettres α, β, γ,..., y, z, ... Ce groupe, contenant évidemment H, H', H'', ..., sera au moins $e+2$ fois transitif par rapport à ces lettres. Ses substitutions seront d'ailleurs de la forme XY, X étant une substitution entre les lettres ci-dessus et Y une substitution entre les lettres anciennes que Γ déplace.

La substitution partielle X étant échangeable à Γ, la substitution Y lui sera permutable. Donc elle remplacera les lettres de chaque cycle de A, lesquelles sont permutées entre elles par les substitutions de Γ, par d'autres lettres jouissant de cette propriété, et appartenant par suite à un même cycle de A. On aura donc $Y = ZU$, Z étant une substitution qui permute entre eux les cycles de A en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes, et U une substitution qui ne déplace plus les cycles. Cette substitution U, étant permutable à Γ, transformera A en une de ses puissances, telle que A^{g^ρ} (g désignant une racine primitive de p). Or, si l'on désigne par a_{11},..., a_{1p},..., a_{q1},..., a_{qp} les diverses lettres de A, on pourra la mettre sous la forme

$$A = | a_{uv} \; a_{u+1,v} |,$$

et la substitution

$$V = | a_{uv} \; a_{gu,v} |$$

la transformera en A^g. On aura donc $U = V^\rho W$, W étant une nouvelle substitution qui ne déplace pas les cycles et qui soit échangeable à A; on voit sans peine qu'elle devra être de la forme.

$$W = | a_{uv} \; a_{u+\varphi(v),v} |.$$

Il est donc établi que les substitutions de $\mathfrak{H}$ seront toutes de la forme $XZV^\rho W$.

52. Ici divers cas seront à distinguer :

1° Parmi les substitutions du groupe $\mathfrak{H}$, il en existe deux $S_1 = X_1 Z_1 V^{\rho_1} W_1$, $S_2 = X_2 Z_2 V^{\rho_2} W_2$, pour lesquelles on aura $Z_1 = Z_2$, sans avoir en même temps

$X_1 = X_2$. Dans ce cas, $\mathfrak{H}$ contiendra la substitution $S_1 S_2^{-1}$, qui se réduit évidemment à la forme XV^rW, X différant de l'unité.

Soient $X'V^{r'}W'$, $X''V^{r''}W''$,... les substitutions de $\mathfrak{H}$ qui se réduisent à cette forme. Elles forment un groupe évidemment permutable aux substitutions de $\mathfrak{H}$. *A fortiori*, les substitutions partielles X', X'',... formeront un groupe permutable au groupe partiel formé par les déplacements X_1, X_2,... que les substitutions de $\mathfrak{H}$ font éprouver aux $e+\Delta$ lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, x, y, \ldots$.

Mais le groupe $(X_1, X_2, \ldots)$ est $e+2$ fois transitif. Donc le groupe $(X', X'', \ldots)$, qui est permutable à ses substitutions, sera au moins $e+1$ fois transitif, si $e > 1$ (même tome, *Sur la limite de transitivité des groupes non alternés*, p. 69). Donc ses substitutions ne seront pas toutes échangeables entre elles. Supposons, par exemple, que X' ne soit pas échangeable à X''.

Des deux substitutions $S' = X'V^{r'}W'$, $S'' = X''V^{r''}W''$, on déduira la substitution $S'^{-1}S''^{-1}S'S''$ qui se réduit à la forme XW (X différant de l'unité).

53. Soient $x'w'$, $x''w''$,... les substitutions de cette dernière forme que contient $\mathfrak{H}$. Elles forment un groupe évidemment permutable aux substitutions de $\mathfrak{H}$; et les substitutions partielles x', x''... formeront un groupe permutable à X_1, X_2,...; il sera donc $e+1$ fois transitif, et ses substitutions ne seront pas toutes échangeables entre elles. Supposons, par exemple, que x' ne le soit pas à x'' ; les substitutions w', w'',... de la forme W étant évidemment échangeables entre elles, $\mathfrak{H}$ contiendra la substitution $(x'w')^{-1}(x''w'')^{-1}(x'w')(x''w'')$, qui se réduira à la forme X.

Donc $\mathfrak{H}$ contiendra des substitutions de la forme X. Elles constitueront un groupe évidemment permutable à X_1, X_2,..., et qui, par suite, sera $e+1$ fois transitif. D'ailleurs, il ne déplace que les $e+\Delta$ lettres α, β, γ,..., x, y,.... Le groupe G, de degré n, contenant ce dernier groupe, sera $n-\Delta+1$ fois transitif. Mais il ne peut l'être plus de $\frac{n+4}{3}$ fois (*Traité des substitutions*, 83) ; on aura donc

$$n < \frac{3\Delta+1}{2} < \frac{3p+1}{2},$$

résultat absurde, car $n \geqslant qp+\Delta+2$ et $q > 1$ par hypothèse.

54. Si l'on avait $e = 1$, il pourrait se faire que le groupe $(X', X'', \ldots)$, permutable aux substitutions du groupe $(B_1, B_2, \ldots)$, ne fût qu'une fois transitif, ce qui infirmerait le raisonnement. Mais cette circonstance ne peut se présenter (*loc. cit.*) que si le degré $e+\Delta$ de ce groupe est une puissance de 2, et ses substitutions de la forme

$$| \; u, v, \ldots \quad u+\sigma, \; v+\sigma', \ldots \; | \bmod 2.$$

Comme $e+\Delta$ est au moins égal à 3, il y aura plusieurs indices, et les substitutions X', X'',... ne seront pas des puissances d'une même substitu-

tion. Supposons, par exemple, que X'' ne soit pas une puissance de X'; $\mathfrak{H}$ contiendra la substitution $X'V^{\rho'}W'(X''V^{\rho''}W'')^{-\frac{\rho'}{\rho''}}$, qui se réduit à la forme XW, X différant de l'unité. D'ailleurs X, appartenant au groupe $(X', X'', \ldots)$, sera d'ordre 2, tandis que W est d'ordre p; et $\mathfrak{H}$ contiendra la substitution $(XW)^p = X$.

Donc $\mathfrak{H}$ contient des substitutions de la forme X. Ces substitutions forment un groupe permutable aux substitutions de $\mathfrak{H}$, et par suite transitif. Il a d'ailleurs pour degré $1+\Delta$. Donc G contiendra un groupe transitif de degré $1+\Delta$; si donc il n'est pas alterné, son degré n sera inférieur à $3(1+\Delta)-2$ (*Théorèmes sur les groupes primitifs*, n° 2). Ce résultat est absurde, car $n = qp + \Delta + 1$, où $q > 1$ et $p > \Delta$.

55. Donc, dans l'hypothèse que nous traitons, il faudra nécessairement admettre $e = 0$, d'où

$$n \leqslant pq + \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + 3\mu - 1,$$

et enfin

$$\varphi(q) = n - pq \leqslant \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + 3\mu - 1. \tag{8}$$

56. 2° Il nous reste à discuter l'hypothèse où, parmi les substitutions de $\mathfrak{H}$, $X_1Z_1V^{\rho_1}W_1, X_2Z_2V^{\rho_2}W_2, \ldots$, il n'en existe point où l'on ait $Z_1 = Z_2$, sans avoir en même temps $X_1 = X_2$. Dans ce cas, à chacune des substitutions du groupe $Z_1, Z_2, \ldots)$ correspondra une seule substitution du groupe $(X_1, X_2, \ldots)$; ce dernier groupe sera donc isomorphe au précédent, et si l'on désigne par ξ et ζ leurs ordres respectifs, par Θ le nombre des substitutions de $(Z_1, Z_2, \ldots)$ auxquelles correspond l'unité dans l'autre groupe, on aura

$$\zeta = \Theta\xi \equiv 0 \mod \xi.$$

D'ailleurs $(Z_1, Z_2, \ldots)$ étant un groupe de substitutions opérées entre q cycles, son ordre ζ divisera $1.2\ldots q$. D'un autre côté, le groupe $(X_1, X_2, \ldots)$, étant $e+2$ fois transitif entre $e+\Delta$ lettres, aura pour ordre un multiple de $(e+\Delta)(e+\Delta-1)\ldots(\Delta-1)$. On aura donc

$$1.2\ldots q \equiv 0 \mod \xi \equiv 0 \mod (e+\Delta)(e+\Delta-1)\ldots(\Delta-1), \tag{9}$$

et *a fortiori*

$$1.2\ldots q \geqslant (e+\Delta)(e+\Delta-1)\ldots(\Delta-1), \tag{10}$$

ou, comme $\Delta \geqslant 3$,

$$1.2\ldots q \geqslant 2.3\ldots(e+3),$$

d'où

$$e \leqslant q - 3. \tag{11}$$

d'où l'on conclut

$$n = e + \Delta + pq \leqslant q - 3 + \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + 3\mu - 1 + pq,$$

et enfin

$$\varphi(q) = n - pq \leqslant \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + q + 3\mu - 4. \tag{12}$$

V

57. *Second cas*, $\mu = 1$. — Nous avons vu (27) que I_r sera primitif; mais I_{r-1} n'est pas transitif, et l'on pourra répartir ses lettres en classes, en réunissant ensemble celles qui sont permutées entre elles. Chaque classe sera formée des lettres d'un ou plusieurs cycles de A, seules, ou jointes à des lettres nouvelles. Soient respectivement $b, c, d, \ldots$ le nombre des cycles de A dont les lettres appartiennent à la première classe, à la seconde, à la troisième, etc. ; $bp + b'$, $cp + c'$, ... les nombres de lettres de ces classes. Chaque substitution de I_{r-1} sera de la forme BC ..., B, C, ... étant des substitutions partielles respectivement opérées sur les lettres des diverses classes.

Soient donc $B_1C_1 \ldots$, $B_2C_2 \ldots$, ... les diverses substitutions semblables à A dont I_{r-1} est dérivé. Considérons les groupes respectivement dérivés des substitutions partielles $B_1, B_2, \ldots$; $C_1, C_2, \ldots$; ....

58. Le groupe $(B_1, B_2, \ldots)$ a pour degré $bp + b'$, et contient une substitution d'ordre p à b cycles; à savoir la substitution partielle B_1 formée par les b premiers cycles de la substitution $A = B_1C_1 \ldots$.

Répartissons les lettres de ce groupe en systèmes tels que les substitutions de $(B_1, B_2, \ldots)$ remplacent les lettres de chaque système par celles d'un même système; et, s'il existe plusieurs semblables répartitions, choisissons une de celles où le nombre β des lettres de chaque système est maximum. Si $(B_1, B_2, \ldots)$ est primitif, chaque système sera formé d'une seule lettre et l'on aura $\beta = 1$; mais *dans tous les cas on aura* $\beta < p$. Supposons en effet qu'un des systèmes, s, contienne au moins p lettres. Le groupe $(B_1, B_2, \ldots)$ étant transitif, l'une au moins des substitutions dont il dérive, par exemple B_2, doit déplacer le système s; donc elle déplacera toutes ses lettres. Mais leur nombre est supérieur au nombre des cycles de B_2, lequel est au plus égal à q. Donc B_2 contiendra deux de ces lettres, α et α', dans un même cycle. Si elles s'y suivent à m rangs de distance, la substitution B_2^m, remplaçant α par α', ne déplacera pas s; et B_2, qui en est une puissance, ne le déplacera pas non plus, contrairement à notre supposition.

Les lettres contenues dans chacun des cycles de l'une quelconque des substi-

tutions $B_1, B_2, \ldots$, *telle que* B_2, *appartiendront toutes à des systèmes différents;* car si l'un de ces cycles contenait deux lettres de s, α et α', se suivant à m rangs d'intervalle, B_2^m et par suite B_2, qui en est une puissance, ne déplacerait pas s; donc elle permuterait exclusivement entre elles les lettres de ce système, résultat absurde, puisqu'elles sont en nombre insuffisant pour former un cycle dans B_2.

Donc chacune des substitutions $B_1, B_2, \ldots$ permutera les systèmes p à p. Donc le groupe $\mathfrak{B}$, formé par les déplacements que les substitutions du groupe $(B_1, B_2, \ldots)$ font éprouver aux systèmes, sera dérivé de substitutions d'ordre p; p étant impair, ces substitutions seront toutes contenues dans le groupe alterné. $\mathfrak{B}$ aura pour degré $\frac{bp+b'}{\beta}$. D'ailleurs il sera primitif; car autrement on pourrait grouper les systèmes en hypersystèmes contenant plus de β lettres, contrairement à notre hypothèse.

Enfin la substitution B_1 déplace bp lettres, appartenant à $\frac{bp}{\beta}$ systèmes, qu'elle permute p à p. Donc β divise b, et la substitution de $\mathfrak{B}$ correspondant à B_1 sera d'ordre p à $\frac{b}{\beta}$ cycles.

59. On verra de même que les lettres du groupe $(C_1, C_2, \ldots)$ peuvent être réparties en systèmes contenant chacun γ lettres, γ étant un diviseur de c qui peut se réduire à l'unité; et que les déplacements opérés sur les systèmes par les substitutions $(C_1, C_2, \ldots)$ forment un groupe primitif $\mathfrak{C}$ de degré $\frac{cp+c'}{\gamma}$, contenu dans le groupe alterné, et contenant une substitution d'ordre p à $\frac{c}{\gamma}$ cycles. De même pour chacun des groupes suivants $(D_1, D_2, \ldots), \ldots$.

Ici deux cas seront à distinguer :

60. *Première hypothèse. — Aucun des groupes* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... *ne contient le groupe alterné.*

Notre théorème étant supposé établi pour les nombres $\frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \ldots$ qui sont tous $< q$, on aura

$$(13) \qquad \frac{b'}{\beta} \leqslant \varphi\left(\frac{b}{\beta}\right), \quad \frac{c'}{\gamma} \leqslant \varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right), \ldots,$$

d'où

$$(14) \qquad pq + \Delta = 1 + bp + b' + cp + c' + \ldots$$
$$= 1 + qp + b' + c' + \ldots \leqslant 1 + qp + \beta\varphi\left(\frac{b}{\beta}\right) + \gamma\varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right) + \ldots.$$

Or supposons d'abord que $\frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \ldots$ soient tous $\leqslant \frac{q}{2}$; $\beta\varphi\left(\frac{b}{\beta}\right) + \gamma\varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right) + \ldots$ est évidemment l'une des valeurs que peut prendre l'expression

$$\varphi(s) + \varphi(t) + \ldots, \tag{15}$$

où $s, t, \ldots$ sont des entiers variables, assujettis aux conditions

$$s + t + \ldots = b + c + \ldots = q, \quad \frac{q}{2} \geqslant s \geqslant t \geqslant \ldots. \tag{16}$$

On aura donc, en désignant par $\mathfrak{M}$ la valeur maximum de cette expression,

$$\Delta \leqslant 1 + \mathfrak{M}. \tag{17}$$

61. Soit au contraire $\frac{b}{\beta} > \frac{q}{2}$, d'où $\beta = 1$; $(B_1, B_2, \ldots)$ sera primitif; mais nous allons montrer que ce groupe sera simplement transitif, si p est suffisamment grand. Dès lors on aura, en outre de l'hypothèse admise,

$$b' \leqslant \psi(b), \tag{18}$$

et, par suite,

$$\Delta \leqslant 1 + \psi(b) + \gamma\varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right) + \ldots, \tag{19}$$

et *a fortiori*

$$\Delta \leqslant 1 + \mathfrak{N}, \tag{20}$$

$\mathfrak{N}$ désignant le maximum de l'expression

$$\psi(b) + \varphi(s) + \varphi(t) + \ldots \quad \left(s + t + \ldots = q - b,\ b > \frac{q}{2}\right). \tag{21}$$

62. Supposons en effet que $(B_1, B_2, \ldots)$ fût plusieurs fois transitif, et soient : x la lettre déplacée par I_r sans l'être par I_{r-1}; J le groupe formé par celles des substitutions de I_r qui laissent x immobile. Le groupe I_{r-1} est dérivé, par définition, de celles des substitutions de J qui sont semblables à A; et les substitutions de J, les transformant évidemment les unes dans les autres, seront permutables à I_{r-1}; donc elles remplaceront les lettres de chaque classe par celles d'une même classe. Mais les classes contiennent respectivement $bp + b'$, $cp + c'$, ... lettres; et, comme on a par hypothèse $b > \frac{q}{2}$ et $b + c + \ldots = q$, on aura $b > c > \ldots$. Si donc on a

$$p > 1 + \mathfrak{N}, \tag{22}$$

d'où *a fortiori*

$$(23) \qquad p > 1 + \gamma\varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right) + \ldots > 1 + c' + \ldots,$$

la première classe contiendra plus de lettres que toutes les autres et ne pourra, par suite, être permutée avec elles; donc J permutera exclusivement entre elles les $bp + b'$ lettres de la première classe, d'une part, et les $(q - b)p + c' + \ldots$ lettres restantes, d'autre part.

63. Soient maintenant O l'ordre de J, et y, z deux quelconques des lettres de ce groupe. L'ordre du groupe L, formé par celles des substitutions de I_r qui laissent immobiles x, y, z, sera évidemment égal à $\frac{O}{mm'}$, m étant le nombre des lettres que les substitutions de J permutent avec y, et m' le nombre des lettres que celles des substitutions de J qui ne déplacent plus y permutent avec z. Par hypothèse, le groupe I_{r-1}, et *a fortiori* le groupe J, permute d'une manière deux fois transitive les lettres de la première classe. Donc si y et z appartiennent à cette classe, on aura $mm' = (bp + b')(bp + b' - 1)$. Si y appartient à la première classe et z aux autres classes, on aura encore $m = bp + b'$, et $m' \leqslant (q - b)p + c' + \ldots$ quantité moindre que $bp + b - 1$, car on a par hypothèse $q - b < b$, et $p > 1 + c' + \ldots$. Si enfin y et z n'appartiennent ni l'un ni l'autre à la première classe, m et m' seront tous deux moindres que $bp + b' - 1$. Donc mm' atteint son maximum lorsque y et z appartiennent à la première classe.

64. Cela posé, soient y, z, u, ... les lettres de la première classe; v, w, ... les autres. Toute substitution S du groupe I_r qui remplace x par une des lettres y, z, ..., telle que y, permutera exclusivement entre elles les lettres x, y, z, ... En effet, soit J' le groupe transformé de J par S; il ne déplacera pas y; et les autres lettres s'y grouperont en classes, de telle sorte que l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de J' qui laissent immobiles deux de ces lettres sera $\frac{O}{(bp + b)(bp + b' - 1)}$ si les deux lettres sont de la première classe, et sera plus grand dans le cas contraire. Or cet ordre sera $\frac{O}{(bp + b')(bp + b' - 1)}$ si les deux lettres données sont x et l'une des lettres z, u, ... Donc la première classe sera formée des lettres x, z, u, ... Mais elle est formée des lettres que S fait succéder à y, z, u, ... Donc S permute exclusivement entre elles les lettres x, y, z, u, ..., comme nous l'avons annoncé.

On déduit aisément de là (*Traité des substitutions*, n° 396) que le groupe I_r ne pourrait être primitif, ainsi que nous l'avons supposé, mais que ses lettres devraient se répartir en systèmes, dont l'un serait formé des lettres x, y, z, u, ...

Il est donc absurde d'admettre que $(B_1, B_2, \ldots)$ soit plusieurs fois transitif.

65. Soit maintenant $n = pq + \Delta + e$ le nombre des lettres que contient le groupe G. Il contient le groupe primitif et simplement transitif I_r; il sera donc $e+1$ fois transitif; et le degré $pq + \psi(q)$ des groupes simplement transitifs qu'il peut contenir ne pourra dépasser $pq + \Delta$; on aura donc ici

$$\psi(q) \leqslant \Delta, \tag{24}$$

Δ étant déterminé comme ci-dessus.

66. Supposons maintenant p supérieur à la plus grande des deux limites $1 + \mathfrak{N}$, $1 + \mathfrak{M}$, trouvées ci-dessus pour Δ.

On verra comme précédemment (47 à 55) : 1° que le groupe $\mathfrak{G}$ formé par celles des substitutions de G qui sont permutables au groupe formé des puissances de A et qui permutent exclusivement entre elles les lettres de A d'une part, et les lettres nouvelles d'autre part, est $e+1$ fois transitif par rapport à ces lettres nouvelles; 2° que ses substitutions sont de la forme XZV^eW; 3° que si, dans deux de ces substitutions $X_1Z_1V^{e_1}W_1$, $X_2Z_2V^{e_2}W_2$, on a $Z_1 = Z_2$ sans avoir $X_1 = X_2$, et si l'on suppose $e > 2$, G contiendra un groupe de substitutions de la forme X, qui sera e fois transitif et de degré $e + \Delta$. Par suite, G sera $n - \Delta$ fois transitif; et comme il ne peut l'être plus de $\frac{n+4}{3}$ fois, on aura

$$n - \Delta \leqslant \frac{n+4}{3}, \text{ d'où } n \leqslant \frac{3\Delta + 4}{2},$$

résultat absurde, n étant égal à $pq + \Delta + e$, où $q > 1$, $p > \Delta$, $e > 2$.

Supposons au contraire qu'on ne puisse avoir $Z_1 = Z_2$ sans avoir $X_1 = X_2$. On verra, comme précédemment (56), que l'on a

$$1.2\ldots q \equiv 0 \mod (e+\Delta)(e+\Delta-1)\ldots\Delta, \tag{25}$$

d'où, en donnant à Δ sa valeur minimum 1,

$$e \leqslant q, \tag{26}$$

limite au moins égale à la limite $e = 2$ trouvée dans l'autre hypothèse.

On aura donc, pour la limite supérieure de $e + \Delta$, l'une des deux expressions

$$\varphi(q) \leqslant q + \varphi(s) + \varphi(t) + \ldots \quad \left(s + t + \ldots = q,\ \frac{q}{2} \geqslant s \geqslant t \ldots\right), \tag{27}$$

ou

$$\varphi(q) \leqslant q + \psi(b) + \varphi(s) + \varphi(t) + \ldots \quad \left(s + t + \ldots = q - b,\ b > \frac{q}{2}\right). \tag{28}$$

67. *Seconde hypothèse. — Le groupe* $\mathfrak{B}$ *est alterné.*

Ce groupe sera simple et aura pour ordre $\omega = 3.4 \ldots p_1$, en posant, pour abréger, $p_1 = \frac{bp + b'}{\beta}$. Ce sera d'ailleurs le premier groupe composant de $(B_1, B_2, \ldots)$.

68. Lemme. — *Chacun des groupes* $(C_1, C_2, \ldots)$, $(D_1, D_2, \ldots)$, ... *aura l'un au moins de ses groupes composants isomorphe à* $\mathfrak{B}$.

Supposons en effet, pour fixer les idées, que le groupe $(C_1, C_2, \ldots)$ jouisse de cette propriété, à l'exclusion des autres groupes de la suite. Il a pour groupes composants ceux du groupe $\mathfrak{C}$, suivis de ceux du groupe formé par celles des substitutions de $(C_1, C_2, \ldots)$ qui ne déplacent pas les systèmes de γ lettres entre lesquels se répartissent les lettres de $(C_1, C_2, \ldots)$. Mais chacun de ces derniers groupes composants a évidemment pour ordre un diviseur de $1.2 \ldots \gamma$, nombre $< \omega$ (car $\gamma < q < p < p_1$). Donc l'un des groupes composants de $\mathfrak{C}$ sera isomorphe à $\mathfrak{B}$.

Cela posé, soient $B'C'$, $B''C''$, ... celles des substitutions de I_{r-1} qui se réduisent à la forme BC. Le groupe $(B', B'', \ldots)$ sera évidemment contenu dans $(B_1, B_2, \ldots)$ et permutable à ses substitutions; d'ailleurs il aura conservé celui des facteurs de composition de $(B_1, B_2, \ldots)$ qui est afférent au groupe $\mathfrak{B}$ (*Sur la limite de transitivité des groupes non alternés*, n° 10). De même $(C', C'', \ldots)$ sera contenu dans $(C_1, C_2, \ldots)$ et permutable à ses substitutions, et le groupe $\mathfrak{C}'$ formé par celles des substitutions de $\mathfrak{C}$ qui correspondent à celles de $(C', C'', \ldots)$ aura conservé le facteur de composition ω.

69. Ici deux cas seront à distinguer, suivant que $\mathfrak{C}$ sera ou non alterné.

1° Si $\mathfrak{C}$ n'est pas alterné, ce groupe étant d'ordre $\frac{cp + c'}{\gamma}$ et contenant une substitution d'ordre p à $\frac{c}{\gamma}$ cycles, on aura par hypothèse

$$\frac{c'}{\gamma} < \varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right), \quad c' < \gamma\varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right) < p, \quad cp + c' < (c+1)p,$$

à cause de la relation (23).

Cela posé, le groupe alterné $\mathfrak{B}$ contient une substitution circulaire d'ordre p; la substitution correspondante du groupe $(B', B'', \ldots)$ sera de la forme MN, M permutant circulairement p systèmes et N permutant ensemble les lettres des autres systèmes, sans déplacer ces systèmes eux-mêmes. Le nombre β des lettres de chaque système étant $< p$, l'ordre de N sera évidemment premier à p. Donc, en élevant MN à une puissance convenable, on obtiendra une substitution, contenue dans $(B', B'', \ldots)$ et ne déplaçant que les lettres de p systèmes, en nombre βp. Soient B' cette substitution, $B'C'$ la substitution correspondante dans le groupe $(B'C', B''C'', \ldots)$. Le nombre total des lettres que C' peut déplacer étant $< (c+1)p$, le nombre k des cy-

cles d'ordre p que C′ peut contenir ne saurait dépasser c. Mais il est clair qu'en élevant B′C′ à une puissance convenable, on obtiendra une substitution d'ordre p à $\beta+k$ cycles. Ce résultat est absurde ; car β divisant b, on aura $\beta \leqslant b$, et

$$\beta+k \leqslant b+c < b+c+d+\ldots < q,$$

et, par hypothèse, G ne contient aucune substitution d'ordre p à moins de q cycles.

70. 2° Si $\mathfrak{C}$ est alterné, il sera simple, et aura pour ordre $3.4\ldots\frac{cp+c'}{\gamma}$; ce nombre devant être égal à ω, on aura $\frac{cp+c'}{\gamma}=p_1$.

Cela posé, à chaque substitution du groupe (B′C′, B″C″, ...) correspondent une substitution de $\mathfrak{B}$ et une de $\mathfrak{C}$. Si à deux substitutions différentes B′C′, B″C″ correspondaient dans $\mathfrak{B}$ deux substitutions différentes $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$, et dans $\mathfrak{C}$ une seule substitution $\mathfrak{C}'$, à la substitution $[B'C']^{-1}B''C''$ correspondraient dans $\mathfrak{C}$ l'unité, et dans $\mathfrak{B}$ la substitution $\mathfrak{B}'^{-1}\mathfrak{B}''$ qui diffère de l'unité. Celles des substitutions de (B′C′, B″C″, ...), auxquelles correspond dans $\mathfrak{C}$ l'unité, forment évidemment un groupe permutable aux substitutions B′C′, B″C″, ... ; leurs correspondantes dans $\mathfrak{B}$ formeront un groupe contenu dans $\mathfrak{B}$ et permutable à ses substitutions ; mais $\mathfrak{B}$ est simple ; donc ce nouveau groupe contiendra toutes les substitutions de $\mathfrak{B}$. Il contiendra en particulier une substitution circulaire d'ordre p. La substitution correspondante dans (B′C′, B″C″, ...) sera de la forme MNP, M permutant circulairement p des systèmes de β lettres, N permutant les lettres des autres systèmes de $\mathfrak{B}$ sans déplacer ces systèmes, et P permutant les lettres des systèmes de $\mathfrak{C}$ sans déplacer ces systèmes ; d'ailleurs il est clair que N et P ont leur ordre premier à p ; donc MNP, élevé à une puissance convenable, donnera une substitution d'ordre p, à β cycles seulement ; résultat absurde.

71. Il faut donc admettre que la correspondance établie entre les substitutions de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{C}$ est telle qu'à chaque substitution de $\mathfrak{C}$ réponde une seule substitution de $\mathfrak{B}$. Or soient $s, s', \ldots$ les divers systèmes de β lettres que $\mathfrak{B}$ déplace ; $t, t', \ldots$ les divers systèmes de γ lettres que $\mathfrak{C}$ déplace. *Deux substitutions correspondantes $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{C}'$ déplaceront de la même manière les systèmes $s, s', \ldots$ et leurs homologues $t, t', \ldots$.*

En effet, celles des substitutions de $\mathfrak{B}$ qui laissent immobile s forment un groupe contenu dans $\mathfrak{B}$ et renfermant $3\ldots(p_1-1)$ substitutions. Les substitutions correspondantes de $\mathfrak{C}$ devront former un groupe homologue Γ, d'ordre $3\ldots(p_1-1)$. Mais, en vertu d'un théorème de M. Bertrand, tout groupe de degré p_1 et d'ordre $3\ldots(p_1-1)$ (caractérisant une fonction à $2p_1$ valeurs) sera alterné par rapport à p_1-1 lettres, pourvu toutefois qu'on ait $p_1>7$;

on vérifie d'ailleurs aisément que cela est encore vrai pour $p_1 = 7$. Mais $p_1 > p$, et p est premier; donc cette condition sera satisfaite si l'on a

(29) $$p > 5.$$

Cette inégalité étant admise, le groupe Γ sera alterné par rapport à $p_1 - 1$ systèmes de la suite $t, t', \ldots$; et ses substitutions laisseront immobile le système restant t.

Donc à chacun des systèmes $s, s', \ldots$ sera associé un des systèmes $t, t', \ldots$, de telle sorte qu'à celles des substitutions de $\mathfrak{B}$ qui ne déplacent pas l'un des systèmes $s, s', \ldots$ correspondent des substitutions qui ne déplacent pas son associé.

72. Cela posé, soient s, s', s'', s''' quatre quelconques des systèmes de $\mathfrak{B}$; t, t', t'', t''' leurs correspondants dans $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{B}$, étant alterné, contient les substitutions $S = (ss's'')$ et $S_1 = (ss's''')$; à la première correspond dans $\mathfrak{C}$ une substitution ternaire T, ne déplaçant que t, t' et t''; ce sera donc $(tt't'')$ ou $(tt''t')$; à la seconde correspondra de même une substitution T_1 de l'une des deux formes $(tt't''')$, $(tt'''t')$. Mais $S_1 S^{-1}$ laisse s invariable; donc $T_1 T^{-1}$ doit laisser t invariable; il faut évidemment pour cela qu'on ait $T = (tt't'')$, $T_1 = (tt't''')$.

Donc à chacune des substitutions circulaires ternaires telles que $(ss's'')$, dont $\mathfrak{B}$ est dérivé, correspondra dans $\mathfrak{C}$ une substitution analogue $(tt't'')$. Donc chaque substitution de $\mathfrak{C}$ déplacera les t de la même manière que sa correspondante dans $\mathfrak{B}$ déplace les s.

73. Cela posé, $\mathfrak{B}$ contient une substitution circulaire σ d'ordre p; son homologue dans $\mathfrak{C}$ sera circulaire et d'ordre p; et la substitution correspondante dans le groupe $(B'C', B''C'', \ldots)$ sera de la forme $MNM'N'$, M étant une substitution qui permute circulairement p des systèmes de $\mathfrak{B}$, N une substitution qui permute les lettres dans l'intérieur des autres systèmes, M' une substitution circulaire entre p systèmes de $\mathfrak{C}$, N' une substitution qui permute les lettres dans l'intérieur des autres systèmes. D'ailleurs N et N' ont leur ordre évidemment premier à p. Donc la substitution considérée, élevée à une puissance convenable, donnera une nouvelle substitution de la forme MM' et déplaçant seulement $(\beta + \gamma)p$ lettres; résultat absurde, $\beta + \gamma$ étant $< q$.

Notre lemme est donc établi.

74. Pour continuer notre recherche, nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — Les groupes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \ldots$ sont tous alternés.

Nous admettrons, pour fixer les idées, que cette suite ne contient que deux groupes $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$.

D'après ce que nous avons vu, on aura $p_1 = \dfrac{bp + b'}{\beta} = \dfrac{cp + c'}{\gamma}$. De plus, Γ_{r-1} contiendra une substitution d'ordre p déplaçant $(\beta + \gamma)p$ lettres; or

il ne peut par hypothèse en contenir aucune déplaçant moins de $qp=(b+c)p$ lettres. On aura donc nécessairement $\beta=b$, $\gamma=c$ $\left(\frac{b}{\beta}\right.$ et $\frac{c}{\gamma}$ devant être entiers).

D'ailleurs, chacun des systèmes s, s',... de $\mathfrak{B}$ doit être associé à un des systèmes t, t',... de $\mathfrak{C}$. En joignant ensemble les lettres des systèmes associés, on obtiendra des systèmes de $\beta+\gamma=q$ lettres, tels que les substitutions de I_{r-1} remplacent chacune les lettres d'un système par celles d'un même système, et permutent d'ailleurs les systèmes d'une manière alternée. Si donc on fait correspondre d'une manière arbitraire les lettres de chaque système avec celles d'un autre système, chaque substitution de I_{r-1} sera de la forme $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ étant une substitution qui permute les systèmes en remplaçant chaque lettre par sa correspondante, et $\mathfrak{N}$ une substitution qui permute exclusivement entre elles les lettres d'un même système.

75. Supposons maintenant que l'on ait la condition

$$p \geqslant 3q+2. \tag{30}$$

On pourra trouver un nombre premier π, supérieur à q, et inférieur à $\frac{p}{2}+1$. On le vérifie aisément par les tables de nombres premiers, si q est petit, et par les formules de M. Tchébychef, si q est grand. Cela posé, nous allons voir que la correspondance entre les lettres des divers systèmes peut être établie de telle sorte que celles des substitutions de I_{r-1} qui se réduisent à la forme $\mathfrak{M}$ permutent encore les systèmes d'une façon alternée.

Soient σ_0, σ_1, ...,... les systèmes ; I_{r-1} contient une substitution $\mathfrak{M}'\mathfrak{N}'$ qui permute circulairement $\sigma_0, \ldots, \sigma_{\pi-1}$, sans déplacer les autres systèmes. Son ordre sera évidemment multiple de π; et, en l'élevant à une puissance convenable, on obtiendra une substitution $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1$ d'ordre π, qui permute encore circulairement ces π systèmes.

La substitution $\mathfrak{N}_1$ sera le produit de deux autres, dont l'une $\mathfrak{P}$ déplace les lettres des systèmes $\sigma_0, \ldots \sigma_{\pi-1}$ et l'autre $\mathfrak{Q}_1$ celles des autres systèmes. Cette dernière substitution étant échangeable à $\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1$, son ordre divisera π, ordre de $\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1$; mais $\mathfrak{Q}_1$ permute exclusivement entre elles les lettres de chaque système, en nombre $q<\pi$. Donc son ordre est premier à π, et se réduit à l'unité. Donc $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1$ se réduit à $\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1$.

Cela posé, faisons correspondre à chaque lettre de σ_0 la lettre de σ_1 que $\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1$ lui fait succéder ; puis celle de σ_2 que $\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1$ fait succéder à cette dernière, etc. La substitution $\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1$, étant d'ordre π, fera succéder à chacune des lettres de $\sigma_{\pi-1}$ la lettre correspondante de σ_0. Donc elle se réduira à la forme $\mathfrak{M}_1$.

76. On verra de même que I_{r-1} contient une substitution $\mathfrak{M}_2$, d'ordre π et

permutant entre eux, et d'une manière circulaire, les systèmes $\sigma_0, \sigma_\pi, \ldots, \sigma_{2\pi-2}$.

Les substitutions $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, combinées entre elles, fourniront un groupe transitif de déplacements entre les systèmes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{2\pi-2}$. Ce groupe $\mathcal{G}$, de degré $2\pi - 1$ et dérivé de substitutions circulaires d'ordre π, sera alterné. Ses substitutions, remplaçant d'ailleurs chaque lettre par sa correspondante, seront de la forme $\mathfrak{M}$; et celle d'entre elles, S, qui permute circulairement les trois systèmes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ sans déplacer les autres, déplacera en tout $3q$ lettres.

77. Cela posé, on a $p_1 \geqslant p \geqslant 2\pi - 1$. Si l'on a $p_1 = 2\pi - 1$, notre proposition sera démontrée. Si au contraire $p_1 > 2\pi - 1$, on peut admettre que la différence de ces deux nombres est paire. Sans quoi, au lieu de raisonner sur le groupe $\mathcal{G}$ comme nous allons le faire, on raisonnerait sur le groupe $\mathcal{G}_1$ formé des substitutions de $\mathcal{G}$ qui laissent immobile le système $\sigma_{2\pi-2}$. Ce groupe contient S, et il est alterné comme $\mathcal{G}$; mais il ne déplace que $2\pi - 2$ systèmes, nombre dont la différence avec p_1 sera paire.

Soit donc $p_1 - 2\pi + 1 =$ un nombre pair; les systèmes non déplacés par $\mathcal{G}$ pourront se répartir en couples. Soient σ_μ, σ_ν les deux systèmes d'un même couple; le groupe I_{r-1}, permutant les systèmes d'une manière alternée, contient une substitution T qui permute σ_μ avec σ_1 et σ_ν avec σ_2 sans déplacer les autres systèmes; il contiendra $T^{-1}ST = S'$ laquelle permute les trois systèmes $\sigma_0, \sigma_\mu, \sigma_\nu$ et ne déplace aucune autre lettre. Faisons maintenant correspondre à chaque lettre de σ_0 celle des lettres de σ_μ que S' lui fait succéder, puis celles des lettres de σ_ν que S' fait succéder à ces dernières; S' étant d'ordre 3, comme S dont elle est transformée, remplacera chaque lettre de σ_ν par sa correspondante de σ_0.

Soit de même $\sigma_{\mu'}, \sigma_{\nu'}$ un autre couple de systèmes; on pourra faire correspondre leurs lettres à celles de σ_0, de telle sorte que I_{r-1} contienne une substitution S'' qui permute entre eux ces trois systèmes, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes, sans déplacer aucune autre lettre.

Cela posé, il est clair qu'en adjoignant à $\mathcal{G}$ les substitutions S', S'', ..., on obtiendra un groupe résultant J dont les substitutions seront de la forme $\mathfrak{M}$, et permuteront les systèmes d'une façon alternée.

78. Soient $u_0 v_0 \ldots$ les q lettres du système σ_0, $u_m v_m \ldots$ leurs correspondantes dans σ_m. En groupant ensemble celles de ces lettres que J permute entre elles, on les répartira en q classes, $u_0 u_1 \ldots, v_0 v_1 \ldots, \ldots$.

Soit S une de celles des substitutions de G qui déplacent le moins de lettres; N le nombre de ses lettres; on aura $N \leqslant 3q$, J étant dérivé de substitutions ternaires à q cycles.

Le groupe G étant primitif, le groupe K, dérivé de celles de ses substitutions qui sont semblables à S, sera transitif. Si donc G contient plus de qp_1

lettres, ce que nous supposerons pour plus de généralité, l'une au moins S des substitutions de K mêlera dans ses cycles les lettres de J à des lettres nouvelles x, y, ... Or celles des lettres de J que S déplace sont en nombre inférieur à N, et *a fortiori* à $3q$. Donc, parmi les systèmes σ_0, σ_1, ... en nombre $p_1 \geqslant 3q+2$, il en existe au moins deux, σ_0 et σ_1, dont S ne déplace aucune lettre. Soit au contraire σ_2 un quelconque des systèmes dont S déplace des lettres; et soit ν le nombre de lettres de σ_2 que contient S. Le groupe J contient une substitution T qui permute circulairement les trois systèmes σ_0, σ_1, σ_2; et G contiendra $S^{-1}T^{-1}ST$, qui laisse toutes les lettres immobiles, sauf les ν lettres de σ_2 que S déplace, celles que S leur fait succéder, et les lettres correspondantes de σ_0; en tout 3ν lettres, qui même peuvent n'être pas toutes distinctes; mais elle en déplace au moins N; donc on aura

$$\nu \geqslant \frac{N}{3}.$$

Par suite, *les lettres de* J *que* S *déplace ne peuvent appartenir à plus de trois systèmes différents*. Supposons, pour fixer les idées, qu'elles appartiennent toutes à l'un des trois systèmes σ_2, σ_3, σ_4.

79. Considérons le groupe (J, S) obtenu en adjoignant S aux substitutions de J; et groupons ensemble celles de ses lettres qu'il permute transitivement entre elles; on obtiendra ainsi une ou plusieurs catégories de lettres, dont chacune pourra contenir, avec les lettres d'une ou plusieurs des classes u_0u_1 ..., v_0v_1 ..., ..., une ou plusieurs lettres nouvelles. En particulier, si une catégorie était uniquement formée de lettres nouvelles, elles fourniraient un cycle dans S; et les déplacements que (J, S) leur fait subir se réduiraient évidemment aux puissances d'une seule substitution circulaire. D'ailleurs, S mêlant dans ses cycles les lettres anciennes aux nouvelles, l'une au moins des catégories contiendra à la fois ces deux sortes de lettres.

Enfin chaque substitution de (J, S), telle que S, est le produit de substitutions partielles S_1, S_2,... respectivement opérées entre les lettres de chaque catégorie. Soit (J_1, S_1) le groupe formé par les déplacements ainsi opérés entre les lettres de la première catégorie par les substitutions (J, S).

Admettons, pour fixer les idées, que la première catégorie contienne les lettres des b_1 premières classes u, v, ... et b_1' lettres nouvelles x, y, ... Ce groupe (J_1, S_1) peut être primitif ou non; mais, dans ce dernier cas, *le nombre des lettres de chaque système sera nécessairement un diviseur de* b_1.

En effet, s'il en était autrement, les b_1 lettres u_0v_0 ... de σ_0 que (J_1, S_1) déplace ne fourniraient pas à elles seules un nombre entier de systèmes; donc l'une d'elles, u_0, appartiendrait au même système qu'une autre lettre,

laquelle pourrait être une des lettres de la même classe que u, telle que u_1, ou une lettre d'une autre classe, telle que v_2, ou enfin une lettre nouvelle, telle que x.

Si u_0 était dans le même système que v_2 ou que x, il serait dans le même système que u_1; car J contient une substitution qui permute circulairement $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$. Cette substitution, laissant v_2 et x immobiles, ne déplacera pas le système qui les contient; donc u_1 qu'elle fait succéder à u_0 appartiendra à ce système.

Il faut donc admettre que u_0 est dans le même système que u_1; mais alors ce système contiendra les p_1 lettres u_0u_1.... En effet, soit u_ρ l'une d'elles. J contient une substitution qui permute circulairement $\sigma_0\sigma_1\sigma_\rho$. Cette substitution, remplaçant u_0 par u_1, ne déplacera pas le système qui les contient; donc u_ρ qu'elle fait succéder à u_1 appartiendra à ce système.

Donc chaque système contiendrait au moins p_1 lettres. Mais (J_1, S_1) étant primitif, l'une au moins des substitutions dont il est dérivé déplacerait les systèmes, et par suite déplacerait au moins $2p_1$ lettres; résultat absurde, car (J_1, S_1) est dérivé de substitutions ternaires à q cycles, et de la substitution partielle S_1 formée par ceux des cycles de S qui déplacent les lettres de la première catégorie, lesquels cycles contiennent un nombre de lettres $\leqslant N \leqslant 39$.

Parmi les diverses répartitions possibles des lettres de (J_1, S_1) en systèmes, choisissons l'une de celles où le nombre β_1 des lettres de chaque système est maximum. Les déplacements des systèmes par les substitutions de (J_1, S_1) formeront un groupe primitif $\mathfrak{B}_1$ de degré $\frac{b_1p_1+b_1'}{\beta_1}$.

Cela posé, la substitution S ne déplaçant par hypothèse que des lettres appartenant aux trois systèmes σ_2, σ_3, σ_4, et les autres substitutions dont J est dérivé remplaçant les lettres de chacun des systèmes σ_0, σ_1, ... par les lettres correspondantes d'un même système, il faudra évidemment, pour que (J, S) permute transitivement entre elles les lettres de la première catégorie, que le groupe dérivé de la substitution S et de celle U des substitutions de J qui permute circulairement les trois systèmes σ_2, σ_3, σ_4 soit transitif par rapport aux $3b_1+b_1'$ lettres de première catégorie qu'il déplace.

Le groupe (U_1, S_1) formé par les déplacements que (U, S) fait éprouver à ces lettres sera donc transitif, et contenu dans (J_1, S_1). D'ailleurs ces lettres formeront $\frac{3b_1+b_1'}{\beta_1}$ systèmes; et les déplacements d'ensemble opérés sur ces systèmes par les substitutions de (J_1, S_1) formeront un groupe transitif, de degré $\frac{3b_1+b_1'}{\beta_1}$ et contenu dans $\mathfrak{B}_1$.

Le groupe $\mathfrak{B}_1$ sera donc alterné (*Théorèmes sur les groupes primitifs,*

n° 11), si son degré $\frac{b_1 p_1 + b'_1}{\beta_1}$ surpasse $3\left(\frac{3b_1 + b'_1}{\beta_1}\right) - 2$, ce qui aura lieu si p_1, et *a fortiori* si p, est supérieur à la limite

$$9 + \frac{2b'_1}{b_1} - \frac{2\beta_1}{b_1}.$$

Or le nombre total N des lettres déplacées par S est $\leqslant 3q$, parmi lesquelles $\frac{N}{3}$ au moins sont des lettres anciennes; donc $b'_1 \leqslant 2q$, ce qui réduit la limite de p à

$$9 + \frac{4q}{b_1} - \frac{2\beta_1}{b_1}.$$

Mais nous avons déjà supposé $p \geqslant 3q + 2$; et cette ancienne limite sera supérieure à celle que nous trouvons ici, à moins qu'on n'ait

$$b_1 = 1,$$

ou

$$b_1 = 2 \text{ et } q < 6,$$

ou

$$b_1 = 3 \text{ et } q < 4.$$

Mais si $b_1 = 1$, d'où $\beta_1 = 1$, le groupe J_1 sera alterné, et le groupe $\mathfrak{B}_1$, qui se confond ici avec (J_1, S_1), étant primitif et contenant J_1, sera alterné.

Dans les autres cas d'exception, on aura pour maximum de la limite

$$p > 18, \tag{51}$$

inégalité que nous supposerons satisfaite. Dès lors il sera établi que $\mathfrak{B}_1$ est alterné.

80. Soit de même $c_1 p + c'_1$ le nombre des lettres de la seconde catégorie. Elles pourront se répartir en $\frac{c_1 p_1 + c'_1}{\gamma_1}$ systèmes, γ_1 étant un diviseur de c_1; et les déplacements de ces systèmes par les substitutions de (J, S) formeront un groupe alterné C_1. De même pour chacune des autres catégories qui renferment des lettres anciennes.

81. Supposons, pour fixer les idées, que toutes les catégories, sauf les deux premières ci-dessus, soient exclusivement formées de lettres nouvelles. Les déplacements de ces lettres nouvelles par les substitutions de (J, S) se réduiront aux déplacements opérés par S et ses puissances; et le groupe L, formé par celles des substitutions de (J, S) qui ne déplacent que les lettres des deux premières catégories, sera contenu dans (J, S) et permutable à ces substitutions. Il aura d'ailleurs évidemment conservé tous ceux des groupes

composants de (J, S) qui ne sont pas des puissances d'une même substitution; et notamment ceux qui sont afférents aux groupes $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$.

82. Cela posé, on verra comme plus haut (68 à 73) que G contiendrait une substitution d'ordre p à moins de q cycles (ce qui est absurde), à moins qu'on ne suppose $\frac{b_1p_1+b'_1}{\beta_1}=\frac{c_1p_1+c'_1}{\gamma_1}$, $\beta_1=b_1$, $\gamma_1=c_1$, et qu'on n'admette en outre que les groupes $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ se correspondent de telle sorte qu'à chaque substitution de $\mathfrak{B}_1$ en corresponde une seule de $\mathfrak{C}_1$, et réciproquement. Mais, si ces conditions sont satisfaites, on pourra poser, pour abréger, $\frac{b_1p_1+b'_1}{\beta_1}=p_2$; et l'on verra : 1° que les p_2q lettres déplacées par L y forment p_2 systèmes tels, que les substitutions de L remplacent les lettres de chaque système par celles d'un même système ; 2° que G contient un groupe J_1 de degré p_2q, dont les lettres se grouperont q à q en p_2 systèmes, que J_1 permute d'une manière alternée, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes.

On aura d'ailleurs $p_2>p_1$; car S mêlant dans ses cycles des lettres nouvelles avec les lettres anciennes que J déplaçait, on ne pourra pas avoir à la fois $b'_1=0$, $c'_1=0$.

83. Si le nombre des lettres de G était supérieur à p_2q, on verrait de même que G contient un groupe J_2 analogue à J_1, mais de degré p_3q, p_3 étant $>p_2$.

Continuant ainsi, on voit que le nombre des lettres de G sera un multiple de q, tel que p_mq, et que G contient un groupe J_{m-1} dans lequel ces lettres forment p_m systèmes, $u_0, v_0, \ldots$; $u_1, v_1, \ldots$; ... que J_{m-1} permute d'une manière alternée, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes.

Il n'existe d'ailleurs aucune autre manière de répartir les lettres de J_{m-1} en systèmes de q lettres. En effet, supposons qu'un de ces nouveaux systèmes s contînt les deux lettres u_0 et u_1 par exemple; et soit u_ρ une quelconque des p_m-2 lettres $u_2, u_3, \ldots$; J_{m-1} contient une substitution qui permute circulairement u_0, u_1, u_ρ. Cette substitution ne déplace pas le système s; donc u_ρ appartient à ce système, qui contiendra dès lors au moins p_m lettres, nombre $>q$, contrairement à l'hypothèse.

En second lieu, si s contenait u_0 et v_1, J_{m-1} contient des substitutions qui laissent u_0 immobile et permutent ensemble $v_1, v_2, \ldots$. Ces lettres appartiendraient à s, qui contiendrait encore au moins p_m lettres.

84. Soit maintenant Σ une quelconque des substitutions de G qui ne déplacent que N lettres. On peut supposer que son ordre k est un nombre premier; car, au besoin, on considérerait à sa place une quelconque de ses puissances. Adjoignons-la au groupe J_{m-1}. Raisonnant sur Σ et sur J_{m-1} comme tout à l'heure sur S et sur J, on voit que G contiendra une substitu-

tion d'ordre p à moins de q cycles (résultat absurde), à moins que les lettres de (J_{m-1}, Σ) ne puissent se répartir en systèmes de q lettres. Mais il n'y a qu'une manière de grouper les lettres de J_{m-1} en systèmes de q lettres. Donc Σ remplacera les lettres de chaque système par celles d'un même système. Les substitutions semblables à Σ forment un groupe K qui ne sera pas primitif, d'après ce qui précède; il est permutable à G, et par suite transitif. Donc l'une au moins de ses substitutions, Σ par exemple, déplacera les systèmes.

Soit d'ailleurs σ l'un des systèmes qu'elle déplace; C l'un des cycles de Σ, qui contienne une des lettres de Σ. Les k lettres de ce cycle appartiendront à k systèmes distincts; car si deux d'entre elles appartenaient à un même système σ_1, et se suivaient à ρ rangs de distance dans C, il est clair que Σ^ρ et par suite Σ, qui en est une puissance, ne déplacerait pas ce système. Donc les lettres de C appartiendraient toutes à σ_1, contrairement à l'hypothèse.

Donc Σ déplace au moins k systèmes; elle déplacera toutes leurs lettres, en nombre kq; d'où $N \geqslant kq$. Mais J_{m-1} contient des substitutions d'ordre 3 à q cycles; donc $N \leqslant 3q$ et par suite $k \leqslant 3$.

La substitution Σ ne déplaçant ainsi que deux ou trois systèmes, ses transformées par les diverses substitutions de J_{m-1}, qui permute les systèmes d'une manière alternée, formeront évidemment un groupe $\mathfrak{H}$ qui permute les systèmes d'une manière alternée si $k = 3$, de toutes les manières possibles si $k = 2$. On en conclut comme précédemment (75 à 77 et 83) : 1° que l'on pourrait établir entre les lettres des divers systèmes une correspondance telle, que $\mathfrak{H}$ contînt un groupe $\mathfrak{H}_1$ permutant les systèmes d'une manière alternée, en remplaçant les unes par les autres les lettres correspondantes; 2° qu'il n'existe qu'une manière de répartir les lettres q à q en systèmes dans le groupe $\mathfrak{H}_1$, et *a fortiori* dans le groupe K, qui contient $\mathfrak{H}_1$.

Cela posé, soit T une substitution quelconque de G; elle remplace les divers systèmes de q lettres que renferme K par de nouveaux systèmes tels, que les substitutions du groupe transformé de K par T, lequel groupe n'est autre que K, remplacent les lettres de chaque système par celles d'un même système. Comme il n'y a qu'une répartition possible des lettres de K en systèmes de q lettres, les nouveaux systèmes se confondront avec les anciens. Donc T remplacera les lettres de chaque système par celles d'un même système. Donc G ne pourra être primitif, comme on l'a supposé. Nous nous trouvons ainsi conduits à une absurdité.

85. *Second cas.* — *L'un des groupes* $\mathcal{C}, \ldots$, *par exemple* $\mathcal{C}$, *n'est pas alterné.*

Ici encore nous allons démontrer qu'on arrive à une impossibilité si p satisfait aux inégalités (30) et (31) et à la suivante

$$p > \varphi(s) \quad (s = 1, 2, \ldots, q-1). \tag{32}$$

86. Et d'abord, si $\mathfrak{C}$ était simple, il serait isomorphe à $\mathfrak{B}$; mais c'est impossible. En effet, si cela était, on sait (*Traité des substitutions*, 69 à 73) qu'il existerait une fonction Φ des p_1 systèmes permutés par $\mathfrak{B}$ dont les déplacements par les substitutions de $\mathfrak{B}$ formeraient un groupe semblable à $\mathfrak{C}$. Le nombre des valeurs distinctes que prend cette fonction par les substitutions de $\mathfrak{B}$ serait donc égal à $\frac{cp+c'}{\gamma}$, degré de $\mathfrak{C}$; et suivant qu'elle serait altérée ou non par une transposition effectuée entre deux systèmes, elle prendrait $2\frac{cp+c'}{\gamma}$ ou $\frac{cp+c'}{\gamma}$ valeurs distinctes par toutes les substitutions possibles opérées sur les p_1 systèmes. Or, d'après un théorème de M. Bertrand, une fonction quelconque des p_1 systèmes prendra p_1 valeurs si elle est symétrique par rapport à $p_1 - 1$ systèmes; $2p_1$ si elle est alternée par rapport à $p_1 - 1$ systèmes; au moins $\frac{p_1(p_1-1)}{2}$ valeurs dans tous les autres cas. D'ailleurs on a $\frac{c'}{\gamma} \leqslant \varphi\left(\frac{c}{\gamma}\right) < p$ et, par suite,

$$\frac{p_1(p_1-1)}{2} \geqslant \frac{p(p-1)}{2} \geqslant pq \geqslant (c+1)p > \frac{cp+c'}{\gamma}.$$

Il faut donc admettre que Φ est symétrique ou alternée par rapport à $p_1 - 1$ systèmes; mais alors elle prendra p_1 valeurs distinctes par les déplacements des systèmes; et si l'on fait correspondre à chacune de ces p_1 fonctions $\Phi, \Phi', \ldots$ celui des systèmes qui y figure d'une manière dissymétrique, il est clair que les diverses fonctions $\Phi, \Phi', \ldots$ seront permutées les unes dans les autres par les substitutions de $\mathfrak{B}$ de la même manière que les systèmes correspondants ; le groupe formé par les déplacements de ces fonctions sera donc alterné comme $\mathfrak{B}$, et le groupe $\mathfrak{C}$, qui lui est semblable, le sera aussi, contrairement à l'hypothèse.

87. Supposons donc que $\mathfrak{C}$ soit composé. Nous remarquerons d'abord que *son ordre est divisible par* p (puisqu'il dérive de substitutions d'ordre p), *mais non divisible par* p^2. En effet, les systèmes qu'il permute sont en nombre $\frac{c}{\gamma}p + \frac{c'}{\gamma}$; et l'on voit comme précédemment (47) que l'ordre Ω du groupe $\mathfrak{C}$ contient le facteur p à la même puissance que l'ordre O du groupe formé par celles de ses substitutions qui ne déplacent que les $\frac{c}{\gamma}p$ systèmes que A déplace ; de plus, si O était divisible par p^2, $\mathfrak{C}$ contiendrait une substitution d'ordre p à moins de $\frac{c}{\gamma}$ cycles. Soit $\frac{c}{\gamma} - k$ le nombre de ces cycles. $\mathfrak{C}$ étant primitif et ne contenant pas le groupe alterné, on aurait par hypothèse la relation

$$\varphi\left(\frac{c}{\gamma}-k\right) \geqslant kp+\frac{c'}{\gamma},$$

ce qui est absurde, en vertu de l'inégalité (32).

88. En second lieu, soit $\mathcal{C}'$ le groupe le plus général parmi ceux qui sont contenus dans $\mathcal{C}$ et permutables à ses substitutions; *le nombre p divisera l'ordre de $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$, premier groupe composant de $\mathcal{C}$.* Supposons en effet que p divisât au contraire l'ordre de $\mathcal{C}'$. Ce groupe contiendrait un groupe d'ordre p. Étant permutable aux substitutions de $\mathcal{C}$, il contiendrait tous les groupes transformés de celui-là par les substitutions de $\mathcal{C}$. Mais, d'une part, tous les groupes d'ordre p contenus dans $\mathcal{C}$ sont les transformés de l'un quelconque d'entre eux par les substitutions de $\mathcal{C}$ (théorème de M. Sylow); d'autre part, $\mathcal{C}$ est dérivé de substitutions d'ordre p (respectivement correspondantes à $C_1, C_2, \ldots$); donc $\mathcal{C}'$, contenant toutes ces substitutions, se confondrait avec $\mathcal{C}$.

Si donc $\mathcal{C}$ a, comme on le suppose, un groupe composant isomorphe à $\mathfrak{B}$, dont l'ordre $\omega = 3.4 \ldots p_1$ est divisible par p, ce groupe composant ne pourra être que le premier $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$.

89. Cela posé, soient $M_1, \ldots, M_\pi$ les substitutions de $\mathcal{C}'$. On pourra déterminer dans $\mathcal{C}$ des substitutions $N_1, \ldots, N_\omega$ en nombre ω, incongrues (mod $\mathcal{C}'$); et les substitutions de $\mathcal{C}$ seront données par le tableau

$$\begin{array}{c} M_1 N_1, \ \ldots, \ M_1 N_\pi \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ M_\omega N_1, \ \ldots, \ M_\omega N_\pi. \end{array}$$

Posons pour abréger $\frac{cp+c'}{\gamma} = \lambda_1$, $\frac{c'}{\gamma} = \varepsilon$, et admettons, pour plus de généralité, que l'on ait $\varepsilon > 0$. Le groupe $\mathcal{C}_1$ formé par celles des substitutions de $\mathcal{C}$ qui laissent immobile un des ε systèmes qui figurent dans $\mathcal{C}$, mais que A ne déplaçait pas, a pour ordre celui de $\mathcal{C}$, divisé par λ. Celles des lignes du tableau précédent dont quelque substitution est contenue dans $\mathcal{C}_1$ forment donc au moins la $\lambda^{\text{ième}}$ partie du nombre total; donc l'ordre ω_1 du groupe $\frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}'}$ formé par les substitutions correspondantes du groupe $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$ sera au moins égal à $\frac{\omega}{\lambda}$. Le groupe $\mathfrak{B}$, étant isomorphe à $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}$, devra de même contenir un groupe $\mathfrak{B}_1$, isomorphe à $\frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}'}$, et d'ordre ω_1. Mais, d'après le théorème de M. Bertrand, si $\omega_1 < \omega$, il sera égal à $\frac{\omega}{p_1}$, ou au moins égal à $\frac{2}{p_1(p_1-1)}\omega$.

Cette dernière hypothèse est absurde, $\frac{cp+c'}{\gamma}$ étant $< \frac{p_1(p_1-1)}{2}$. D'ailleurs, en vertu du même théorème, si $\omega_1 = \frac{\omega}{p_1}$, $\mathfrak{B}_1$ sera le groupe d'une fonction alternée par rapport à $p_1 - 1$ systèmes, et sera un groupe simple, d'ordre $3.4\ldots(p_1-1)$. Enfin, si $\omega_1 = \omega$, $\mathfrak{B}_1$ se confond avec $\mathfrak{B}$, et par suite sera simple, et d'ordre $3.4\ldots p_1$. Donc le groupe $\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}'}$ sera simple, et isomorphe au groupe alterné de degré $p_1 - \theta_1$, θ_1 étant égal à 0 ou à 1.

90. D'ailleurs $p_1 - \theta_1 > p$. En effet, s'il en était autrement, $\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}'}$ n'aurait pas son ordre divisible par p; les autres groupes composants de $\mathfrak{C}_1$, étant contenus dans $\mathfrak{C}'$, leur ordre ne sera pas non plus divisible par p. Donc l'ordre de $\mathfrak{C}_1$ serait premier à p; résultat absurde, car il contient une substitution d'ordre p, correspondant à la substitution A.

91. Soient $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ... les groupes respectivement formés par celles des substitutions de $\mathfrak{C}$ qui laissent immobiles deux, trois, etc., des ε systèmes que A ne déplaçait pas; on voit de la même manière que $\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}'}$, $\frac{\mathfrak{C}_3}{\mathfrak{C}'}$, ... sont isomorphes aux groupes alternés de degrés $p_1 - \theta_2$, $p_1 - \theta_3$, ..., $\theta_{\rho+1}$ étant égal à θ_ρ ou à $\theta_\rho + 1$, et par suite contenu entre 0 et ρ; $p_1 - \theta_\rho$ étant d'ailleurs au moins égal à p. Donc enfin $\frac{\mathfrak{C}_\varepsilon}{\mathfrak{C}'}$ *sera isomorphe à un groupe alterné de degré* $p_1 - \theta_\varepsilon$, θ_ε *étant compris entre* 0 *et* ε, *et* $p_1 - \theta_\varepsilon$ *au moins égal à* p.

92. Donc l'un des groupes composants de $\mathfrak{C}_\varepsilon$ est isomorphe à un groupe alterné de degré $p' > p$. Le groupe X, dérivé de celles des substitutions de $\mathfrak{C}_\varepsilon$ qui sont d'ordre p, jouira de la même propriété. En effet, il est évidemment permutable aux substitutions de $\mathfrak{C}_\varepsilon$; donc il possédera comme groupes composants une partie de ceux de $\mathfrak{C}_\varepsilon$, et notamment celui dont l'ordre est divisible par p, puisque l'ordre de X est divisible par p.

93. Le groupe X déplace $\frac{cp}{\gamma}$ systèmes, et dérive de substitutions qui les permutent p à p. Si donc X ne les permute pas transitivement, on pourra, en groupant ensemble ceux que X permute entre eux, les répartir en classes, contenant respectivement $k_1 p$, $k_2 p$, ... systèmes, avec la condition $k_1 + k_2 + \ldots = \frac{c}{\gamma}$. Soient X_1, X_2, ... les groupes partiels formés par les déplacements que les substitutions de X font éprouver aux systèmes des diverses classes. Ils seront respectivement dérivés de substitutions d'ordre p, à k_1 cycles, à k_2 cycles, etc.

94. Considérons l'un de ces groupes X_1. Il est transitif et de degré $k_1 p$; donc son ordre est divisible par p; donc un au moins de ses facteurs de composition est divisible par p. Mais les facteurs de composition de X_1 sont tous des facteurs de composition de X, lequel a un facteur de composition divisible par $3.4...p$, les autres étant tous premiers à p (car l'ordre de X, divisant celui de $\mathcal{C}$, ne sera pas divisible par p^2). Donc X_1 n'a qu'un groupe composant dont l'ordre soit divisible par p, et cet ordre sera $3.4... p'$. D'ailleurs X_1, étant dérivé de substitutions d'ordre p, ce groupe composant sera nécessairement le premier (88).

95. Parmi les diverses répartitions possibles des systèmes que X_1 déplace en hypersystèmes (tels que chaque substitution de X_1 remplace les systèmes de chaque hypersystème par celles d'un même hypersystème), choisissons celle où le nombre μ des systèmes contenus dans chaque hypersystème est maximum (si X_1 était primitif, on aurait $\mu = 1$). On aura $\mu \leqslant k_1$. En effet, X_1 est dérivé de substitutions d'ordre p à k_1 cycles. Si donc une de ses substitutions S déplace l'un des systèmes, s, elle déplacera ses μ lettres. Si μ était $> k_1$, deux au moins de ces lettres se trouveraient dans un même cycle de S; et par suite S ne déplacerait pas ce système, ainsi qu'on l'a supposé. D'ailleurs μ divise $k_1 p$, nombre total des systèmes; et comme il est $\leqslant k_1$, il sera $< p$, et divisera k_1.

Mais on aura $\mu = k_1$. En effet, soit Y_1 le groupe primitif de degré $\frac{k_1 p}{\mu}$ formé par les déplacements que X_1 fait éprouver aux hypersystèmes; X_1 aura pour premier facteur de composition le premier facteur de composition de Y_1, lequel sera, par suite, $3.4... p'$. Soit maintenant Z_1 le groupe dérivé de Y_1 par la suppression de ce facteur de composition. L'ordre de Z_1 n'étant plus divisible par p, ce groupe ne sera plus transitif; donc il se réduira à la seule substitution 1, sans quoi Y_1 ne serait pas primitif comme il doit l'être. Donc Y_1 est simple, et à pour ordre $3.4... p'$. Mais son degré $\frac{k_1 p}{\mu} < \frac{p'(p'-1)}{2}$. Donc, d'après le théorème de M. Bertrand, il se réduira à p'; d'ailleurs $3.4 .. p'$ n'étant pas divisible par p^2 (87), p' sera $< 2p$; on aura donc $p' = p$ et $\mu = k_1$. De plus, Y_1 sera alterné.

Donc *les systèmes de* X_1 *se groupent* k_1 *à* k_1 *en* p *hypersystèmes, que* Y_1 *permute d'une manière alternée.*

96. On verra de même que les systèmes de X_2 se groupent k_2 à k_2 en p hypersystèmes, et que les déplacements que X_2 fait subir à ces hypersystèmes forment un groupe alterné Y_2, etc.

Cela posé, à chaque substitution de X correspond une substitution dans chacun des groupes Y_1, Y_2,...; et cette correspondance doit être telle, qu'à chaque substitution de l'un des groupes Y_1, Y_2,... corresponde une seule substitution dans chacun des autres groupes. Car si à deux substitutions S et

T du groupe X correspondaient deux substitutions distinctes S_2 et T_2 dans Y_2 et une seule S_1 dans Y_1, à la substitution $S^{-1}T$ correspondrait l'unité dans Y_1 et une autre substitution $S_2^{-1}T_2$ dans Y_2. Ses transformées par les substitutions de X donneraient des substitutions auxquelles correspondraient dans Y_1 l'unité, et dans Y_2 les transformées de $S_2^{-1}T_2$ par les substitutions de Y_2, lesquelles reproduisent tout le groupe Y_2, ce groupe étant simple. Cela posé, l'ordre de X serait évidemment égal à $3.4\ldots p$, ordre de Y_1, multiplié par $3.4\ldots p$, ordre de Y_2, multiplié par l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de X auxquelles correspond l'unité dans Y_1 et dans Y_2. Donc X aurait son ordre divisible par p^2, ce qui est impossible.

97. Cela posé, on verra comme précédemment (74 à 84) : 1° que chacun des hypersystèmes de X_1 peut être associé à l'un des hypersystèmes de X_2, etc., de manière à former des hypersystèmes de $\frac{c}{\gamma}$ systèmes, que X permute d'une manière alternée ; 2° que l'on peut faire correspondre les uns aux autres les systèmes de ces hypersystèmes, de telle sorte que X contienne un groupe J qui permute les hypersystèmes d'une manière alternée en remplaçant les uns par les autres les systèmes correspondants ; 3° que la supposition d'après laquelle C, qui contient J, serait primitif sans contenir le groupe alterné, est absurde.

VI

98. Il nous reste à examiner le cas où le groupe I, dérivé de celles des substitutions semblables à A qui ne déplacent que les pq lettres de A, est transitif. Ce cas n'offre aucune difficulté.

Si I est primitif, et si l'on désigne par $pq + \varphi(q)$ le nombre des lettres de G, G sera $\varphi(q) + 1$ fois transitif ; ce qui ne sera possible que si l'on a

$$\varphi(q) \leqslant q, \tag{33}$$

ou

$$\varphi(q) < 5 \tag{34}$$

(*Sur la limite de transitivité des groupes non alternés*, même tome, p. 50).

Quant à $\psi(q)$, il sera égal à zéro.

99. Supposons au contraire I non primitif. Répartissons les lettres en systèmes contenant le plus grand nombre possible de lettres ; on aura $\mu \leqslant q$. Car si l'on avait $\mu > q$, une au moins S des substitutions semblables à A dont I est dérivé déplacerait un système s. Elle déplacerait toutes ses lettres, en nombre $> q$; donc elle contiendrait plusieurs de ces lettres dans un même cycle, et par suite ne pourrait pas déplacer s comme on le suppose.

Cela posé, G contenant un groupe I de degré pq et transitif, où les lettres se répartissent μ à μ en systèmes, contiendra un groupe deux fois transitif de degré d au plus égal à $pq+2\nu-1$, ν étant un diviseur de μ (*Théorèmes sur les groupes primitifs; Journal de Liouville*, 2e série, t. XVI, nos 2 à 8). On aura par suite

$$\Delta = d - pq \leqslant q - 1.$$

D'ailleurs Δ sera au moins égal à 1, I n'étant pas primitif.

Raisonnant maintenant comme plus haut (nos 47 à 55), on trouvera la relation

$$1.2\ldots q \equiv 0 \mod (e+\Delta)(e+\Delta-1)\ldots\Delta,$$

d'où l'on déduira, dans le cas le plus défavorable, où $\Delta = 1$,

$$e \leqslant q.$$

On aura par suite, pour la limite $\varphi(q)$ de la somme $e+\Delta$,

(35) $$\varphi(q) \leqslant 2q - 1.$$

On aura d'ailleurs

(36) $$\psi(q) \leqslant q - 1$$

VII

100. En récapitulant les résultats précédents, on voit que $\varphi(q)$ aura pour limite supérieure la plus grande des quantités suivantes :

(37) $$\Delta = \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + 3\mu - 1 \quad (\mu \text{ diviseur de } q \text{ et } > 1),$$

(38) $\Delta + q - 3$, (39) $q + \mathfrak{M}$, (40) $q + \mathfrak{N}$,

$\mathfrak{M}$ étant le maximum de l'expression

$$\varphi(s) + \varphi(t) + \ldots \quad \left(s + t + \ldots = q,\ \frac{q}{2} \geqslant s \geqslant t \geqslant \ldots\right),$$

et $\mathfrak{N}$ le maximum de l'expression

$$\psi(b) + \varphi(s) + \ldots \quad \left(s + t + \ldots = q - b,\ b \geqslant \frac{q}{2}\right);$$

(41) 4, (42) $2q - 1$;

et que $\psi(q)$ aura pour limite supérieure la plus grande des quantités

$$\Delta - 1,\ 1 + \mathfrak{M},\ 1 + \mathfrak{N},\ q - 1,$$

pourvu que p soit supérieur à la plus grande $f(q)$ des quantités suivantes :

$$\Delta,\ 1 + \mathfrak{M},\ 1 + \mathfrak{N},\ 3q + 2,\ 18,\ \varphi(s)\ (s = 1, 2, \ldots, q - 1).$$

101. Or il est aisé de voir que, quelles que soient celles des inégalités précédentes dont on se serve pour déterminer $\varphi(q)$ et $\psi(q)$, on aura

$$\psi(q) \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + q, \quad \varphi(q) \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + 2q.$$

En effet, ces inégalités sont satisfaites pour $q = 1$; et nous allons montrer qu'elles le seront, pour une valeur quelconque de q, si elles le sont pour les valeurs inférieures.

En effet, on aura

$$(43) \qquad \Delta - 1 = \mu\psi\left(\frac{q}{\mu}\right) + 3\mu - 2 \leqslant \mu \frac{2}{\log 2} \frac{q}{\mu} \log \frac{q}{\mu} + \mu \frac{q}{\mu} + 3\mu - 2$$
$$\leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + q - \frac{2q}{\log 2} \log \mu + 3\mu - 2 \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + q,$$

car les trois termes négligés auront évidemment une somme négative, sauf dans le cas le plus défavorable où l'on aura $\mu = q = 2$, auquel cas la somme s'annulera.

On aura, d'autre part,

$$1 + \mathfrak{M} = 1 + \varphi(s) + \varphi(t) + \ldots \leqslant 1 + \frac{2}{\log 2}(s \log s + t \log t + \ldots) + 2(s + t + \ldots),$$

et comme on a d'une part $s + t + \ldots = q$, et d'autre part $\log s \leqslant \log q - \log 2$, $\log t \leqslant \log q - \log 2$, etc.,

$$(44) \qquad 1 + \mathfrak{M} \leqslant 1 + \frac{2}{\log 2} q \log q - \frac{2}{\log 2} q \log 2 + 2q < \frac{2}{\log 2} q \log q + q.$$

En troisième lieu, on a

$$(45) \quad 1 + \mathfrak{N} = 1 + \psi(b) + \varphi(s) + \ldots \leqslant 1 + \frac{2}{\log 2} b \log b + b + \frac{2}{\log 2} s \log s + 2s + \ldots$$
$$\leqslant 1 + \frac{2}{\log 2} b \log q + b + \frac{2}{\log 2} s(\log q - \log 2) + 2s + \ldots$$
$$\leqslant 1 + b + \frac{2}{\log 2}(b + s + \ldots) \log q \leqslant q + \frac{2}{\log 2} q \log q.$$

Enfin il est clair que $q - 1$ est inférieur à cette même limite. On aura donc nécessairement

$$\psi(q) \leqslant \frac{2}{\log 2} q \log q + q.$$

D'ailleurs les limites que les relations (37), (38), (39), (40), (41), (42) donnent pour $\varphi(q)$ seront évidemment inférieures à

$$\frac{2}{\log 2} q \log q + 2q.$$

Enfin $f(q)$, limite inférieure de p, sera évidemment égale à la plus grande des quantités

$$\frac{2}{\log 2} q \log q + q + 1, \quad 3q + 2, \quad 18 \text{ (*)}.$$

On voit d'ailleurs, d'après la manière dont les limites ci-dessus ont été trouvées, qu'elles sont trop élevées. En serrant la question de plus près, on en trouvera de plus rapprochées, pour chaque valeur de q.

Nous allons en donner un exemple.

VIII

102. Proposons-nous d'étudier les groupes primitifs qui contiennent une substitution circulaire d'ordre p à 2 cycles. On aura par suite $q = 2$.

103. Les groupes I, I_1, ... étant définis comme ci-dessus, soit I_r le premier groupe transitif de cette suite.

On peut admettre que G ne contient aucune groupe transitif dérivé de substitutions semblables à A, et déplaçant moins de lettres que $I_{r_{\alpha+1}}$. Supposons en effet que l'on eût un pareil groupe J. Le groupe K dérivé de toutes les substitutions semblables à A qui ne déplaçent que les lettres de J sera *a fortiori* transitif. Soient B′ celle des substitutions d'ordre p dont il est dérivé qui déplace le moins de lettres parmi celles que A ne déplaçait pas ; C′ celle qui déplace le moins de lettres parmi celles que A et B′ ne déplaçaient pas; etc. ; soient de plus E′ celle des substitutions d'ordre μ contenues dans G qui déplace le nombre minimum de lettres nouvelles, autres que celles de J ; etc. Il est clair que la suite A, B′, C′, ..., E′, ... jouira des propriétés imposées au n° 1 à la suite A, B, C, ...; mais elle permettra d'arriver à la transitivité après adjonction d'un moindre nombre de lettres nouvelles à celles que A déplaçait.

Or, il est clair qu'on peut admettre que, parmi les diverses manières de déterminer la suite A, B, C, ..., on ait choisi dès l'abord celle qui permettait

= 409.3 if q = 36 .

(*) On peut admettre toujours la limite $\frac{2}{\log 2} q \log q + q + 1$. En effet, si $q > 5$, cette quantité sera supérieure aux deux autres; et si $q < 5$, il résulte de nos recherches que la vraie limite de p est égale à q (Voir la section suivante).

d'arriver le plus tôt à la transitivité. Si l'on s'est imposé cette condition, l'existence de la nouvelle suite A, B', C', ..., E', ... sera impossible.

104. 1° Si I_r n'est pas primitif, ses lettres se grouperont en systèmes μ à μ; et μ, étant > 1 et divisant q, sera égal à 2. Le groupe I_{r-1} n'étant pas transitif, par hypothèse, ses lettres formeront deux classes. Ceux des systèmes de deux lettres que I_{r-1} déplace auront une de leurs lettres dans chaque classe. Considérons en effet l'une de ces classes, et soit $p+\alpha$ le nombre de lettres qu'elle contient. Le groupe partiel formé par les déplacements que I_{r-1} fait subir aux lettres de cette classe, étant dérivé de substitutions circulaires d'ordre p, sera $\alpha+1$ fois transitif. Si donc deux de ces lettres a et b appartenaient à un même système, I_{r-1} contiendrait une substitution S d'ordre p permutant ces deux lettres; et le système qui les contient n'étant pas déplacé par S, les p lettres contenues dans le même cycle de S appartiendraient à ce système, qui contiendrait ainsi plus de deux lettres, contrairement à notre supposition.

Donc les deux classes contiendront le même nombre de lettres; et les substitutions de I_{r-1}, remplaçant les deux lettres de chaque système par celles d'un même système, permuteront de la même manière les lettres correspondantes des deux classes.

105. Si $\alpha=0$, et si l'on désigne par $2p+k$ le nombre des lettres de G, soient comme précédemment Γ le groupe formé par les puissances de A; $\mathcal{H}$ le groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à Γ et qui permutent exclusivement entre elles les k lettres nouvelles; ses substitutions seront de la forme $X_1Y_1, X_2Y_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ étant des substitutions entre ces k lettres, et $Y_1, Y_2, \ldots$ des substitutions entre les $2p$ lettres de A; ces dernières, étant permutables à Γ, remplaceront les lettres de chaque cycle par celles d'un même cycle. On verra d'ailleurs comme précédemment que la groupe $X_1, X_2, \ldots$ contiendra toutes les substitutions possibles entre les k lettres nouvelles.

Soient $\mathcal{H}'$ le groupe formé par celles des substitutions de $\mathcal{H}$ qui ne déplacent pas les cycles de A; $X'Y', X''Y'', \ldots$ ses substitutions. Il est clair que leurs premiers facteurs $X', X'', \ldots$ formeront un groupe contenu dans $(X_1, X_2, \ldots)$ et renfermant au moins la moitié de ses substitutions. Donc le groupe $(X', X'', \ldots)$ contiendra le groupe alterné. On aura d'ailleurs $Y'=V^{\rho'}W', Y''=V^{\rho''}W'', \ldots, V, W', W'', \ldots$ étant des substitutions de même forme qu'à l'endroit cité.

Cela posé, si $k>3$, le groupe alterné $(X', X'', \ldots)$ contiendra au moins deux substitutions non échangeables entre elles. En combinant entre elles les substitutions correspondantes de $\mathcal{H}'$, on obtiendra une substitution qui se réduit à la forme XW.

Soient $x'w', x''w'', \ldots$ les substitutions de cette forme que contient $\mathcal{H}$; le groupe $(x', x'', \ldots)$ sera évidemment permutable à $(X_1, X_2, \ldots)$; donc il con-

tiendra des substitutions binaires à 2 cycles (il en contient si $k=4$; et si $k>4$, il contient le groupe alterné).

Supposons donc que x' soit une substitution binaire à 2 cycles; w' étant d'ordre p, G contiendra $(x'w')^p$, substitution binaire à 2 cycles. Mais son degré $2p+k>9$; donc G contiendra le groupe alterné.

Si $k<3$, l'ordre de G sera $O(2p+2)\ldots(2p+k)$, O étant l'ordre du groupe formé par celles de ses substitutions qui ne déplacent que $2p$ lettres.

106. Il resterait à discuter l'hypothèse $\alpha>0$. Mais ce cas doit être exclu. En effet, I_r étant transitif, parmi les substitutions S, T, ... d'ordre p dont il est dérivé, il en est une S qui mêlera dans ses cycles les lettres des deux classes. Car s'il en pouvait être autrement, soient x, y les deux lettres nouvelles contenues dans I_r et que I_{r-1} ne déplaçait pas. Pour que I_r fût transitif, il faudrait qu'une des substitutions S, T, ... contînt dans un de ses cycles x et des lettres de la première classe, et dans l'autre y et des lettres de la seconde classe; tandis qu'une autre de ces substitutions, U, permuterait x avec des lettres de seconde classe, et y avec des lettres de première classe. Mais il est clair que $T^{-1}UT=S$ mêlerait dans ses cycles les lettres des deux classes. Donc la substitution S existe nécessairement. Elle laisse immobiles $\alpha+1$ systèmes de lettres. Soient s l'un d'eux, t celui de ces systèmes que I_{r-1} déplace, mais que I_{r-2} ne déplaçait pas : I_{r-1} contient une substitution T qui remplace le système s par le système t, sans mêler ensemble les lettres des deux classes; $T^{-1}ST$ laissera immobiles les lettres de t, tout en mêlant encore les lettres de deux classes. En l'adjoignant à I_{r-2}, on obtiendra un groupe J ne déplaçant que $2p+2\alpha$ lettres, mais transitif; résultat inadmissible (103).

107. 2° Si I_r est primitif, les lettres de I_{r-1} formeront deux classes, contenant respectivement $p+\alpha$ et $p+\beta$ lettres.

Si $\alpha>2$, les déplacements que I_{r-1} font subir aux lettres de la première classe formeront un groupe alterné (*Sur la limite de transitivité des groupes non alternés*, théorème I); et, d'après l'analyse précédente, G contiendra le groupe alterné, à moins qu'on n'ait $\alpha=\beta$, et que les substitutions de I_{r-1} ne permutent de la même manière les lettres correspondantes des deux classes.

Soient respectivement $a_1\ldots a_p x_1\ldots x_\alpha$, $b_1\ldots b_p y_1\ldots y_\alpha$ ces lettres; $x_\alpha y_\alpha$ le dernier couple de lettres introduit dans le passage de I_{r-2} à I_{r-1}.

Soit z la nouvelle lettre introduite dans le passage au groupe suivant I_r. Ce groupe, étant transitif, contiendra une substitution S qui mêle dans ses cycles les lettres des deux classes. Parmi les $2\alpha+1$ lettres qu'elle laisse immobiles, on peut admettre que se trouve l'une des deux lettres x_α, y_α, par exemple y_α. Car si elle laissait immobile b_ρ, il suffirait de considérer au lieu de S sa transformée par une substitution de I_{r-1} qui remplace b_ρ par y_α.

Cela posé, si S mêlait dans ses cycles les lettres $a_1\ldots a_p x_1\ldots x_{\alpha-1}$ aux

lettres $b_1 \ldots b_p y_1 \ldots y_{\alpha-1}$, il est clair qu'en l'adjoignant à I_{r-1} on aurait un groupe transitif, de degré moindre que I_r, résultat inadmissible. Donc S devra déplacer x_α et celui de ses cycles qui contient cette lettre ne pourra renfermer que des lettres de la suite $b_1 \ldots b_p y_1 \ldots y_{\alpha-1} z$.

Mais si z faisait partie de ce cycle, et y suivait x_α à m rangs de distance, par exemple, le groupe transformé de $I_{r-\gamma}$ par S^m, ne déplaçant plus z, serait contenu dans $I_{r-\gamma}$ et ces substitutions déplaceraient x_α sans déplacer sa correspondante y_α, ce qui est inadmissible.

Il faut donc admettre que le premier cycle de S ne contient avec x_α que des lettres de la suite $b_1 \ldots b_p y_1 \ldots y_{\alpha-1}$. Le second devra contenir z avec des lettres de cette même suite, ou des lettres de l'autre suite $a_1 \ldots x_{\alpha-1}$.

Mais si ce cycle contenait z avec des lettres $b_1 \ldots y_{\alpha-1}$, le groupe dérivé de S et de I_{r-1} permuterait d'une manière alternée les $p+\alpha+1$ lettres $b_1 \ldots y_{\alpha-1} z x$ d'une part, les $p+\alpha-1$ lettres $a_1 \ldots x_{\alpha-1}$ d'autre part. Ce groupe, réduit à celles de ses substitutions qui ne déplacent pas ces dernières lettres, permuterait encore les autres d'une manière alternée, et G qui le contient serait alterné.

Donc le second cycle de S ne contiendra aucune des lettres $b_1 \ldots y_{\alpha-1}$; et S laissera immobiles α de ces lettres. Soit s l'une de ces lettres immobiles; I_{r-1}, étant $\alpha+1$ fois transitif, contiendra une substitution T d'ordre p qui remplace s par y_α; et $T^{-1}ST$, qui ne déplace pas y_α, contiendra dans son premier cycle la lettre que T fait succéder à x_α, laquelle est de la suite $a_1 \ldots x_{\alpha-1}$, et celles que T fait succéder aux autres lettres du cycle, lesquelles sont de la suite $b_1 \ldots y_{\alpha-1}$: on retombe ainsi sur un cas où l'impossibilité est démontrée.

108. Il faut donc supposer $\alpha \leqslant 2$, $\beta \leqslant 2$. D'ailleurs I_{r-1} ne doit contenir qu'une lettre de plus que I_{r-2}, sans quoi, les lettres de I_{r-1} se groupant deux à deux en systèmes, on pourrait appliquer le raisonnement qui précède.

109. Supposons d'abord $\alpha > 0$, $\beta > 0$; et soient $a_1 \ldots a_p x_1 \ldots x_\alpha$, $b_1 \ldots b_p y_1 \ldots y_\beta$ les lettres des deux classes; x_α la dernière lettre introduite. Le groupe I_r contiendra une substitution S semblable à A et mêlant dans ses cycles les lettres des deux classes. Comme elle ne déplace que $2p$ lettres, elle laissera immobiles $\alpha+\beta+1$ lettres de ces classes.

Si elle laisse immobile une lettre de la première classe, on peut admettre que c'est x_α; mais alors il est clair qu'en adjoignant S à I_{r-2} on obtiendrait un groupe transitif contenu dans G, dérivé de substitutions d'ordre p et déplaçant moins de lettres que I_r, ce qui ne peut être, par hypothèse.

Si au contraire les $\alpha+\beta+1$ lettres que S laisse immobiles appartiennent toutes à la seconde classe, on pourra admettre que dans le nombre se trouvent les β lettres $y_1, \ldots, y_\beta$ que A ne déplaçait pas; et celles des lettres $b_1 \ldots b_p$ que S déplace, en nombre $p-\alpha-1$ (on suppose $p > 3$ et $\alpha \leqslant 2$), ne pourront former un cycle à elles seules. Si l'une de ces lettres figure

dans le même cycle de S que l'une des lettres $a_1 \dots a_p$, ce cycle ne contiendra qu'une partie des lettres $a_1 \dots a_p$, et les autres seront contenues dans l'autre cycle. Dès lors il est clair que le groupe dérivé de A et de S, qui déplace moins de lettres que I_r, serait transitif, résultat inadmissible.

Supposons au contraire que S eût un de ses cycles formé des lettres $a_1 \dots a_p$ et l'autre des lettres $zx_1 \dots x_\alpha$ jointes à des lettres b. Le groupe I_{r-1} contient une substitution T d'ordre p qui déplace x_α; son premier cycle sera formé de lettres de la première classe, parmi lesquelles $p - \alpha$ au moins seront des a; son second cycle contiendra p lettres de seconde classe; les autres resteront immobiles, et l'on peut admettre que y_β est de ces dernières. Mais alors le groupe dérivé de S et de T sera transitif, quoique déplaçant moins de lettres que I_r, ce qui est inadmissible.

110. Il faut donc admettre que $\beta = 0$; mais alors le raisonnement des n°s 63-64 montre que α doit être nul aussi pour que I_r soit primitif.

111. On aura donc $\alpha = \beta = 0$; et l'on en conclut, comme au n° 105, que si $2p + k$ est le nombre des lettres de G, on aura $k \leqslant 3$. De plus, l'ordre de G sera $0(2p+1)\dots(2p+k)$.

On aura donc dans tous les cas $k \leqslant 3$.

Notre démonstration suppose que p est supérieur à 3. Mais on s'assure aisément, en traitant directement le cas où $p = 3$, qu'on obtiendra pour k la même limite 3.

112. En raisonnant d'une manière analogue sur les cas où l'on a $q = 3$, 4 ou 5, nous avons obtenu des résultats tout semblables, qui peuvent se formuler dans le théorème suivant.

Théorème. — *Soit q un nombre inférieur à 6; p un nombre premier quelconque supérieur à q; ~~l'ordre~~ le degré d'un groupe primitif G qui contient une substitution d'ordre p à q cycles (sans contenir le groupe alterné) ne peut dépasser $pq + q + 1$.*

Sur un problème de probabilités; par M. Halphen.

(Séance du 30 avril 1873)

Une tige se brise en n morceaux; quelle est la probabilité que ces n morceaux soient propres à former un polygone fermé?

Le cas le plus simple de ce problème, celui où le nombre n est égal à 3, a été traité par M. Lemoine, qui a trouvé $\frac{1}{4}$ pour la probabilité demandée.

Chaque événement possible est caractérisé par les longueurs $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$, des n morceaux dans lesquels se sépare

la tige A de longueur a. On fait l'hypothèse que ces morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de 0 à a, et que la probabilité de chaque évènement est la même; c'est-à-dire que la probabilité de l'évènement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Prenons une autre tige B de même longueur a, supposons que $n-1$ points s'y placent *au hasard*, et qu'on la brise en ces $n-1$ points. La probabilité d'obtenir de cette façon n morceaux donnés, et *disposés dans un ordre donné sur la tige*, est évidemment indépendante des longeurs de ces morceaux et de leur ordre. Car ce n'est pas autre chose que la probabilité que les $n-1$ points se placent en $n-1$ positions données sur la tige. Or cette probabilité ne dépend pas de ces positions, puisque les points se placent au hasard. Par suite, la probabilité d'obtenir, avec la tige B, n morceaux donnés, *indépendamment de leur ordre sur cette tige*, est égale à $1.2.3\ldots n$ fois cette dernière probabilité; c'est-à-dire qu'elle est constante. D'ailleurs, sur la tige B, les morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de 0 à a. Donc la probabilité de chaque évènement $[x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est la même avec les tiges A et B.

Pour que les n morceaux d'une tige soient propres à former un polygone, il faut et il suffit que chacun d'eux soit inférieur à la moitié de la tige. Il sera plus simple de considérer l'évènement opposé, et de chercher la probabilité pour qu'un morceau soit supérieur à la moitié de la tige, condition qui ne peut être réalisée que par un seul morceau à la fois.

Il est clair que cette probabilité est la même pour les tiges A et B,

Supposons maintenant $n-1$ autres tiges $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, sur chacune desquelles $n-1$ points se placent de la façon suivante. Quand, sur la tige B, les morceaux sont, en tenant compte de leur ordre, à partir d'une extrémité déterminée, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ils seront les mêmes sur les autres tiges, mais dans l'ordre suivant à partir d'une extrémité déterminée sur chaque tige; sur B_2 : $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1$; sur B_3 : $x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1, x_2$; sur B_i : $x_i, x_{i+1}, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}$; etc. On voit immédiatement que, sur chacune de ces tiges, considérée isolément, les $n-1$ points se placent au hasard. Par suite, pour chacune de ces tiges, la probabilité de l'évènement dont il s'agit est la même que pour B et A.

Chaque fois qu'un des morceaux est plus grand que $\frac{a}{2}$, il y une des tiges B, $B_1, \ldots, B_{n-1}$ et une seule, sur laquelle le morceau ayant l'origine pour extrémité est supérieur à $\frac{a}{2}$. Par suite, la probabilité cherchée est égale à n fois celle que, *sur une tige* B, *où* $n-1$ *points se placent au hasard, le segment qui contient une extrémité donnée soit supérieur à la moitié de la tige.* Pour que cet évènement se produise, il faut et il suffit que les $n-1$ points se placent dans la moitié de la tige contenant l'autre extrémité. Pour

qu'un point donné s'y place, la probabilité est $\frac{1}{2}$. Pour qu'ils s'y placent tous, la probabilité est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2^{n-1}}$, et celle de l'événement opposé, qui fait l'objet du problème proposé, est $1-\frac{n}{2^{n-1}}$

Le même problème peut être également résolu par un calcul assez simple.

L'hypothèse est que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Elle est donc de la somme

$$\frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{A},$$

A étant une constante que nous allons déterminer.

Posons

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} &= S_{n-1}, \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2} &= S_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ x_1+x_2 &= S_2. \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ étant donnés, x_{n-1} peut varier dans toute l'étendue des valeurs qui rendent $x_n = a - S_{n-1}$ positif, c'est-à-dire de 0 à $a - S_{n-2}$; de même, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}$ étant donnés, x_{n-2} peut varier de 0 à $a - S_{n-3}$; etc. En sorte que l'on aura tous les cas possibles en faisant varier : x_{n-1} de 0 à S_{n-2}, x_{n-2} de 0 à $a - S_{n-3}$, ..., x_2 de 0 à $a - x_1$, et x_1 de 0 à a. Tous les cas seront répétés 1.2.3 ... n fois. Par suite, si l'on intègre la différentielle ci-dessus entre ces limites, on aura la probabilité totale de tous les événements possibles, c'est-à-dire *l'unité*, répétée 1.2.3 ... n fois.

On a d'ailleurs :

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_3 \ldots \int_0^{a-S_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-S_{n-1}} dx_{n-1} = \frac{a^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Par suite, $A = \frac{a_{n-1}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(n-1)}$.

Pour chercher la probabilité d'un événement défini par des limites spéciales attribuées aux variables, on intégrera la différentielle $dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$ entre les limites convenables. Soit X cette intégrale. Si, par le procédé suivi, chaque cas est répété M fois, la probabilité cherchée sera $\frac{X}{MA}$.

Si l'on demande la probabilité qu'un morceau soit supérieur à $\frac{a}{2}$, on fera varier x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2 entre les mêmes limites que précédemment, et x_1 de $\frac{a}{2}$ à a. Chaque événement est alors répété $1.2.3\ldots(n-1)$ fois. Donc la probabilité cherchée est $\frac{X}{1.2.3\ldots(n-1)A} = \frac{1.2\ldots n}{a_{n-1}}X$. Mais on a ici :

$$X = \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_3 \ldots \int_0^{a-S_{n-2}} dx_{n-1}$$
$$= \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \frac{(a-x_1)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} = \frac{a^{n-1}}{2^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}.$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2_{n-1}}$, ainsi qu'on l'a trouvé précédemment.

Démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson; par M. H. Brocard.

(Séance du 30 avril 1873)

1. On doit à Th. Simson la proposition suivante :

Les projections des points de la circonférence d'un cercle circonscrit à un triangle sur les trois côtés de ce triangle sont en ligne droite.

Steiner a montré le premier que :

L'enveloppe de cette droite est une hypocycloïde régulière à trois rebroussements.

La démonstration de cette proposition remarquable a été donnée par M. Ferrers et par M. P. Serret.

Je n'ai pas eu connaissance du travail de M. Ferrers, et j'ai cherché de mon côté une démonstration de ce théorème. Celle que je présente aujourd'hui m'a paru très-simple, et, pour ce fait, je l'avais déjà communiquée à M. Gérono.

Soient A, B, C les sommets du triangle (fig. 1), H le point de rencontre des hauteurs, M un point du cercle circonscrit, D, E les projections de ce point sur les côtés AB, AC (nous supprimons le troisième côté pour simplifier la figure) ; DE sera la position de la *droite de Simson*, ou *ligne pédale*, correspondant au point M.

On sait que le milieu I de MH se trouve sur DE(*). Le lieu du point I,

(*) Cette proposition fait l'objet de la question 708, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 177.

quand le point M varie, est donc la figure semblable au cercle BACM, le centre de similitude étant le point H, et le rapport de similitude, $\frac{1}{2}$. Ce lieu est donc un cercle, et, comme il passe par les milieux des segments HA, HB, HC, il se confond avec le *cercle des neuf points*.

Remarquons enfin que si le point I se projette sur AC au point I′, on aura OI′ = EI′ ; la recherche de l'enveloppe de la droite DE est donc ramenée à la question suivante :

Étant données une circonférence fixe et une droite fixe OC *qui la coupe au point* O, *on projette un point* I *de la circonférence sur la droite* OC *en* I, *e l'on prend* I′E = I′O. *Trouver l'enveloppe de la droite* EI.

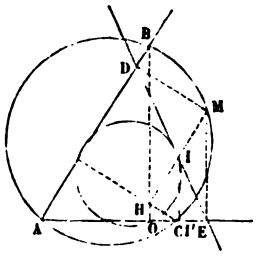


Fig. 3.

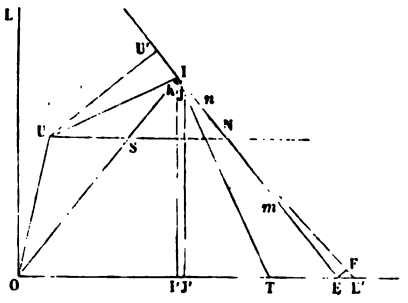


Fig. 4.

2. Soient (fig. 4) U le centre, UI = OU = a le rayon de la circonférence, U′ la projection de U sur EI. Menons par U une parallèle US à OE et par O une perpendiculaire OL à OE. Désignons par α, θ, φ, δ les angles IUS, UOL, U′UI et OII′ = I′IE. Prenons sur la tangente IT au cercle en I, à partir du point I, un élément IJ projeté en I′J′ sur OE, puis, à partir de E, EE′ = 2I′J′, et joignons E′J qui coupe EI en un certain point N dont la position limite est le point de contact de IE avec son enveloppe. Soient m, n les segments NE, NI. On a

$$EE' = 2I'J',$$

$$\frac{m}{n} = \frac{EF}{IK} = \frac{EE'\cos\delta}{IJ\sin\varphi} = \frac{EE'}{I'J'}\,\frac{\cos\delta\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{2\cos\delta\sin\alpha}{\sin\varphi},$$

$$(m+n)\sin\delta = a(\sin\theta + \cos\alpha),$$

d'où l'on tire

$$n = 2a\sin\varphi\,\frac{\sin\theta + \cos\alpha}{2\sin 2\delta\sin\alpha + 2\sin\delta\sin\varphi}.$$

Mais

(1) $$\delta = \alpha + \varphi, \quad 2\delta = 90^\circ + \theta - \alpha;$$

donc

$$n = \mathrm{IN} = 2a \sin \varphi = 2\mathrm{IU}'.$$

Ainsi le point N est déterminé par l'intersection de IE avec la circonférence égale à la première et tangente au point I.

3. Soit U_1 le centre de cette circonférence, situé sur la droite IU. Elle est tangente à une circonférence ayant U pour centre et un rayon triple. L'angle IU_1N est double de U'UI ou de φ. Mais, des deux relations (1), on déduit

$$2\varphi = 90^\circ + \theta - 3\alpha.$$

L'angle 2φ est donc fonction de 3α. Ainsi le point N appartient à l'*hypocycloïde régulière à trois rebroussements engendrée par un point de la circonférence d'un cercle égal au cercle des neuf points, roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon triple, concentrique au cercle des neuf points du triangle proposé.*

4. Pour chaque triangle donné, il y a un angle θ différent; c'est de cet angle seul que dépend l'orientation de l'hypocycloïde.

Cet angle θ joue le rôle de *paramètre d'orientation.*

Les angles *aigus* formés par les trois axes de la courbe avec OE ont pour valeurs

$$\omega, \quad 120^\circ - \omega, \quad 60^\circ - \omega,$$

avec

$$\omega = 90^\circ - \frac{2\theta}{3}.$$

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. Halphen (*).

(Séance du 19 mars 1873)

DEUXIÈME PARTIE

I. — DROITES-CONIQUES DANS LES COMPLEXES PLANS DE CONIQUES.

Je donne le nom de *complexe* plan de coniques à l'ensemble de ces courbes qui satisfont à des conditions données en nombre inférieur à 4. Le nombre de ces conditions sera *l'ordre* du complexe. Je désignerai habituellement un complexe par une lettre entre parenthèses, affectée d'un indice égal à son ordre. La même lettre, sans parenthèses, désignera une conique de ce complexe. Ainsi C_3 sera une conique appartenant à un complexe du 3me ordre (C_3).

(*) Voir, pour la première partie, même tome, p. 130.

Un complexe du 3me ordre peut, d'une infinité de manières, être formé par une série de systèmes. Tous ces systèmes peuvent contenir des droites-coniques, et quelques-unes d'entre elles peuvent rester les mêmes dans tous les systèmes. Soit D_1 une de ces dernières, et D_2 une droite-conique variant avec le système considéré. Il y a, dans le complexe, un nombre fini de droites telles que D_1, et une série de droites telles que D_2, enveloppant une ligne (D_2). En outre, il peut arriver que quelques-uns des systèmes variables contiennent des droites-coniques de plus. Soit D'_1 une de ces droites. Il y a, dans le complexe, un nombre fini de droites telles que D'_1.

Un complexe du 3me ordre (C_3) peut donc contenir à la fois des droites-coniques isolées ou de 1re *espèce*, telles que D_1 ou D'_1, et des droites coniques, telles que D_2, enveloppant une ligne, ou *de* 2me *espèce*.

Pour engendrer un même complexe (C_3), on peut choisir les systèmes générateurs de telle manière que les droites-coniques de 1re espèce soient toutes d'un seul type, D_1 ou D'_1, à volonté. Par exemple, le système des coniques C_3 qui passent en un point ne contient aucune des droites-coniques isolées de (C_3), à moins que le point choisi ne soit sur une de ces droites. En le faisant mouvoir sur une ligne continue, on détermine une suite de systèmes qui engendrent (C_3). Dans ce mode de génération, toutes les droites-coniques de 1re espèce de (C_3) appartiennent au type D'_1.

Au contraire, en engendrant le complexe (C_3) par des systèmes de coniques C_3 tangentes à une série de droites, on range toutes ces droites-coniques dans le type D_1, ainsi que je vais le prouver. Si le contraire a lieu, une droite-conique D de 1re espèce de (C_3) n'appartient pas au système des coniques C_3 tangentes à une droite arbitraire. C'est-à-dire que, parmi les coniques C_3 infiniment voisines de D, il n'y en a aucune dont le sommet soit infiniment voisin de la droite arbitraire. Donc chacun des deux sommets de ces coniques est infiniment voisin d'une position limite qu'il atteint quand la conique se réduit à D. On exprime cette propriété en disant que les sommets de la droite-conique D sont déterminés. Soit a l'un de ces sommets. Le système (S) des coniques C_3, tangentes à une droite quelconque L menée par a, contient la droite-conique D. Le système (S') des coniques C_3, tangentes à une droite arbitraire L', ne passant pas en a, ne la contient pas. Soit ν la 2me caractéristique de ce système (S'). Pour qu'il y ait moins de ν coniques de ce système tangentes à une droite L'', il faut que cette dernière passe en un sommet d'une droite-conique de (S'), et cette condition est suffisante. D'autre part, le système (S) a, pour 2me caractéristique, un nombre inférieur à ν. Il y a donc moins de ν coniques C_3 tangentes à L et à L'. Or cela est impossible, puisque la droite L est une droite quelconque menée par a, et que, par suite, elle ne passe pas en un sommet d'une droite-conique du système (S'). L'hypothèse est donc impossible. Donc tous les systèmes tels que (S') contiennent toutes les droites-coniques du complexe.

Comme conséquence de cette propriété, on voit que, sur une droite-conique de 2me espèce, les deux sommets sont déterminés, tandis que, sur une droite-conique de 1re espèce, ces points renferment une arbitraire.

Soit, par exemple, le complexe des coniques tangentes à 3 courbes A_1, A_2, A_3. Les tangentes à l'une de ces courbes, A_1, sont des droites-coniques de 2me espèce, dont les sommets sont sur les deux autres. Les tangentes communes à deux d'entre elles sont des droites-coniques de 1re espèce, dont un sommet est sur la troisième et l'autre arbitraire. Le même complexe contient encore un autre groupe de droites-coniques. Ce sont les droites qui passent par un point d'intersection de deux des trois courbes. Ce sont des droites-coniques de 2me espèce. Parmi ces droites, celles qui sont tangentes à la 3me courbe, tout en appartenant à une série de droites-coniques de 2me espèce, peuvent être considérées comme étant de la 1re espèce, attendu qu'elles ont un sommet indéterminé.

Par des raisonnements analogues, on est conduit à distinguer, dans un complexe du 2me ordre, trois espèces de droites coniques : la 1re, formée de droites isolées, dont les sommets sont arbitraires; la 2me, formée de droites enveloppant une ligne, et dont les sommets contiennent une arbitraire; la 3me, embrassant toutes les droites du plan ; sur chacune de ces droites, les sommets sont déterminés.

Dans un complexe du 1er ordre, on distinguera deux espèces de droites-coniques : la 1re, formée de droites enveloppant une ligne et dont les sommets sont arbitraires; la 2me, embrassant toutes les droites du plan ; sur chacune de ces dernières, les sommets contiennent une arbitraire.

Dans la 1re partie de ce mémoire (p. 140), on a eu lieu de considérer des conditions telles qu'une droite quelconque du plan, prise pour une conique, y satisfait. Une telle condition définit un complexe du 1er ordre contenant des droites-coniques de 2me espèce. Le nombre b ou β, défini dans l'endroit cité, est précisément le nombre des seconds sommets qui correspondent, sur une de ces droites-coniques, à un premier sommet donné. Ce nombre est nul, si le complexe ne contient que des droites coniques de 1re espèce. Par exemple, le complexe des coniques normales à une courbe donnée contient la 2me espèce de droites-coniques : un de leurs sommets est sur la courbe donnée, et le nombre β est égal au degré de cette courbe. Le même complexe contient aussi la 1re espèce de droites-coniques; ce sont les normales à la courbe donnée.

Toutes ces circonstances s'expliquent d'elles-mêmes par la remarque suivante : les coniques d'un complexe (C_n), pour lesquelles le rapport des axes est un nombre donné ε, contiennent $(4-n)$ arbitraires. Il y a donc $(4-n)$ arbitraires dans la position d'un de leurs axes et des sommets de cet axe. Si toutes ces arbitraires subsistent dans la position de cet axe, les sommets y sont déterminés. Si l'axe ne contient que $(3-n)$ arbitraires, les sommets,

situés sur un de ces axes, renferment une arbitraire. Si l'axe ne contient que $(2-n)$ arbitraires, les sommets y sont indéterminés. Ces considérations sont applicables au cas où s est nul, c'est-à-dire quand, au lieu de coniques ordinaires, il s'agit de droites-coniques.

II. — DROITES-CONIQUES DANS UN SYSTÈME COMMUN A DEUX COMPLEXES.

Soient (C_1), (C_3) deux complexes du premier et du troisième ordre. L'ensemble des conditions qui les déterminent équivaut à 4 conditions, en sorte qu'il existe un système de coniques communes à ces deux complexes. Désignons, suivant les notations de M. Chasles, par :

$$N(C_3, 2p) = \rho, \quad N(C_3, 1p, 1d) = \sigma, \quad N(C_3, 2d) = \tau,$$

le nombre des coniques du complexe (C_3) qui passent par 2 points, ou passent par un point et touchent une droite, ou touchent 2 droites. Les caractéristiques des deux systèmes $(C_3, 1p)$ et $(C_3, 1d)$ sont respectivement ρ, σ et σ, τ. Par suite, α et β étant deux nombres ne dépendant que du complexe C_1, on a :

$$N(C_1, C_3, 1p) = \alpha\rho + \beta\sigma; \quad N(C_1, C_3, 1d) = \alpha\sigma + \beta\tau.$$

Ces deux nombres sont les caractéristiques μ, ν du système (C_1, C_3) des coniques communes aux deux complexes. Par suite, la valeur totale des droites-coniques de ce système est :

$$2\mu - \nu = \alpha(2\rho - \sigma) + \beta(2\sigma - \tau).$$

Les deux nombres $(2\rho - \sigma)$ et $(2\sigma - \tau)$ sont les valeurs totales des droites-coniques des deux systèmes $(C_3, 1p)$ et $(C_3, 1d)$. Cette égalité exprime ainsi un théorème facile à énoncer.

Les droites-coniques du système (C_1, C_3) ont trois provenances différentes : 1° Elles sont de 1re espèce dans C_3, ce qui exige qu'elles soient en même temps de 2me espèce dans (C_1), si les deux complexes sont entièrement indépendants l'un de l'autre ; 2° elles sont de 2me espèce dans C_3 et de 1re dans (C_1) ; 3° elles sont de 2me espèce dans les deux complexes.

Si le complexe (C_1) ne contient pas de droites-coniques de 2me espèce, il n'y a, dans le système (C_1, C_3) que des droites-coniques de 2me espèce de (C_3). Dans les deux complexes, les droites-coniques à considérer enveloppent des lignes, en sorte que les droites-coniques du système sont des tangentes communes à ces deux lignes. Dans ce cas, d'après une remarque déjà faite, le nombre β est nul, et la valeur totale des droites-coniques du système (C_1, C_3) est simplement : $\alpha(2\rho - \sigma)$. Cette propriété n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante :

Dans un système de coniques commun à deux complexes du 1er et du 3me ordre (C_1), (C_3), *la valeur totale des droites-coniques provenant des droites-coniques de 1re espèce du complexe* (C_1), *est le produit d'un nombre ne dépendant que de ce complexe par la valeur totale des droites-coniques du système* $(C_3, 1p)$; *et, plus généralement, si les droites-coniques de 1re espèce du complexe* (C_1) *forment plusieurs séries distinctes, la valeur totale des droites-coniques du système, qui proviennent d'une de ces séries, est de la même forme.*

Je vais démontrer cette importante proposition.

Pour y parvenir, je considérerai une droite-conique du système (C_1, C_3), qui soit de 1re espèce dans (C_1), et je chercherai sa valeur. J'emploierai, à cet effet, le résultat énoncé dans la 1re partie (page 137) : Soit D cette droite-conique; je prendrai, sur une droite arbitraire Δ, un point a, à distance infiniment petite du 1er ordre de D; je chercherai les coniques infiniment aplaties du système (C_1, C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux soient en a, et je ferai la somme des ordres des carrés de ces segments. Cette somme sera la valeur de la droite conique D dans le système (C_1, C_3).

Considérons d'abord séparément les coniques du complexe (C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux soient en a. Elles forment un système (S), dont les droites-coniques sont les droites-coniques de 2me espèce de (C_3), passant en a, c'est-à-dire les tangentes menées de a à l'enveloppe de ces droites. Considérons l'une de ces tangentes, et soit a' le point où elle coupe une droite Δ' parallèle à Δ. La droite aa' est une droite-conique du système (S). Si l'on prend sur Δ' un point m, il y a un certain nombre de coniques du système (S) qui interceptent sur Δ' des segments dont les milieux soient en m; et, si m est à une distance infiniment petite du 1er ordre de a', un certain nombre de ces coniques sont infiniment aplaties. Soit α l'ordre du carré du segment intercepté par l'une d'elles; la somme des nombres tels que α est, d'après le principe rappelé plus haut, la valeur de la droite-conique aa' dans le système S.

Le point a a été pris à distance infiniment petite du 1er ordre de la droite D, qui est une tangente à l'enveloppe des droites-coniques de 2me espèce de C_3. Une des tangentes à cette enveloppe, issues du point a, fait un angle infiniment petit du 1er ordre avec D. Soit aa' cette tangente : les deux points a et a' sont respectivement à distance infiniment petite du 1er ordre des points A et A', où D rencontre Δ et Δ'.

Construisons une courbe plane qui représente la liaison existant entre la position du point m sur Δ' et le segment σ intercepté sur la même droite par une conique du système (S), le milieu de ce segment étant en m. Pour cela, prenons $A'm$ et σ^2 pour les coordonnées (x, y) de cette courbe (P). La droite aa' étant une droite-conique du système, l'ordonnée y de la courbe

(P) s'annule quand le point m vient en a', c'est-à-dire quand x devient égal à $A'a'$. Ainsi la courbe (P) passe au point de l'axe des x dont l'abscisse est $A'a'$, longueur infiniment petite du 1er ordre; et de ce point partent diverses branches de courbe. Pour chacune de ces branches, l'abscisse étant infiniment petite du 1er ordre, l'ordonnée est infiniment petite d'un ordre égal à l'un des nombres α.

Prenons une conique dans le système (S), interceptant sur Δ' un segment de milieu m; et considérons les coniques du complexe (C_1) qui la touchent aux extrémités du diamètre am. Ce diamètre est commun à toutes les coniques ainsi construites et à la conique du système (S) considérée. En faisant varier cette dernière, les autres coniques forment un système (S'), et chacune d'elles touche, aux extrémités du diamètre mené par a, une conique du système (S). Deux telles coniques seront dites *conjuguées*. Si deux coniques conjuguées interceptent des segments égaux sur Δ', elles coïncident.

En cherchant donc les couples de coniques conjuguées des systèmes (S) et (S') qui interceptent, sur Δ', des segments égaux, on trouvera les coniques du système (C_1, C_3) qui interceptent, sur la droite Δ, des segments dont les milieux sont en a. Pour l'objet que l'on se propose ici, il faut chercher celles de ces coniques qui sont infiniment aplaties, et faire la somme des ordres des carrés des segments qu'elles interceptent sur Δ, ou sur Δ'.

Pour qu'à une conique du système (S), ayant la droite am pour diamètre conjugué de la direction de Δ, soit conjuguée une conique infiniment aplatie du système (S'), il faut et il suffit que la droite am soit infiniment voisine d'une droite-conique de 1re espèce du complexe (C_1), ainsi qu'il est très-aisé de le voir. Par suite, D étant une droite-conique de 1re espèce de ce complexe, quand m est infiniment voisin de A', on a, dans le système (S'), quelques coniques infiniment aplaties. On obtient, dans le même système, une droite-conique, quand le point m vient coïncider avec le point a'', où Δ' est rencontrée par la tangente, infiniment voisine de D, menée de a à l'enveloppe des droites-coniques de 1re espèce de (C_1).

Quand le point m est infiniment voisin de A', à chaque conique (S) infiniment aplatie sont conjuguées des coniques (S') infiniment aplaties. L'une d'elles intercepte sur Δ' un segment σ', dont l'ordre α' ne dépend absolument que du complexe C_1. La somme des nombres tels que α', multiplié par le nombre des coniques S, ayant am pour diamètre conjugué de la direction de Δ, est la valeur de la droite-conique aa'', dans le système (S').

Construisons, pour le système (S'), comme pour le système (S), une courbe (P') dont les coordonnées (x', y') soient $A'm$ et le carré σ'^2 du segment σ' intercepté sur Δ' par les coniques (S') ayant am pour diamètre conjugué de la direction de Δ.

Cette courbe passe au point de l'axe des x', dont l'abscisse est $A'a''$. De ce

point partent diverses branches. Sur une même parallèle à l'axe des y', les points de cette courbe (P') se partagent en autant de groupes qu'il y a de coniques du système (S) correspondant à l'abscisse de cette parallèle. Soit r le nombre de ces groupes, qui n'est autre que la 1re caractéristique du système (S). Si la parallèle à l'axe des y' est à distance du 1er ordre de l'origine, chacun des r groupes de points, où elle coupe (P'), contient un certain nombre de points infiniment voisins de l'origine ; et, pour chacun de ces points, l'ordonnée est d'un ordre égal à l'un des nombres α'.

Si l'on fait coïncider les axes des deux courbes (P) et (P'), les points de ces courbes qui se correspondent et qui sont confondus à distance infiniment petite de l'origine, répondent aux coniques infiniment aplaties du système (C_1, C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux sont en a. Nous avons à chercher la somme des ordres des carrés des segments interceptés par ces coniques sur Δ', c'est-à-dire *la somme des ordres des ordonnées des points des courbes* (P) *et* (P') *correspondants qui sont confondus à distance infiniment petite de l'origine.* Pour y parvenir, considérons isolément deux branches correspondantes des deux courbes ; soient α et α' les ordres des ordonnées de ces branches pour une abscisse du 1er ordre. On voit aisément que, si α est le plus grand de ces deux nombres, le nombre des points d'intersection des deux branches infiniment voisins de l'origine est α', et que l'ordre des ordonnées de chacun d'eux est α. La somme des ordres de leurs ordonnées est donc $\alpha\alpha'$. Par suite, la somme cherchée n'est autre chose que $\Sigma\alpha\Sigma\alpha'$. Telle est la valeur de la droite-conique D dans le système (C_1,C_3).

Considérons maintenant, dans le complexe (C_1) une série continue et indécomposable de droites-conique de 1re espèce, enveloppant une ligne indécomposable de classe K'. Pour chaque droite de cette série, le nombre $\Sigma\alpha'$ reste le même. Désignons-le par A'. De même, considérons dans (C_3) une série indécomposable de droites-coniques de 2me espèce, enveloppant une ligne de classe K. Pour chaque droite de cette série, le nombre $\Sigma\alpha$ reste le même. Désignons-le par A. Les deux enveloppes ont K'K tangentes communes. Chacune d'elles est, dans le système (C_1, C_3) une droite-conique dont la valeur est A'A. Les deux séries considérées fournissent donc à ce système des droites-coniques ayant pour valeur totale le nombre A'K'.AK. Prenons successivement dans (C_3) toutes les séries distinctes de droites-coniques de 2me espèce, pour les combiner avec la même série de droites-coniques de (C_1). Nous concluons facilement que la série considérée de droites-coniqnes de 1re espèce de (C_1) fournit au système des droites-coniques ayant pour valeur totale le nombre A'K'ΣAK. Prenons, en particulier, pour (C_1) le complexe des coniques passant en un point. Les nombres K' et A' sont faciles à déterminer. Ce sont les nombres 1 et 2. Donc 2ΣAK est la valeur totale des droites-coniques du système (C_3, 1 p), ou ($2\rho - \sigma$). Donc

la valeur totale des droites-coniques du système, qui proviennent d'une série de droites-coniques de 1re espèce de (C_1) est $\frac{A'K'(2\rho - \sigma)}{2}$, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

III. — THÉORÈME DE M. CREMONA

De même qu'on vient de trouver directement la valeur totale des droites-coniques d'un système (C_1, C_3), qui sont de 1re espèce dans le complexe C_1, on peut aussi trouver directement celle des droites-coniques du même système qui sont de 2me espèce dans ce complexe. Ce problème ne présente pas de difficultés plus grandes que le précédent; mais je ne m'y arrêterai pas. Je n'ai traité le problème qui fait l'objet principal du précédent chapitre, que pour en conclure la démonstration du théorème de M. Cremona, dont je vais m'occuper actuellement.

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, les caractéristiques du système (C_1, C_3), commun aux deux complexes (C_1), (C_3), sont :

$$\mu = \alpha\rho + \beta\sigma, \quad \nu = \alpha\sigma + \beta\tau.$$

Si donc on assujettit les coniques de ce système à une autre condition simple, définissant un complexe C'_1, le nombre des coniques satisfaisant à la question est :

$$N(C_1, C'_1, C_3) = \alpha'\mu + \beta'\nu = \alpha\alpha'\rho + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sigma + \beta\beta'\tau.$$

Ce nombre s'exprime donc linéairement par les 3 nombres ρ, σ, τ, qu'on peut appeler les *caractéristiques* du complexe (C_3).

Le théorème énoncé par M. Cremona consiste en ce que cette propriété subsiste dans le cas où, au lieu de joindre à la condition triple définissant le complexe C_3 deux conditions simples, on lui joint une condition double indécomposable en deux conditions simples. On peut donc l'énoncer ainsi :

Le nombre des coniques satisfaisant à une condition triple et à une condition double indépendantes est de la forme $\gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau$, *les nombres* ρ, σ, τ *ne dépendant que de la condition triple (ce sont les caractéristiques du complexe défini par cette condition), et les nombres* γ, δ, ε, *ne dépendant que de la condition double.*

Ainsi que je l'ai fait observer dans l'introduction de ce mémoire, ce théorème est implicitement contenu dans les travaux de M. Chasles. C'est de là que M. Cremona l'a tiré, ainsi qu'il le dit expressément (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 776), et il s'est borné à l'énoncer explicitement. Je vais actuellement démontrer ce théorème. Cette démonstration se fera aisément en suivant une méthode analogue à celle que j'ai employée pour démontrer,

dans la 1re partie, le théorème de M. Chasles, et en s'appuyant sur la proposition qui a fait l'objet principal du chapitre précédent.

Soient donnés deux complexes (C_3), (C_2) du 3me et du 2me ordre, dont on cherche le nombre des coniques communes. Il existe une infinité, à une arbitraire, de couples de coniques (C_3), (C_2) de ces deux complexes, dont les 4 points d'intersection sont sur une conique fixe Σ. Ces couples forment deux systèmes de coniques se correspondant une à une, de telle sorte qu'à une conique de l'un des systèmes correspond une seule conique de l'autre, laquelle coupe la conique fixe Σ aux mêmes 4 points. Considérons, pour ces deux systèmes, les indicatrices relatives à une droite arbitraire Δ, ces indicatrices étant les lignes définies dans la 1re partie (page 134). Ces deux indicatrices se correspondent *point à point*; et, suivant une remarque faite plus haut (1re partie, page 139), la droite qui joint deux points correspondants passe au point fixe C, représentatif des deux points d'intersection de la droite Δ et de la conique fixe Σ. Les indicatrices ne passent pas en ce point. Donc, d'après le théorème III (1re partie, page 135), le degré de ces deux courbes est le même, et marque aussi le nombre des couples de points correspondants de ces deux courbes qui sont confondus. Ce même nombre est la 1re caractéristique de chacun des deux systèmes considérés; c'est aussi le nombre des couples de coniques correspondantes de ces deux systèmes qui sont confondues. En en retranchant le nombre des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices, et afférents aux droites-coniques communes aux deux systèmes, on aura donc le nombre cherché des coniques propres communes aux deux complexes (C_2) et (C_3).

En suivant le raisonnement fait dans la 1re partie, on voit que deux droites-coniques correspondantes confondues ont même valeur dans les deux systèmes; cette valeur commune est, en même temps, le nombre des couples de points correspondants des deux indicatrices confondus, et absorbés par cette droite-conique. On aura donc le nombre total de ces points, en faisant la somme des valeurs des droites-coniques communes aux deux systèmes, considérées dans l'un ou l'autre de ces systèmes à volonté. Je vais chercher cette somme, dans le système engendré par les coniques C_3, satisfaisant à la condition simple de rencontrer Σ en 4 points tels qu'on y puisse faire passer une conique du complexe (C_2).

En désignant, comme ci-dessus, par ρ, σ, τ, les caractéristiques du complexe (C_3), on a, pour celles du système considéré (S) :

$$\mu = m\rho + n\sigma, \quad \nu = m\sigma + n\tau,$$

m et n étant deux nombres ne dépendant que de la condition simple qui vient d'être énoncée, c'est-à-dire ne dépendant que du complexe (C_2). La valeur totale des droites-coniques de ce système est : $2\mu - \nu = m(2\rho - \sigma) + n(2\sigma - \tau)$. Mais ce nombre diffère de celui que l'on cherche, attendu qu'il

existe, dans le système (S), des droites-coniques n'appartenant pas à l'autre système. Les droites-coniques du complexe du 1er ordre (C_1), défini par la condition simple que les coniques qui le composent coupent Σ en 4 points par où on peut mener une conique du complexe (C_2), contient, en effet, les droites-coniques de (C_2); mais, en outre, la corde de contact de toute conique C_2, bitangente à Σ, est une droite-conique de ce complexe. Ces cordes de contact enveloppent une ligne. Elles forment donc une série distincte de droites-coniques de 1re espèce du complexe du 1er ordre (C_1). On trouvera donc, d'après le théorème du chapitre précédent, la valeur totale de ces droites-coniques du système (S) ou (C_1,C_3), en multipliant $(2\rho - \sigma)$ par un nombre B, ne dépendant que du complexe (C_1).

Par suite, la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes est : $\omega = 2\mu - \nu - B(2\rho - \sigma)$. D'ailleurs, μ est le nombre total des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices. Donc le nombre des coniques communes aux deux complexes est :

$$N(C_2,C_3) = \mu - \omega = (2B - m)\rho + (m - n - B)\sigma + n\tau = \gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau,$$

ce qui démontre entièrement le théorème annoncé.

Il est facile de trouver la signification géométrique du nombre B. Prenons, pour le complexe (C_3), celui des coniques qui touchent une conique fixe aux deux points d'intersection de cette conique avec une droite mobile passant en un point fixe. On reconnaît aisément que les caractéristiques de ce complexe sont : $\rho = \sigma = \tau = 2$. On a donc : $N(C_2,C_3) = 2B$, c'est-à-dire que 2B est la classe de l'enveloppe des cordes de contact des coniques du complexe (C_2) bitangentes à une conique fixe.

Il est bon d'observer que, si le complexe (C_2) ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce, c'est-à-dire couvrant le plan, le complexe (C_1) ne contient pas de droites-coniques de 2me espèce, et le nombre n ou ε est nul.

Si, de plus, le complexe (C_2) ne contient que des droites-coniques de 1re espèce, c'est-à-dire isolées, le nombre ω est nul. Dans ce cas, le nombre n étant nul aussi, on en conclut $m = B$, et le nombre $N(C_2,C_3)$ se réduit à $m\rho$, c'est-à-dire que ε et δ sont nuls.

On peut aisément obtenir les expressions des nombres B, m, n en fonction des nombres $N(C_2,3p)$, $N(C_2,2p,1d)$, $N(C_2,1p,2d)$, ... en supposant successivement que les complexes (C_3) sont $(3p)$, $(2p,1d)$, $(1p,2d)$, et en partant des relations :

$$N(5d) = N(5p) = 1, \quad N(4p,1d) = N(4d,1p) = 2, \quad N(3p,2d) = N(3d,2p) = 4.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} N(C_2,3p) &= m + 2n, \\ N(C_2,2p,1d) &= 2m, \\ N(C_2,1p,2d) &= 4B + 2n. \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire B, m, n. La 1re de ces relations exprime que $N(C_2, 3d)$ est égal à $N(C_1, 4p)$; il est aisé d'établir *a priori* cette relation ; je ne m'y arrêterai pas.

IV. — REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DES THÉORÈMES RELATIFS A LA DÉTERMINATION DES CONIQUES SUR LE PLAN.

Les caractéristiques d'un système plan de coniques, supposé indéterminé, étant μ, ν, M. Chasles a donné le nom de *module* d'une condition simple à l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$, où α et β sont des nombres relatifs à cette condition, et qui représente le nombre des coniques satisfaisant à cette condition et faisant partie du système $(\mu\ \nu)$.

Je remplace les lettres μ, ν par les lettres p, d, initiales des mots *point*, *droite*.

Le module d'un complexe (C_1), du 1er ordre, est donc la forme binaire du 1er degré $m_1 = \alpha p + \beta d$; et ce module jouit de la propriété que, si on y remplace p et d par $N(C_4, 1p)$, $N(C_4, 1d)$. (C_4) étant un système quelconque, on obtient, par cette substitution, le nombre $N(C_1, C_4)$.

De cette façon, un complexe (C_1) est caractérisé par les deux nombres α, β. On peut désirer d'exprimer ces nombres en fonction de ceux des coniques du complexe (C_1) qui satisfont à 4 conditions élémentaires.

Pour abréger, désignons par le symbole $p^i d^{4-i}$ le nombre des coniques d'un complexe (C_1), qui passent en i points et touchent $(4-i)$ droites ; en d'autres termes, posons : $N(C_1, ip, (4-i)d) = p^i d^{4-i}$. On obtient immédiatement les relations suivantes :

$$p^4 = \alpha + 2\beta, \quad p^3 d = 2\alpha + 4\beta, \quad p^2 d^2 = 4\alpha + 4\beta, \quad p d^3 = 4\alpha + 2\beta, \quad d^4 = 2\alpha + \beta,$$

d'où l'on conclut qu'il y a toujours, entre les 5 nombres représentés par les symboles $p^i d^{4-i}$, les 3 relations :

$$(1) \qquad p^3 d - 2p^4 = 0, \quad p d^3 - 2d^4 = 0, \quad 4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2 = 0;$$

et que α et β s'expriment linéairement en fonction de ces nombres de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{2d^4 - p^4}{3} + \lambda_1(p^3 d - 2p^4) + \lambda_2(p d_3 - 2d^4) + \lambda_3(4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2),$$

$$\beta = \frac{2p^4 - d^4}{3} + \mu_1(p^3 d - 2p^4) + \mu_2(p d^3 - 2d^4) + \mu_3(4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2),$$

les lettres λ et μ désignant des arbitraires.

Si l'on porte ces valeurs de α et β dans la relation

$$N(C_1, C_4) = \alpha N(C_4, 1p) + \beta N(C_4, 1d),$$

et qu'on y remplace ces deux nombres $N(C_4, 1p)$, $N(C_4, 1d)$ par A et B, on obtient :

$$N(C_1, C_4) = \left[4u_3 - 2u_1 + \frac{2B - A}{3}\right] p^4 + u_1 p^3 d - 3u_3 p^2 d^2 + u_2 p d^3 + \ldots$$
$$+ \left[4u_3 - 2u_2 + \frac{2A - B}{3}\right] d^4,$$

où l'on a posé : $u_1 = \lambda_1 A + \mu_1 B$, $u_2 = \lambda_2 A + \mu_2 B$, $u_3 = \lambda_3 A + \mu_3 B$.

Cette expression contient trois arbitraires u_1, u_2, u_3, dont on peut disposer, par exemple, pour annuler 3 termes à volonté.

En y considérant p et d comme des variables, cette expression est une forme binaire du 4me degré, que je nomme *le module du système* (C_4). On voit que ce module, dont les coefficients ne dépendent que du système C_4, jouit de cette propriété que si l'on y remplace chaque expression $p^i d^{4-i}$ par le nombre $N(C_1, ip, (4-i)d)$, C_1 étant un complexe du 1er ordre quelconque, le résultat de cette substitution est le nombre $N(C_1, C_4)$.

Si l'on désigne par le symbole $p^i d^{5-i}$ le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $5-i$ droites, on obtient le nombre $N(C_4, 1p)$, en augmentant, dans le module m_4 de (C_4), tous les exposants de p d'une unité, c'est-à-dire en multipliant symboliquement m_4 par p. On a donc : $N(C_4, 1p) = pm_4$; et de même : $N(C_4, 1d) = dm_4$. Par suite, on a : $N(C_1, C_4) = \alpha p m_4 + \beta d m_4$, ou : $N(C_1, C_4) = m_1 m_4$, puisque le module m_1 de C_1 est $\alpha p + \beta d$.

Ainsi *le nombre des coniques communes à un système* (C_4) *et à un complexe* (C_1) *du* 1er *ordre est représenté par le produit des modules du système et du complexe, où l'on remplace chaque terme, tel que* $p^i d^{5-i}$, *par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent* $5-i$ *droites.*

Procédons d'une manière analogue sur le résultat fourni par le théorème de M. Cremona. Représentons par p^2, pd, d^2 les nombres $N(C_3, 2p)$, $N(C_3, 1p, 1d)$ et $N(C_3, 2d)$. On aura :

$$N(C_2, C_3) = \gamma p^2 + \delta pd + \iota d^2,$$

où γ, δ, ι sont des coefficients ne dépendant que de (C_2). En considérant, dans l'expression du second membre, p et d comme des variables, on a une forme binaire du 2me degré, que j'appelle *le module* m_2 *du complexe* (C_2). La propriété de ce module est exprimée par la relation :

$$N(C_2, C_3) = \gamma N(C_3, 2p) + \delta N(C_3, 1p, 1d) + \iota N(C_3, 2d),$$

qui a lieu, quel que soit le complexe du 3me ordre (C_3).

Soit maintenant représenté par $p^i d^{3-i}$ le nombre des coniques du complexe (C_2) qui passent en i points et touchent $(3-i)$ droites. Si l'on veut

exprimer γ, δ, ε par les nombres $p^i d^{5-i}$, on fera varier le complexe (C_3), et l'on obtiendra les relations :

$$\begin{aligned} p^5 &= \gamma + 2\delta + 4\varepsilon, \\ p^3 d &= 2\gamma + 4\delta + 4\varepsilon, \\ p d^2 &= 4\gamma + 4\delta + 2\varepsilon, \\ d^5 &= 4\gamma + 2\delta + \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où l'on conclura d'abord qu'il y a toujours, entre les nombres $p^i d^{5-i}$, la relation suivante :

$$(2) \qquad U = 2p^5 - 3p^3 d + 3pd^2 - 2d^5 = 0.$$

On tirera de trois de ces relations les expressions de γ, δ, ε, que l'on pourra compléter en ajoutant à chacune d'elles un terme tel que λU, λ étant une arbitraire. Que l'on porte ces valeurs dans la relation :

$$N(C_2, C_3) = \gamma N(C_3, 2p) + \delta N(C_3, 1p, 1d) + \varepsilon N(C_3, 2d);$$

on obtiendra le nombre $N(C_2, C_3)$ sous la forme d'un polynôme homogène du 3me degré en p, d, dont les coefficients contiennent une arbitraire, et ne dépendent que du complexe (C_3). Je nomme ce polynôme *le module m_3 du complexe* (C_3). Ce module jouit de la propriété analogue à celle des précédents.

En conservant les mêmes conventions que ci-dessus, on aura :

$$N(C_3, 2p) = p^2 m_3, \quad N(C_3, 1p, 1d) = pdm_3, \quad N(C_3, 2d) = d^2 m_3.$$

On en conclut :

$$N(C_2, C_3) = (\gamma p^2 + \delta pd + \varepsilon d^2) m_3 = m_2 m_3.$$

Ainsi *le nombre* $N(C_2, C_3)$ *est représenté par le produit des modules des deux complexes* (C_2), (C_3), *où l'on remplace, après la multiplication, chaque nombre* $p^i d^{5-i}$ *par le nombre des coniques qui passent en* i *points et touchent* $5 - i$ *droites*.

On voit la complète analogie de cette proposition avec celle qui est relative au nombre $N(C_1, C_4)$. Mais, pour compléter cette théorie, il faut chercher quel est le module d'un complexe ou d'un système composé des coniques communes à deux complexes distincts. Soit m_i le module d'un complexe (C_i) d'ordre i, on aura, en général $N(C_i, jp, (5 - i - j)d) = p^j d^{5-i-j} m_i$. On en conclut que, si $m_{i'}$ est le module d'un autre complexe $(C_{i'})$ dont l'ordre i' est inférieur à $5 - i$, on a, en général :

$$N(C_i, C_{i'}, jp, (3 - i - i' - j)d) = p^j d^{5-i-i'-j} m_i m_{i'}.$$

Et enfin si $m_{5-i-i'}$ est le module d'un complexe $(C_{5-i-i'})$, d'ordre $(5-i-i')$, on a :

$$N(C_i, C_{i'}, C_{5-i-i'}) = m_{5-i-i'} \times m_i m_{i'}.$$

On conclut donc de cette relation que le produit $m_i m_{i'}$ est le module du complexe $(C_i, C_{i'})$. On voit que cette proposition comprend, comme cas particulier, celles relatives au cas où la somme des deux nombres i et i' est égale à 5. Le module $m_i m_{i'}$ devient alors le nombre $N(C_i, C_{5-i})$.

On peut donc enfin résumer toutes les propositions ci-dessus de la manière suivante :

Théorème I. — *Chaque condition, relative à des coniques sur un plan est caractérisée par une forme binaire, de degré égal à la multiplicité de cette condition. Cette forme est appelée* module *de la condition. Ce module jouit de la propriété suivante : si n est son degré, p et d les deux variables qui y entrent, et qu'on y remplace chaque terme tel que $p^i d^{n-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points, touchent $(n-i)$ droites et satisfont à une autre condition, dont la multiplicité est $(5-n)$; le résultat de cette substitution est le nombre des coniques qui satisfont à la fois à la condition proposée et à cette dernière.*

Théorème II. — *Le module d'une condition composée est le produit des modules des conditions composantes.* En particulier, *le produit des modules de plusieurs conditions dont la somme des ordres de multiplicité est égale à* 5, *représente le nombre des coniques qui satisfont à ces conditions, si l'on y remplace chaque terme $p^i d^{5-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $(5-i)$ droites.*

Je terminerai cette deuxième partie en appliquant ces deux derniers théorèmes à quelques exemples, dont j'emprunterai les données à M. Chasles (*Comptes rendus de l'Académie*, t. LIX, p. 345 et suiv.).

1° Soit le complexe (C_3) des *coniques qui touchent une conique fixe en un point fixe et en un point variable.* Le résultat, relatif à ce complexe, donné par M. Chasles (*loc. cit.*, p. 351), est le suivant : (C_2) étant un complexe du 2me ordre, et μ', ν' les caractéristiques du système $(C_2, 2p)$; ν'' la 2me caractéristique du système $(C_2, 1p, 1d)$, on a :

$$N(C_2, C_3) = \frac{1}{4}(2\mu' - \nu') + \frac{1}{2}\nu''.$$

Avec nos notations, ce résultat s'énonce de la manière suivante : Le module m_3 de (C_3) est : $m_3 = \frac{1}{4}(2p^3 - p^2 d) + \frac{1}{2} p d^2$.

2° Complexe (C_2) des coniques bitangentes à une conique fixe (*loc. cit*, p. 352):

$$m_2 = \frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2.$$

3° Complexe (C'_3) des coniques osculatrices à une conique fixe en un point fixe (p. 353) :

$$m'_3 = \frac{1}{4}(3p^2d - 2p^3) = \frac{1}{4}(3pd^2 - 2d^3) \text{ [en vertu de la relation (2)].}$$

4° Complexe (C'_2) des coniques osculatrices à une conique fixe en un point variable (p. 354) :

$$m'_2 = 3pd.$$

5° Complexe (C''_3) des coniques surosculatrices à une conique fixe en un point variable (p. 356) :

$$m''_3 = \frac{1}{2}(2p^3 - p^2d) + d^2p.$$

Si l'on veut avoir les caractéristiques du système (C_2, C'_2) des coniques bitangentes à une conique fixe et osculatrice à une autre conique fixe, on formera le module $m_2m'_2$ de ce système ; et les deux caractéristiques seront : $pm_2m'_2$ et $dm_2m'_2$.

Le module $m_2m'_2$ est :

$$m_2m'_2 = 3pd\left[\frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2\right] = 3p^3d - \frac{3}{2}p^2d^2 + 3pd^3 = 4(p^4 + d^4),$$

en vertu des relations (1). Les deux caractéristiques du système sont : $4(p^5 + d^4p)$ et $4(p^4d + d^5)$, ou 12.

On aura de même :

$$N(C_2, C_3) = m_2m_3 = \frac{1}{2}p\left(p^2 - \frac{1}{2}pd + d^2\right)^2 = p(p^4 + d^4) = 3,$$
$$N(C_2, C'_3) = m_2m'_3 = \frac{1}{4}\left(p^2 - \frac{1}{2}pd + d^2\right)(3p^2d - 2p^3) = \frac{1}{4}p^2d^2(3d - p) = 2,$$
$$N(C_2, C''_3) = m_2m''_3 = 2N(C_2, C_3) = 6,$$
$$N(C'_2, C_3) = m'_2m_3 = 6,$$
$$N(C'_2, C'_3) = m'_2m'_3 = 6,$$
$$N(C'_2, C''_3) = m'_2m''_3 = 12.$$

Mémoire sur la géométrie de la sphère; par M. Laguerre.

(Séance du 14 mai 1873)

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE DANS LE PLAN.

1. Je rappellerai d'abord la signification de quelques termes et de quelques notations que j'emploierai constamment dans ce mémoire.

On sait que tous les cercles tracés dans un plan se coupent en deux points fixes situés sur la droite de l'infini; je les désignerai sous le nom d'*ombilics* du plan; les droites du plan, qui convergent vers ces points, ont respectivement, si l'on suppose la figure rapportée à des axes rectangulaires, pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$.

Je désignerai les droites, dont le coefficient angulaire est $+i$, sous le nom de *droites isotropes du premier système;* l'ombilic par lequel elles passent, par la lettre I. Les *droites isotropes du second système* ont leur coefficient angulaire égal à $-i$; elles passent toutes par le second ombilic que je désignerai par la lettre J.

2. Soit un point imaginaire α d'un plan; par ce point passent une droite isotrope du premier système contenant un seul point réel A et une droite isotrope du second système contenant un seul point réel A'. Il est clair que ces deux points sont complétement déterminés par le point α, et que réciproquement ce dernier est déterminé sans ambiguïté par les points A et A'.

Je dirai (*) que AA' est le segment représentatif du point α, A étant l'origine et A' l'extrémité de ce segment.

Je rappellerai à ce sujet les deux propositions fondamentales suivantes :

Si les segments AA', BB', CC', ... *représentent des points en ligne droite, le polygone* ABC... *formé par les origines des segments et le polygone* A'B'C'... *formé par leurs extrémités sont semblables et inversement placés.*

Étant donnés deux points imaginaires représentés par les segments AA' *et* BB', *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire, dont le module est le produit des longueurs* AB *et* A'B', *et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la droite* AB *autour du point* A, *le point* B *se mouvant sur un cercle dans le sens direct* (*c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre*), *jusqu'à ce que cette droite soit parallèle à* A'B' *et dirigée dans le même sens.*

3. Étant données deux droites D et D' situées dans le plan, j'appellerai angle de la droite D avec la droite D', et je désignerai par la notation $\widehat{DD'}$, l'angle dont il faut faire tourner, *dans le sens direct*, la droite D pour qu'elle

(*) Voir ma note *Sur l'emploi des imaginaires en géométrie;* Nouv. Ann. de math., 2e série, t. IX.

vienne coïncider avec D'. Il est clair que, cette coïncidence obtenue, une nouvelle rotation égale à π ramènera de nouveau la coïncidence. L'angle de deux droites est donc déterminé à un multiple près de π.

Supposons maintenant que non-seulement les droites D et D' soient données, mais encore que, sur chacune d'elles, on donne le sens dans lequel on doit compter les longueurs positives ; j'appellerai alors angle de la droite D avec la droite D' l'angle dont il faut faire tourner la droite D dans le sens direct, jusqu'à ce qu'elles coïncident et que sur chacune d'elles les longueurs positives soient comptées dans le même sens.

Un tel angle est évidemment déterminé à un multiple près de 2π, et, par suite, toutes ses lignes trigonométriques sont parfaitement déterminées.

4. Étant donnés trois points A, B, D, je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$ l'angle de la droite BA (BA étant considéré comme un segment positif) avec la droite DA (DA étant également considéré comme un segment positif).

C'est, par conséquent, l'angle dont il faut faire tourner (dans le sens des aiguilles d'une montre) le point B pour qu'il se rabatte, non-seulement sur la droite AD, mais encore du même côté que le point D, par rapport au sommet de l'angle A.

Si deux arcs de courbe BA et DA se croisent, sur une sphère, au point A, j'appellerai angle de l'arc BA avec l'arc DA, et je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$, l'angle dont il faut faire tourner la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AB et dirigée dans le même sens, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AD et dirigée dans le même sens ; le mouvement ayant lieu dans le sens des aiguilles d'une montre pour un spectateur placé au-dessus de la sphère.

5. Soient trois points *réels* A, B, C. Menons par ces points trois droites isotropes du premier système ; une droite quelconque D tracée dans le plan les rencontre en trois points α, β, γ, et il est clair que le rapport $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$ est indépendant de la direction de la droite D.

Pour évaluer ce rapport, on peut donc supposer cette droite réelle, et, en se reportant aux propositions données (n° 2), ou bien par une recherche directe très-facile, on trouve

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{AB}{AC} e^{\widehat{BAC}.i}.$$

Il est important de remarquer que, dans cette formule, AB et AC sont des quantités essentiellement positives.

6. Considérons maintenant quatre points *réels* du plan A, B, C, D ; les quatre droites isotropes du premier système passant par ces points forment un faisceau, dont le rapport anharmonique a généralement une valeur imaginaire $re^{\theta i}$. Je dirai que cette quantité est le rapport anharmonique des

quatre points A, B, C, D, et je la désignerai, suivant l'usage habituel, par la notation (A, B, C, D) ; la quantité r, qui est essentiellement positive, sera dite le module du rapport anharmonique et l'angle θ l'argument de ce rapport.

Pour évaluer ces quantités, coupons le faisceau de droites isotropes par une droite quelconque qui les rencontre aux points α, β, γ et δ. On aura $(A, B, C, D) = \frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} : \frac{\gamma\beta}{\gamma\delta}$, ou, en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent,

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} e^{(\widehat{BAD} - \widehat{BCD})i}.$$

D'où les conclusions suivantes :

Étant donnés quatre points réels d'un plan A, B, C, D, *le module de leur rapport anharmonique* (quantité essentiellement positive) *est égal à* $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$, *et l'argument de ce rapport est l'angle* $\widehat{BAD} - \widehat{BCD}$ *ou encore l'angle* $\widehat{ABC} - \widehat{ADC}$.

Remarque. — Il est évident que l'argument est déterminé à un multiple près de 2π.

7. Si l'on avait mené par les points A, B, C, D les droites isotropes du second système, le faisceau ainsi obtenu aurait eu pour rapport anharmonique $re^{-\theta i}$; je dirai de deux rapports anharmoniques, qui ont même module et qui ne diffèrent que par le signe de l'argument, qu'ils sont *improprement égaux*.

Si quatre points sont situés sur un cercle (ou sur une droite), les faisceaux, passant par ces points et chacun des ombilics, ont même rapport anharmonique ; le rapport anharmonique de ces quatre points est donc réel. D'où cette conclusion :

Si quatre points d'un plan sont situés sur une même circonférence (*ou sur une même droite*), *l'argument de leur rapport anharmonique est un multiple de* π.

La réciproque est évidemment vraie.

Lorsque quatre points se trouvent ainsi sur une circonférence (ou sur une droite), le rapport anharmonique, tel que je l'ai défini dans le numéro précédent, a évidemment la même valeur que le rapport tel qu'on le définit habituellement. Il n'y a, par suite, aucune ambiguïté à craindre dans l'extension que j'ai donnée à la signification du mot rapport anharmonique.

8. Étant donnés quatre points α, β, γ, δ situés sur une droite réelle ou imaginaire, soient AA', BB', CC', DD' les segments représentatifs de ces points; de la définition que j'ai donnée ci-dessus, il résulte immédiatement que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ, δ est égal à celui des points A, B, C, D.

Il en est de même, lorsque ces points sont situés sur une circonférence.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si quatre points sont situés sur une circonférence (ou une droite) réelle ou imaginaire, leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre points réels qui sont les origines des segments représentatifs de ces droites, ou bien encore au rapport anharmonique des quatre points réels qui en sont les extrémités.

9. Pour faire une application simple de cette proposition, je prendrai pour point du départ la propriété suivante, fondamentale dans la théorie des sections coniques : *Étant donnée une conique tangente à quatre droites fixes, toute tangente à cette conique coupe les quatre tangentes fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant;* et je supposerai qu'une ou plusieurs de ces droites deviennent imaginaires.

Considérons, par exemple, un triangle circonscrit à une conique et la droite isotrope du premier système issue d'un de ses foyers F, cette droite et les trois côtés du triangle forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Une tangente mobile coupe les côtés du triangle aux points α, β, γ et la droite isotrope en un point imaginaire représenté par un segment dont l'origine est le point F. On en conclut que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ et F demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace. Par suite des formules données (n° 6), on a donc

$$\frac{F\alpha.\beta\gamma}{F\beta.\alpha\gamma} = \text{const.} \quad \text{et} \quad \widehat{\alpha F\beta} - \widehat{\alpha\gamma\beta} = \text{const.},$$

d'où

$$\widehat{\alpha F\beta} = \text{const.} + \widehat{\alpha\gamma\beta}.$$

Au premier abord, on pourrait croire que l'angle $\widehat{\alpha F\beta}$ est constant, puisque les points α, β, γ sont en ligne droite; mais il faut remarquer que, d'après nos conventions (n° 4), $\widehat{\alpha\gamma\beta}$ est égal à 0 ou à π, suivant que le point γ est en dehors du segment $\alpha\beta$ ou dans l'intérieur de ce segment; l'angle $\widehat{\alpha F\beta}$ peut donc varier d'une demi-circonférence.

Quant à l'angle des deux droites $F\alpha$ et $F\beta$ (ces droites étant considérées indépendamment de leur direction), il demeure constant.

Considérons encore une droite T tangente à une conique, les deux tangentes isotropes issues du foyer F, et la tangente isotrope du second système issue du foyer G; ces quatre droites forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Soit T′ une tangente quelconque à cette conique rencontrant la tangente fixe en α; elle coupe les droites isotropes du premier système issues des foyers en des points imaginaires dont les segments ont pour origine ces foyers eux-mêmes, et la droite isotrope du second système issue du foyer F en un point représenté par un segment dont l'extrémité est en F; l'origine

de ce segment est donc le point F′ symétrique de F par rapport à la tangente mobile.

D'où l'on voit que le rapport anharmonique des quatre points α, F, F′ et G demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace.

On déduit de là les relations suivantes entre les divers éléments du quadrilatère FF′αG :

$$\widehat{F\alpha G} - \widehat{FF'G} = \text{const.}, \quad \widehat{F'\alpha G} - \widehat{F'FG} = \text{const.},$$
$$\widehat{F\alpha F'} - \widehat{FGF'} = \text{const.}, \quad \widehat{FG\alpha} - \widehat{FF'\alpha} = \text{const.},$$

etc., etc. (*),

$$\frac{G\alpha . FF'}{F\alpha . GF'} = \text{const.}, \quad \frac{G\alpha . FF'}{GF . F'\alpha} = \text{const.}$$

Si l'on remarque que FG est constant et que $F'\alpha = F\alpha$, les deux dernières égalités donneront

$$FF' = \text{const.} \times \frac{F\alpha}{G\alpha} \text{ et } GF' = \text{const.}$$

D'où l'on déduit, en particulier, cette propriété bien connue que le lieu du point F′ est une circonférence de cercle ayant pour centre le foyer G.

10. Je ne m'étendrai pas davantage sur les nombreuses relations métriques que l'on peut déduire de la proposition fondamentale de la théorie des coniques et qu'elle renferme ainsi *comme cas particuliers*.

Je ferai seulement l'observation suivante : bien que, dans les théorèmes que nous obtenons ainsi, les éléments de la figure soient essentiellement supposés réels (en vertu même du mode de démonstration), ils n'en sont pas moins vrais dans toute leur généralité ; rien n'empêche donc, dans ces nouvelles propositions, de supposer que certains éléments deviennent imaginaires et d'en déduire de nouvelles relations (**).

(*) Il est presque inutile de faire remarquer que ces diverses relations se réduisent à deux relations distinctes.

(**) En général, quand dans une figure certains éléments deviennent imaginaires, toute relation relative à cette figure donne deux relations, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire. D'une proposition donnée, on déduit donc deux autres propositions généralement distinctes.

Il peut arriver néanmoins qu'elles se confondent, ou que l'une des deux exprime une simple identité, ou bien encore que l'une d'entre elles serve seulement à lever une ambiguïté et à fixer le signe dont une quantité doit être affectée.

Comme exemple de ce dernier cas, je prendrai la proposition suivante :

La somme des distances d'un point d'une ellipse aux deux foyers imaginaires situés sur le petit axe est constante et égale à $2bi$, b désignant la longueur du petit axe.

Au sujet de ce théorème, je ferai observer que les distances dont il s'agit étant comptées sur des droites différentes, il est impossible *a priori* de fixer leur valeur. En désignant donc par φ et γ les deux foyers imaginaires de l'ellipse et par $M\varphi$ et $M\gamma$ deux quelconques

11. Soient deux faisceaux homographiques de droites isotropes du premier système; le premier de ces faisceaux est déterminé par le système S des points réels A, B, C, ... situés sur les rayons qui le composent, le second est également déterminé par un système S′ de points réels A′, B′, C′, ...

Cela posé, il résulte immédiatement de cette définition que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est proprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *proprement anharmoniques.*

Soient un faisceau de droites isotropes du premier système déterminé par un système S de points réels A, B, C, ..., et un faisceau homographique de droites isotropes du deuxième système déterminé par système S′ de points réels A′, B′, C′, ... ; on voit immédiatement que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est improprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *improprement anharmoniques.*

Lorsqu'on transforme une figure Σ par rayons vecteurs réciproques, la transformée est improprement anharmonique à Σ; en sorte que, quel que soit le nombre des transformations analogues que l'on opère, la figure transformée sera toujours proprement ou improprement anharmonique à la figure primitive, suivant que le nombre des transformations sera pair ou impair.

12. De la notion qui précède résulte immédiatement la proposition suivante :

des valeurs dont sont susceptibles les distances du point M de l'ellipse aux foyers φ et γ, le théorème précédent s'exprime par l'égalité suivante :

$$\varepsilon.M\varphi + \eta.M\gamma = 2bi,$$

ε et η étant des constantes dont la valeur est $+1$ ou -1.

F et G désignant les deux foyers réels de l'ellipse, on a $\varphi = (F, G)$ et $\gamma = (G, F)$; j'exprime ainsi que φ et γ ont respectivement pour segments représentatifs les segments FG et GF.

Le point M, *étant supposé réel*, d'après la formule donnée au n° 2, on a, λ désignant l'angle positif, inférieur à un droit, que fait avec la normale MN chacun des rayons vecteurs FM et GM,

$$M\gamma = \sqrt{MF.MG}\, e^{\lambda i} \quad \text{et} \quad M\varphi = \sqrt{MF.MG}\, e^{-\lambda i};$$

on déduit de là

$$\sqrt{MF.MG}\,(\varepsilon e^{-\lambda i} + \eta e^{\lambda i}) = 2bi,$$

ou, en égalant de part et d'autre les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\sqrt{MF.MG}\,(\varepsilon + \eta)\cos\lambda = 0$$
$$\sqrt{MF.MG}\,(\eta - \varepsilon) i \sin\lambda = 2bi.$$

La première équation montre que l'on a $\varepsilon = -\eta$; portant cette valeur dans la seconde équation et élevant au carré, après avoir supprimé le facteur -4, il vient :

$$MF \sin\lambda . MG \sin\lambda = b^2,$$

ou bien $FP.GQ = b^2$, en désignant par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente en M.

Si, sur une droite (ou un cercle) réelle ou imaginaire, on a une série de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone P; *si, sur une autre droite (ou un autre cercle), on a une série homographique de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone* P', *les deux polygones* P *et* P' *sont proprement anharmoniques.*

Pour faire une application de cette proposition, considérons une conique réelle K et une droite imaginaire α tangente à cette courbe, que, par suite, touchera également la droite α' imaginairement conjuguée de la première. Une droite réelle mobile tangente à K rencontre α en un point (A, A'), et α' au point imaginairement conjugué (A',A).

Pendant le déplacement de la tangente, le point (A, A') se meut sur une droite; donc la figure (A), décrite par le point A, est semblable à la figure (A'), décrite par le point A', et inversement placée, et les deux figures sont *improprement anharmoniques*. D'autre part, en vertu de cette propriété fondamentale des coniques que la tangente détermine sur α et α' des divisions homographiques, les figures (A) et (A') sont *proprement anharmoniques;* il en résulte (n° 8) que les courbes (A) et (A') sont toutes deux des cercles.

D'où les conclusions suivantes :

Quatre droites réelles tangentes à une conique réelle coupent une droite imaginaire quelconque tangente à cette conique en quatre points représentés par des segments dont les origines sont situées sur une même circonférence.

Si un point mobile M *décrit une circonférence, tandis qu'un autre point* M' *décrit une autre circonférence en sens inverse et dans le même temps, le point milieu* I *de la corde* MM' *décrit une conique et la droite menée en* I *perpendiculairement à la corde enveloppe une autre conique.*

13. Tous les théorèmes relatifs à la division homographique sur une même droite ou sur des droites différentes donnent évidemment lieu à autant de théorèmes correspondants relatifs à deux systèmes de points *proprement anharmoniques;* pour les développer, je n'aurais qu'à transcrire ici plusieurs chapitres de la *Géométrie supérieure* et des *Sections coniques* de M. Chasles. J'éviterai au lecteur la peine de relire, sous une autre forme, des propositions bien connues et les emploierai, dans la suite de ce mémoire, toutes les fois qu'elles me seront utiles, sans entrer dans plus de détails à ce sujet.

Je ferai cependant la remarque suivante, à cause de son fréquent emploi. On connaît (*Sections coniques*, p. 99) le théorème suivant :

Si l'on a, sur une droite, une série de points en involution, les conjugués harmoniques d'un point P *quelconque de cette droite, relatifs aux couples de points de l'involution, déterminent une série de points* (P); *à un autre point* P' *de la droite correspond une autre série* (P'); *les deux divisions* (P) *et* (P') *sont homographiques.*

D'où cette conséquence pour une figure plane :

Étant donnée dans un plan une figure en involution (*), *les conjugués harmoniques d'un point quelconque* P *du plan déterminant une figure* (P); *à un autre point* P′ *correspond une autre figure* (P′); *les deux figures* (P) *et* (P′) *sont proprement anharmoniques.*

J'appellerai *courbe en involution* une courbe dont les points peuvent se grouper deux à deux, de telle sorte que deux points conjugués M et M′ fassent partie d'un système de points en involution. On déduit alors de ce qui précède la proposition suivante :

Si l'on prend successivement les points conjugués harmoniques de divers points du plan par rapport aux couples de points conjugués d'une courbe en involution, les diverses courbes ainsi obtenues sont proprement anharmoniques.

En particulier, si, pour un point du plan, la courbe est un cercle, elle sera également un cercle pour tout autre point; ainsi le lieu des points milieux des cordes joignant les points conjugués est un cercle. La courbe en involution qui jouit de cette propriété est par là même complétement définie, et je l'ai déjà étudiée dans une note *Sur les cassiniennes* publiée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868). Ses nombreuses propriétés se déduisent du reste avec la plus grande facilité, en employant les considérations qui précèdent, des simples et élégantes relations données par M. Chasles dans sa *Géométrie supérieure*, relativement à un système de segments en involution et aux milieux de ces segments.

14. Soient (A) et (A′) deux systèmes de points improprement anharmoniques, le faisceau déterminé par le système (A) et l'ombilic I et le faisceau déterminé par le second système et l'ombilic J sont homographiques; par suite, tous les points imaginaires (A, A′) sont situés sur un même cercle. D'où cette conclusion :

Si deux systèmes de points (A) *et* (A′) *sont improprement anharmoniques, tous les points imaginaires* (A, A′) *sont situés sur un même cercle.*

Réciproquement :

Si un certain nombre de points (A, A′), (B, B′), ... *sont situés sur un même cercle, les deux systèmes de points* A, B, ... *et* A′, B′, ... *sont improprement anharmoniques.*

(*A suivre.*)

(*) Par la propriété fondamentale de l'involution, on voit que A et A′ étant deux points conjugués, ces deux points et les deux points doubles P et Q sont situés sur un même cercle; de plus, les quatre points A, A′, P et Q déterminent sur ce cercle une division harmonique.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 28 MAI 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire annonce que M. de la Gournerie, membre de la Société, vient d'être élu membre de l'Académie des sciences.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Bailloud, inspecteur des ponts et chaussées en retraite, à Paris ; Perrier, capitaine d'état-major, membre du Bureau des longitudes, à Paris ; Saltel, professeur, à Chauny.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Laguerre donne lecture, de la part de M. Liguine, professeur à l'université d'Odessa, d'une *Note historique sur le problème des engrenages cylindriques.*

M. Halphen communique à la Société *Quelques applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites.*

M. Camille Jordan communique à la Société la solution de *Quelques questions de probabilités.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur la formule de Stirling.*

SÉANCE DU MERCREDI 11 JUIN 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne communication d'une lettre du secrétaire de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, qui accepte le *Bulletin* en échange de son *Bulletin*. Le secrétaire annonce en outre que la Société mathématique de Bohême accepte le *Bulletin* en échange de ses *Publications.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. Ch. Sainte-Claire Deville, membre de l'Académie des sciences, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Desboves fait à la Société une communication *Sur un théorème de Legendre.*

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur l'appareil cinématique de Poinsot et le travail de M. Sylvester relatif à cette question.*

M. Ribaucour fait à la Société une communication *Sur un point de la théorie des surfaces.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur un genre particulier de surfaces dont on peut intégrer les lignes géodésiques.*

SÉANCE DU MERCREDI 25 JUIN 1873

PRÉSIDÉE PAR M. LAFFON DE LADÉBAT

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Studnicka, professeur à l'université de Prague ; Hilaire, professeur au lycée de Douai.

M. Halphen communique à la Société une note *Sur la géométrie à n dimensions.*

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication relative au tribunal des mathématiques de Pékin.

SÉANCE DU MERCREDI 9 JUILLET 1873

PRÉSIDÉE PAR M. MOUTARD

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire annonce que M. Émile Weyr fait hommage à la Société de la plus grande partie de ses mémoires, dont on trouvera les titres aux *Ouvrages reçus par la Société.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. A. Picart, professeur à la faculté des sciences de Poitiers.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Fouret communique à la Société une note *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface.*

SÉANCE DU MERCREDI 23 JUILLET 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire communique à la Société, de la part de M. Saltel, une note *Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur.*

M. Picquet communique à la Société une note *Sur les courbes gauches algébriques.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication relative à Nasir-Eddin, et dépose sur le Bureau six volumes relatifs à la statistique, dont il fait hommage à la Société.

M. de Saint-Germain communique à la Société une note *Sur la durée des oscillations du pendule composé.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur le déplacement d'un solide invariable.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Note historique sur le problème des engrenages cylindriques; par M. V. Liguine.

(Séance du 28 mai 1873)

On sait qu'il existe deux modes de solution complétement généraux du problème de la détermination des profils conjugués des engrenages cylindriques : la méthode des enveloppes et la méthode des roulettes (*). La première est due à Poncelet, qui l'a exposée pour la première fois dans ses *Leçons de mécanique industrielle* professées, en 1830, à l'École d'application de Metz (**). Quant à la seconde, dans les ouvrages qui traitent de la théorie des engrenages, on ne trouve point d'indications sur son origine; cela tient peut-être à ce que, dans les anciens écrits généralement connus sur les roues dentées, comme le mémoire de de la Hire *Sur les épicycloïdes et leurs applications dans la mécanique* (1694) et le *Cours de mathématiques* de Camus (an. 1752, livr. X), ce deuxième mode de solution s'était primitivement présenté sous des formes très-particulières et fut ensuite généralisé par divers géomètres jusqu'à obtenir le caractère complétement général qu'il porte aujourd'hui, de sorte qu'il était, sous ce point de vue, assez difficile d'en signaler le véritable auteur. Cependant, comme l'a indiqué M. Willis en 1870, dans la seconde édition de son savant et célèbre ouvrage *Principles of mechanism* (p. 90), il existe un mémoire datant de 1733 qui contient l'énoncé et la démonstration complète de la méthode des roulettes sous une forme tout à fait générale, car on lit dans ce mémoire le passage suivant : « Si l'on veut que le pignon tourne comme la roue avec une force toujours uniforme, la courbure de l'aile et la courbure de la dent doivent être engendrées comme les épicycloïdes, par une même courbe, qui roulera au-dedans du pignon sur sa circonférence (primitive) pour décrire l'aile, et

(*) Voir Haton de la Goupillière, *Traité théorique et pratique des engrenages*, p. 5 et 16.

(**) Voir les *Leçons lithographiées* de M. Poncelet, rédigées par M. Gosselin, capitaine du génie. Metz, 1830, partie III, p. 88-90.

extérieurement sur la circonférence (primitive) de la roue pour décrire la dent, etc. » (Suit la démonstration.) M. Willis, en renvoyant pour la lecture de cet article aux *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris* pour 1733, p. 117, l'attribue à François-Joseph Camus et ajoute dans une note : « que ce principe général n'est pas contenu dans le *Cours de mathématiques* de M. Camus, » mais que le mémoire cité et le cours *paraissent* avoir été écrits par la même personne. L'objet de la présente note est de faire voir que le mémoire, et par cela même la méthode générale des roulettes, ont pour auteur non pas *François-Joseph* Camus, qui était un mécanicien habile et auteur d'un *Traité des forces mouvantes* (1722), mais *Charles-Étienne-Louis* Camus, savant bien connu par plusieurs écrits sur la mécanique appliquée et comme compagnon de Maupertuis dans la célèbre expédition du Nord de 1736, ce qui mettra en même temps hors de doute l'identité des auteurs de ce mémoire et du *Cours de mathématiques*.

En effet, le mémoire en question est intitulé : *Sur la figure des dents des roues et des ailes des pignons pour rendre les horloges plus parfaites*, par M. Camus, lu le 21 février 1733 (*Mém. de l'Acad. des sciences*, pour 1733, p. 117-140), et ne fournit ainsi lui-même aucun renseignement sur la personne de l'auteur. On n'apprend pas davantage sur ce sujet dans la nouvelle édition de l'*Histoire des mathématiques* de Montucla, publiée par Lalande, t. III, p. 752, où il est fait mention de ce mémoire dans les termes suivants : « ... On y a substitué des courbes épicycloïdes qui ont la propriété de donner un mouvement uniforme, ainsi que dans les engrenages des roues dentées, dont on trouve l'idée dans Rœmer et la Hire, que Camus a démontrées dans les *Mémoires* de 1733 et que j'ai expliquées d'une manière encore plus simple dans le *Traité d'horlogerie* par Lepaute, etc. » — Mais, en premier lieu, on peut voir dans la table générale des membres de l'ancienne Académie qui se trouve à la fin de l'ouvrage connu de M. Alfred Maury : *l'Ancienne Académie des sciences* (an. 1864, p. 372) que cette Académie a compté parmi ses membres deux différentes personnes portant le nom de Camus : l'un, François-Joseph des Camus, né à Pichome en 1672, mécanicien, exclu de l'Académie en 1723, mort en Angleterre en 1732, dont Lalande parle dans son édition de l'ouvrage de Montucla (p. 732 et 828, t. III), en citant « des Camus, gentilhomme lorrain, qui quitta l'Académie en 1723, » comme l'auteur du *Traité des forces mouvantes*, paru en 1722; l'autre, Charles-Étienne-Louis Camus, né à Crécy en 1699, mort en 1768, entré à l'Académie en 1727. Ces dates démontrent déjà que le mémoire qui nous occupe, étant lu à l'Académie le 21 février, ne peut pas avoir été écrit par le premier de ces deux personnages, vu que François-Joseph des Camus était mort en 1732. D'autre part, dans *l'Éloge de M. Camus*, inséré dans les *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1768 (p. 144-154), éloge qui se rapporte à Charles-Étienne-Louis Camus, on lit, p. 147 : « Il donna en 1733 un

mémoire sur les dents des roues et les ailes des pignons, » et plus loin, p. 152, qu'étant nommé examinateur des Écoles royales du génie et de l'artillerie, il entreprit de composer un *Cours de mathématiques*, destiné à l'instruction des élèves, etc., et enfin, p. 148, qu'il était l'un des quatre académiciens désignés pour la savante expédition du Nord.

En résumé, on voit ainsi d'une manière nette que :

La méthode générale des roulettes pour la construction des engrenages cylindriques est due à Charles-Étienne-Louis Camus, auteur du *Cours de mathématiques*, et membre de l'expédition du Nord, qui avait énoncé et démontré cette méthode dans toute sa généralité en 1733.

Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites; par M. Halphen.

(Séance du 25 mai 1873)

Les droites de l'espace qui satisfont à deux conditions forment une *congruence*. Le nombre de ces droites qui passent par un point donné est l'*ordre* de la congruence, le nombre de celles qui sont dans un plan donné en est la *classe*. Rappelons que les droites d'une congruence sont tangentes à deux surfaces (ou à deux nappes d'une même surface), qui peuvent se réduire à des lignes. On les désigne ordinairement par surfaces ou lignes *focales* de la congruence. On peut aussi désigner leur ensemble par le nom de *focale* de la congruence.

J'ai démontré (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXIV, 2 janvier 1872), que : *Le nombre des droites communes à deux congruences est égal au produit des ordres de ces congruences augmenté du produit de leurs classes*. Je me propose de donner ici trois applications nouvelles de ce théorème.

I. — Détermination du nombre des tétraèdres qui satisfont à certaines conditions.

Un tétraèdre est déterminé de grandeur et de position si chacune de ses arêtes est assujettie à deux conditions, c'est-à-dire fait partie d'une congruence donnée. Je vais montrer que le nombre des tétraèdres ainsi déterminés s'exprime en fonction des ordres et des classes des six congruences auxquelles appartiennent les six arêtes.

Désignons les arêtes du tétraèdre par les numéros de 1 à 6, et par p_i, P_i, l'ordre et la classe de la congruence C_i dont fait partie l'arête (i). Désignons par $[C_1C_2C_3C_4C_5C_6]$ le nombre des tétraèdres dont les arêtes font partie des congruences $C_1, C_2, \ldots, C_6$, et représentons par (p) la congruence des droites qui passent en un point, par (P) celles des droites qui sont dans un plan.

Si l'on assujettit simplement les cinq premières arêtes à faire partie des cinq congruences $C_1, \ldots, C_5$, l'arête (6) engendre une congruence dont l'ordre et la classe sont respectivement $[C_1C_2C_3C_4C_5(p)]$ et $[C_1C_2C_3C_4C_5(P)]$. Par suite, si l'arête (6) doit en outre faire partie de la congruence C_6, on obtiendra le nombre de ses positions, ou le nombre des solutions du problème, en additionnant les deux nombres précédents multipliés respectivement par p_6 et P_6. C'est la conséquence immédiate du théorème rappelé plus haut. On a donc cette relation :

$$[C_1C_2C_3C_4C_5C_6] = p_6[C_1C_2C_3C_4C_5(p)] + P_6[(C_1C_2C_3C_4C_5(P)].$$

On aura de même :

$$[C_1C_2C_3C_4C_5(p)] = p_5[C_1C_2C_3C_4(p)(p)] + P_5[C_1C_2C_3C_4(P)(p)], \text{ etc.}$$

On conclut immédiatement de là que le nombre cherché se compose d'une somme de termes, dont chacun est le produit des ordres de n congruences C_i, $C_{i'}$, ... par les classes des $(6-n)$ autres congruences C_j, $C_{j'}$, ..., multiplié par un coefficient qui est le nombre des tétraèdres dont les arêtes (i), (i'), ... passent par des points, et les arêtes (j), (j'), ... sont dans des plans donnés.

Le problème sera donc résolu si l'on connaît le nombre des solutions des différents problèmes particuliers, dans lesquels les six arêtes du tétraèdre sont assujettis à passer par des points ou à être dans des plans. Or il est facile de reconnaître que tous ces problèmes n'admettent qu'une solution, à l'exception de celui où trois arêtes d'une même face passent par des points et les trois autres sont dans des plans donnés. Ce dernier problème admet deux solutions.

Par conséquent, dans l'expression du nombre cherché, tous les coefficients sont égaux à l'unité, à l'exception des coefficients des termes qui contiennent les ordres des trois congruences auxquelles appartiennent trois arêtes d'une même face et les classes des trois autres.

Si 1, 2, 3 sont les arêtes d'une même face, et 4, 5, 6 les arêtes opposées à 1, 2, 3, on reconnaît aisément que les termes dont il s'agit sont :

$$p_1P_4p_2P_5p_3P_6,\ p_1P_4p_5P_2p_6P_3,\ p_4P_1p_5P_2p_3P_6,\ p_4P_1p_2P_5p_6P_3.$$

En désignant par S la somme de ces termes, on aura pour le nombre cherché N :

$$N = (p_1 + P_1)(p_2 + P_2)(p_3 + P_3)(p_4 + P_4)(p_5 + P_5)(p_6 + P_6) + S.$$

Si, par exemple, chaque arête est assujettie à rencontrer deux droites, les ordres et les classes sont l'unité, et l'on a : $N = 2^6 + 4 = 68$.

II. — SURFACE TRAJECTOIRE DU SOMMET D'UN ANGLE CONSTANT.

Un angle droit se meut de manière que l'un de ses côtés A engendre une congruence C et l'autre A', une congruence C'. Quel est le lieu de son sommet ?

Ce lieu est une surface dont le degré s'exprime en fonction des ordres et des classes des congruences C et C'.

Si le côté A seul est assujetti à faire partie de la congruence C, et que le sommet se meuve sur une droite, le côté A' engendre une congruence, dont l'ordre et la classe sont respectivement $P + 2p$ et p, p et P étant l'ordre et la classe de la congruence C. Si on assujettit, en outre, le côté A' à faire partie de la congruence C', dont p' et P' sont l'ordre et la classe, le nombre des solutions sera, d'après le théorème rappelé plus haut :

$$p'(P + 2p) + P'p = p'P + pP' + 2pp'.$$

Par suite, si l'on assujettit les côtés A et A' à faire partie respectivement des congruences C et C', sans donner de condition pour le sommet, ce point décrit une surface dont le degré est ce dernier nombre.

On reconnaît aisément que cette surface coupe le plan de l'infini : 1° suivant le cercle commun à toutes les sphères, qui y est multiple d'ordre pp' ; 2° suivant les P droites de la congruence C, qui y sont multiples d'ordre p' ; et suivant les P' droites de la congruence C', qui y sont multiples d'ordre p.

Si une portion de la focale d'une des congruences, C, se réduit à une ligne, et que, en chaque point de cette ligne, les droites de la congruence forment un cône de degré μ, cette ligne fait partie de la surface et y est multiple d'ordre $\mu p'$.

On remarquera que tous ces nombres doivent être doublés, si, au lieu d'un angle droit, on considère un angle constant quelconque.

III. — DÉTERMINATION D'UN TRIÈDRE TRIRECTANGLE.

Un trièdre trirectangle est déterminé de position si chacune de ses arêtes fait partie d'une congruence donnée. Soient p_1, P_1 ; p_2, P_2 ; p_3, P_3, les ordres et les classes des trois congruences. Par un raisonnement analogue aux précédents, on trouve que le nombre des solutions est :

$$ap_1p_2p_3 + b(p_1p_2P_3 + p_2p_3P_1 + p_3p_1P_2) + c(p_2P_3P_1 + p_3P_1P_2 + p_1P_2P_3) + dP_1P_2P_3.$$

Les coefficients a, b, c, d sont les nombres des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par des points ou sont dans des plans, en sorte que les congruences à considérer pour obtenir ces coefficients sont pour a, 3 points ; pour b, 2 points et 1 plan ; pour c, 1 point et 2 plans ; pour d, 3 plans.

D'après cela, on reconnaît facilement que les coefficients sont tous égaux à 2 ; de sorte que le nombre des trièdres est : $2(p_1+P_1)(p_2+P_2)(p_3+P_3)$.

Si chaque arête doit rencontrer deux droites, le nombre devient 2^4 ou 16.

Questions de probabilités; par M. Camille Jordan.

(Séance du 28 mai 1873)

Problème. — *Une droite de longueur l est partagée en m segments Quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une quantité donnée a ?*

Cherchons d'abord la probabilité X_n pour que les n premiers segments soient $>a$.

Elle sera évidemment nulle si $na>l$. Supposons au contraire $na<l$, et considérons un mode quelconque de section de la droite satisfaisant à la condition cherchée. Soient $a+\alpha_1, \ldots, a+\alpha_n, b, c, \ldots$, les m segments. A ce mode de section on pourra faire correspondre le suivant $na+\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b, c, \ldots$, où le premier segment est $>na$ et les autres quelconques. On pourra donc, sans altérer la probabilité cherchée, remplacer la condition à satisfaire par celle que le premier segment soit $>na$. Cette dernière condition suppose que chacun des $m-1$ points de section se trouve dans la portion de la droite de longueur $l-na$ située vers son extrémité. La probabilité de cet événement sera $\frac{l-na}{l}$ pour chacun de ces points et la probabilité composée sera $X_n=\left(\frac{l-na}{l}\right)^{m-1}$. Nous répétons, comme on le voit, le raisonnement de M. Halphen.

Cherchons maintenant la probabilité C_n pour que n segments, fixés d'avance par une personne étrangère à l'insu de celui qui fait la section, soient tous $>a$.

Il est clair que la probabilité sera la même et égale à X_n quels que soient les segments choisis. Or ils peuvent avoir été choisis de $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$ manières différentes. On aura donc $C_n=0$, si $na>l$, $C_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{l-na}{l}\right)^{m-1}$, si $na<l$.

Cela posé, il résulte des formules générales que nous avons données dans les *Comptes rendus* (9 décembre 1867), que la probabilité B_r pour que r segments *au moins* soient $>a$ est donnée par la formule

$$B_r=C_r-\frac{r}{1}C_{r+1}+\frac{r(r+1)}{1.2}C_{r+2}-\ldots\pm\frac{r(r+1)\ldots m}{1.2\ldots(m-r+1)}C_m,$$

et que la probabilité A_r pour qu'on ait *juste* r segments satisfaisant à ces conditions sera

$$A_r = B_r - B_{r+1} = C_r - \frac{r+1}{1} C_{r+1} + \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} C_{r+2} - \ldots.$$

Problème. — *Trouver la probabilité pour que quatre points pris au hasard sur une sphère forment un quadrilatère sphérique convexe.*

Soient A, B, C trois de ces points. Les arcs de grand cercle qui les joignent deux à deux découpent la sphère en huit triangles. Si l'on associe ensemble les triangles qui ne se touchent que par un sommet, on aura deux régions formées chacune de quatre triangles, et qui seront symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de la sphère.

Cela posé, soit D le quatrième point donné. On voit immédiatement que le quadrilatère ABCD sera convexe ou non, suivant que D sera contenu dans l'une ou l'autre région. Donc la probabilité pour qu'il soit convexe est égale à $\frac{1}{2}$, quelle que soit la position des points A, B, C.

Problème. — *On prend au hasard trois points* A, B, C *dans l'intérieur d'une courbe fermée* K *possédant un centre* O. *Quelle est la probabilité pour que* O *tombe dans l'intérieur du triangle* ABC?

Soit m un nombre très-grand. Par le point O nous mènerons m diamètres choisis de manière à diviser l'aire intérieure en $2m$ secteurs élémentaires équivalents. Numérotons-les dans l'ordre où les rencontre un observateur tournant autour du point O, et considérons comme premier secteur celui qui contient le point A. Supposons que le point B soit dans le $n+1^{\text{ième}}$ secteur. On peut admettre que $n < m$. En effet, si l'on avait $n > m$, il suffirait de changer le sens de la numérotation; le point B se trouverait alors dans le $n'+1^{\text{ième}}$ secteur, n' étant égal à $2m - n$ et par suite $< m$.

D'ailleurs la probabilité pour que B tombe dans le premier secteur ou dans le $m+1^{\text{ième}}$ peut être négligée comme infiniment petite. Nous admettrons donc que n peut prendre seulement les valeurs de 1 à $m-1$. Mais toutes ces valeurs sont également probables, les secteurs correspondants dans lesquels B peut tomber étant équivalents. La chance que B tombe dans le $n+1^{\text{ième}}$ secteur sera donc $\frac{1}{m-1}$.

Cela posé, pour que le point O tombe dans l'intérieur du triangle ABC, il faut et il suffit que C soit dans le secteur formé par la courbe et les prolongements OA′, OB′ des rayons vecteurs OA, OB. Soient s l'aire de ce secteur, S celle de la courbe entière; la probabilité pour que O tombe dans le triangle ABC sera $\frac{s}{S}$. Mais soit α l'aire d'un secteur élémentaire; on aura $S = 2m\alpha$. D'autre part, en vertu de la symétrie de la courbe, le secteur com-

pris entre les rayons OA′ et OB′ sera égal au secteur compris entre les rayons OA et OB; ce dernier contient une portion du premier et du $n+1^{\text{ième}}$ secteur élémentaire et la totalité des $n-1$ secteurs intermédiaires; son aire s est donc sensiblement égale à $n\alpha$.

Donc la chance pour que B tombe dans le $n+1^{\text{ième}}$ secteur et que ABC contienne O dans son intérieur sera sensiblement égale à la probabilité composée $\frac{1}{m-1}\frac{n\alpha}{2m\alpha}=\frac{n}{2m(m-1)}$. Faisons la somme de ces probabilités élémentaires pour toutes les valeurs de n, de 1 à $m-1$; on aura, pour la probabilité totale que ABC contient O,

$$\frac{1}{2m(m-1)}[1+\ldots+(m-1)]=\frac{1}{4}.$$

Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface; par M. Fouret.

(Séance du 9 juillet 1873)

Parmi les résultats intéressants contenus dans un mémoire présenté par M. Halphen à la séance du 25 juin dernier, se trouve une démonstration de ce fait qu'*une surface algébrique et une courbe gauche également algébrique se coupent en un nombre de points égal au produit de leurs degrés respectifs.*

La démonstration de ce théorème ayant présenté jusqu'à ces derniers temps une certaine difficulté, il n'est peut-être pas sans intérêt de faire remarquer qu'elle s'établit géométriquement d'une manière fort simple, à l'aide du *principe de correspondance*. Cette démonstration se trouve d'ailleurs contenue tout entière implicitement dans celle que j'ai donnée précédemment du théorème relatif au nombre des points d'intersection de trois surfaces (*Bulletin de la Société*, t. I, p. 122).

Voici une nouvelle démonstration qui comprend comme cas particulier celle que je viens de rappeler.

Soient (C_n) une courbe gauche du n^{me} ordre et (S_p) une surface du p^{me} ordre. Par chacun des points de la courbe, faisons passer une droite dont la direction varie suivant une loi choisie arbitrairement, et assujettie à la seule condition d'être exprimable algébriquement.

L'ensemble de ces droites forme une surface réglée (R_q) d'un certain ordre q (*).

(*) Les droites peuvent être déterminées par la condition de passer par un point donné, auquel cas la surface (R) est un cône; et l'on retrouve alors le procédé de démonstration que j'ai donné précédemment. La surface (R) pourrait être aussi, comme cas particulier, la développable ayant (C_n) pour arête de rebroussement, la surface lieu des normales principales de cette courbe, etc.

Considérons une droite I située d'une manière quelconque par rapport aux surfaces (S_p) et (R_q). Tout plan (A) passant par cette droite coupe (C_n) en n points a. Chacun de ces n points a est l'origine d'une génératrice rectiligne de (R_q) qui rencontre (S_p) en p points b ; soit en tout np points b. Chacun de ceux-ci détermine un plan (B) passant par la droite I, de sorte qu'à un plan (A) correspondent np plans (B).

Considérons maintenant un de ces plans (B) ; il coupe (S_p) et (R_q) suivant des courbes de degrés respectivement égaux à p et à q, et ayant par suite pq points communs b. Par chacun de ces pq points b passe une droite de (R_q) qui rencontre (C_n) en un point a. Les pq points a ainsi obtenus déterminent autant de plans (A) passant par I.

A un plan (B) correspondent donc pq plans (A), tandis qu'à un plan (A) correspondent np plans (B). Donc, en vertu du principe de correspondance, il y a $nq+qp$ plans (A) qui coïncident avec un de leurs correspondants (B).

Or, lorsque deux plans (A) et (B) correspondants coïncident, les points a et b définis ci-dessus, et respectivement situés sur ces plans, coïncident également, à moins que la droite de (R_q) qui les contient ne soit située tout entière dans le plan considéré. Les droites de (R_q) qui satisfont à cette dernière condition sont celles qui rencontrent la droite I; elles sont par suite au nombre de q. Chacune d'elles, rencontrant (S_p) en p points, donne lieu à un plan (A) et à p plans (B) correspondant à (A) et se confondant avec lui. Parmi les $np+pq$ plan résultant de la coïncidence de deux plans (A) et (B) correspondants, il y en a donc pq qui ne passent pas par des points d'intersection de (S_p) et de (C_n). Ces points d'intersection déterminent par suite np plans, c'est-à-dire qu'ils sont au nombre de np : ce qui démontre le théorème énoncé au début de cette note.

Remarque. — Considérons trois surfaces dont les degrés soient respectivement p, p', p''. Les deux dernières se coupent suivant une courbe d'un ordre égal à $p'p''$, d'après une conséquence immédiate du théorème de Bezout sur l'intersection de deux courbes planes. D'autre part, en vertu du théorème que nous venons de démontrer dans cette note, cette courbe d'ordre $p'p''$ coupe la surface d'ordre p en $pp'p''$ points.

Ainsi se trouve établi le théorème relatif au nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques.

Sur les courbes gauches algébriques; surface engendrée par les sécantes triples; nombre des sécantes quadruples; par M. Picquet.

(Séance du 23 juillet 1873)

I. On connaît la définition de la courbe gauche de degré m : c'est une courbe coupée par un plan quelconque en m points. Cette définition géométrique, impliquant la connaissance du *degré*, puise son origine dans l'algèbre, et ne saurait conséquemment s'appliquer qu'aux courbes algébriques, c'est-à-dire aux courbes qui sont le résultat de l'intersection de deux surfaces algébriques. Il suit de là que l'on ne peut pas généralement considérer l'ensemble de deux courbes gauches de degré p et q, comme une courbe gauche de degré $p+q$; car si une courbe de degré $p+q$ située sur une surface algébrique se décompose en deux autres dont les degrés respectifs sont p et q, ces deux dernières courbes auront généralement un certain nombre de points communs, ce qui n'aurait pas lieu si l'on prenait au hasard les deux courbes pour constituer la courbe de degré $p+q$. Ainsi c'est à tort que l'on voudrait considérer deux droites de l'espace comme formant une courbe gauche du second degré : elle satisfait pourtant à la définition, mais l'on voit qu'une des premières conséquences de cette définition est une restriction de cette définition même (*).

II. La théorie générale des courbes gauches repose essentiellement sur les formules de Cayley, déduites des formules analogues de Plücker, relatives aux courbes planes ; nous allons les rappeler. Soient

m le degré de la courbe gauche,

n la classe de la surface développable dont ses tangentes sont les génératrices,

r le degré de cette surface,

α le nombre de plans stationnaires,

β le nombre des points stationnaires,

x le nombre des points par où passent deux génératrices non consécutives de la développable, points situés dans un plan donné,

y le nombre des plans passant par deux génératrices non consécutives de la développable, plans passant par un point donné,

h le nombre des sécantes doubles de la courbe que l'on peut mener par un point donné,

(*) Pour préciser davantage, deux courbes qui n'ont aucun point commun ne peuvent être considérées comme formant une seule courbe, que lorsqu'une troisième courbe intervient, que chacune d'elles rencontre en un ou plusieurs points. Ainsi la courbe d'intersection d'une surface du second degré avec une surface du troisième peut se décomposer en une courbe du quatrième degré et deux droites qui ne se rencontrent pas, mais qui rencontrent chacune la première courbe en trois points.

g le nombre des droites par où l'on peut mener deux plans tangents à la développable, droites situées dans un plan donné ;

on a entre ces neuf quantités les douze relations suivantes, dont six seulement sont indépendantes et peuvent servir, lorsqu'on en connaît trois, à déterminer les six autres :

$$n = r(r-1) - 2x - 3m, \qquad r = m(m-1) - 2h - 3\beta,$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6x - 8m, \qquad n = 3m(m-2) - 6h - 8\beta,$$
$$r = n(n-1) - 2g - 3\alpha, \qquad m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$m = 3n(n-2) - 6g - 8\alpha, \qquad \beta = 3r(r-2) - 6y - 8n,$$
$$m - \alpha = 3(r-n), \qquad n - \beta = 3(r-m),$$
$$2(x-g) = (r-n)(r+n-9), \qquad 2(y-h) = (r-m)(r+m-9).$$

Et si la courbe considérée est l'intersection de deux surfaces de degrés μ, ν, comme l'on a indépendamment

$$m = \mu\nu, \quad \beta = 0, \quad r = \mu\nu(\mu+\nu-2), \quad 2h = \mu\nu(\mu-1)(\nu-1),$$

on a plus d'éléments qu'il n'en faut pour déterminer les cinq autres caractéristiques en fonction de μ et de ν (*).

III. Des neuf caractéristiques d'une courbe gauche, une des plus importantes est la quantité h qui exprime le nombre de sécantes doubles que l'on peut mener à la courbe par un point donné : elle va nous servir à trouver une relation dans laquelle entre le nombre k des points communs à deux courbes gauches algébriques, résultat de la décomposition d'une courbe simple. Soient, en effet, h_p et h_q les caractéristiques relatives aux deux courbes dont les degrés respectifs sont p et q; si $m = p + q$ est le degré de la courbe primitive, et si h_m est le nombre de ses sécantes doubles issues d'un point donné, il est clair qu'il se composera : 1° des sécantes doubles issues du point à chacune des deux courbes suivant lesquelles elle se décompose, c'est-à-dire $h_p + h_q$; 2° des droites issues du point et rencontrant une fois chaque courbe, droites égales en nombre aux génératrices suivant lesquelles se coupent les deux cônes ayant pour sommet le point donné, et les deux courbes pour bases respectives; c'est-à-dire à pq, si ces courbes n'ont aucun point commun. Mais si elles ont un point commun, la droite joignant le sommet commun à ce point est comptée dans les pq génératrices, et doit en être retranchée si l'on ne veut que le nombre des droites qui répondent proprement à la question, lequel devient $pq - 1$; si elles ont k points communs, il deviendra $pq - k$. On aura donc

$$h_m = h_p + h_q + pq - k,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad k = pq + h_p + h_q - h_m.$$

(*) Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 250

Ainsi, toutes les fois que l'on connaîtra les caractéristiques des deux courbes élémentaires, on pourra, au moyen de cette formule, déterminer le nombre de leurs points d'intersection. Elle introduit un élément de plus, le nombre k, et une relation de plus.

IV. On peut en déduire quelques relations simples entre les caractéristiques des courbes élémentaires et celles de la courbe primitive. On a, par exemple, en supposant toujours $\beta = 0$,

$$r_p = p(p-1) - 2h_p, \quad r_q = q(q-1) - 2h_q,$$

et

$$2k = 2pq + 2h_p + 2h_q - 2h_m.$$

Ajoutant membre à membre, il vient

$$(2) \quad r_p + r_q + 2k = (p+q)^2 - (p+q) - 2h_m$$
$$= (p+q)(p+q-1) - 2h_m = m(m-1) \qquad 2h_m = r.$$

Le degré de la développable correspondant à la courbe primitive est égal à la somme des degrés des développables correspondant aux courbes élémentaires, plus deux fois le nombre des points d'intersection.

On aurait de même :

$$(3) \qquad n = n_p + n_q + 6k,$$
$$(4) \qquad \alpha = \alpha_p + \alpha_q + 12k,$$
$$(5) \qquad x = x_p + x_q + 2k(r_p + r_q + k - 2) + r_p r_q,$$
$$(6) \qquad y = y_p + y_q + 2k(r_p + r_q + k - 5) + r_p r_q,$$
$$(7) \qquad g = g_p + g_q + 2k(3n_p + 3n_q + 9k - 11) + n_p n_q.$$

Mais toutes ces équations sont des conséquences de la première ; intéressantes au point de vue géométrique, elles ne fournissent aucune relation distincte.

V. β étant nul *en général* pour les courbes algébriques, il en résulte qu'une courbe de degré m est déterminée, si l'on connaît un autre de ses éléments, la quantité h par exemple. Nous allons, au moyen de la formule (1), étudier quelques surfaces particulières, relatives à une courbe gauche, et en déterminer les éléments au moyen de m et de h ; ainsi, lorsque la courbe sera connue, la surface le sera également.

VI. Et d'abord, il est facile de vérifier cette formule en l'appliquant à des cas connus. On verra, par exemple :

1° Qu'une courbe gauche du second degré (conique) ne peut se décomposer en deux droites, que si ces deux droites ont un point commun ;

2° Qu'une cubique gauche ne peut se décomposer en une conique et en une droite, que si ces deux courbes ont un point commun. Si l'on suppose qu'ensuite la conique se décompose en deux droites, on voit que, pour

que l'ensemble de trois droites forme une cubique gauche proprement dite, il faut que l'une d'elles s'appuie sur les deux autres ;

3° Qu'une biquadratique (courbe gauche du quatrième degré) de première espèce (intersection de deux surfaces du second degré) ne peut se réduire à une cubique gauche et à une droite qu'autant que cette droite est une sécante double de la cubique gauche, ce qui arrive lorsque les deux surfaces ont une génératrice commune. Si la biquadratique est de seconde espèce (intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième degré ayant en commun deux droites qui ne se rencontrent pas), il faudra que la droite et la cubique aient un point commun. D'où il suit qu'une cubique gauche située sur une surface du second degré forme une biquadratique de première espèce avec toutes les génératrices d'un système, et de seconde espèce avec toutes les génératrices de l'autre ;

4° Qu'une courbe gauche du sixième degré, intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième degré, ne peut se décomposer en deux cubiques gauches que si ces deux courbes ont cinq points communs ; etc.

Généralement, considérons trois surfaces de degrés μ, ν, ρ, se coupant en $\mu\nu\rho$ points. Les deux premières, dont l'ensemble fait une surface de degré $\mu+\nu$ coupent la troisième suivant des courbes de degrés respectifs $\mu\rho$ et $\nu\rho$, dont l'ensemble fait une courbe de degré $(\mu+\nu)\rho$. Donc, si une courbe de degré $(\mu+\nu)\rho$ se décompose en deux courbes de degrés $\mu\rho$ et $\nu\rho$, ces deux courbes devront avoir $\mu\nu\rho$ points communs. Remplaçons donc, dans la relation (1), p par $\mu\rho$, q par $\nu\rho$ et m par $(\mu+\nu)\rho$, il viendra

$$\mu\nu\rho^2 + h_{\mu\rho} + h_{\nu\rho} - h_{(\mu+\nu)\rho} = \mu\nu\rho.$$

D'ailleurs $h_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\mu\rho(\mu-1)(\rho-1)$; le premier membre devient donc

$$\mu\nu\rho^2 + \frac{1}{2}\mu\rho(\mu-1)(\rho-1) + \frac{1}{2}\nu\rho(\nu-1)(\rho-1) - \frac{1}{2}(\mu+\nu)\rho(\mu+\nu-1)(\rho-1),$$

ou

$$\mu\nu\rho^2 + \frac{1}{2}\rho(\rho-1)\Big[\mu(\mu-1) + \nu(\nu-1) - (\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\Big],$$

ou

$$\mu\nu\rho^2 - \frac{1}{2}\rho(\rho-1)2\mu\nu = \mu\nu\rho\Big[\rho-(\rho-1)\Big] = \mu\nu\rho. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VII. On peut encore appliquer la relation (1) à la recherche du degré δ de la surface engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant sur une courbe donnée de degré m_1, et assujettie à être sécante double d'une autre courbe gauche de degré m.

Le nombre cherché étant égal au nombre des droites qui rencontrent deux

fois la courbe de degré m, une fois la courbe de degré m_1 et une fois une droite donnée, est égal à m_1 fois le degré de la surface que l'on obtiendrait en remplaçant la courbe degré m_1 par une droite. On peut ainsi simplifier le problème, et, dans ce cas, il est évident qu'un plan passant par la droite coupera la surface, outre la droite avec un degré de multiplicité h_m, suivant les $\frac{1}{2}m(m-1)$ droites joignant deux à deux ses m points d'intersection avec la courbe; le degré cherché sera donc $\delta = h_m + \frac{1}{2}m(m-1)$ (*).

Mais on peut y arriver autrement; soit en effet $f(m)$ le nombre cherché. Si l'on suppose que la courbe de degré m se réduise à deux courbes de degrés p et q, la surface cherchée se composera de trois surfaces, l'une de degré $f(p)$ engendrée par le mouvement de la génératrice sur la courbe de degré p, une seconde de degré $f(q)$ pour la courbe de degré $f(q)$, et enfin une troisième engendrée par le mouvement d'une droite rencontrant la droite donnée, et une fois chacune des deux courbes, surface dont le degré est généralement $2pq$ (**) si les deux courbes ne se coupent pas. Mais si elles se coupent en k points, ce degré doit être diminué de k fois le degré de la troisième directrice qui est 1 (***).

On aura donc

$$f(m) = f(p) + f(q) + 2pq - k,$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$f(m) = f(p) + f(q) + 2pq - (pq + h_p + h_q - h_m),$$

ou

$$f(m) = f(p) + f(q) + pq + h_m - h_p - h_q.$$

En remplaçant $f(m)$, $f(p)$ et $f(q)$ par leurs valeurs $h_m + \frac{1}{2}m(m-1)$, $h_p + \frac{1}{2}p(p-1)$, et $h_q + \frac{1}{2}q(q-1)$, on verrait aisément que l'équation est vérifiée, si l'on a $m = p + q$. Mais on peut procéder autrement, et s'en servir pour trouver $f(m)$. Pour cela, supposons $p = m - 1$ et $q = 1$, c'est-à-dire décomposons la courbe de degré m en une courbe de degré $m - 1$ et une droite, l'équation devient alors

$$f(m) = f(m-1) + m \quad 1 + h_m - h_{m-1},$$

car

$$f(1) = 0 \text{ et } h_1 = 0;$$

(*) Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 352.
(**) *Ibid.*, p. 350.
(***) *Ibid.*, p. 352.

de même

$$f(m-1)=f(m-2)+m-2+h_{m-1}-h_{m-2}.$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$f(3)=f(2)+2+h_3-h_2,$$
$$f(2)=f(1)+1+h_2-h_1.$$

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, il reste

$$f(m)=h_m+(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1=h_m+\frac{1}{2}m(m-1). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

VIII. Il est clair toutefois que la formule (1) ne peut s'appliquer qu'à une condition expresse, c'est que l'on ne demande pas une décomposition impossible. Supposons par exemple que l'on veuille décomposer la courbe gauche du neuvième ordre, intersection de deux surfaces du troisième degré, en une cubique gauche et une courbe du sixième degré, intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième. Cette décomposition n'est pas possible, car si l'une des surfaces du troisième degré se décompose pour donner avec l'autre la courbe du sixième degré au moyen d'une surface du second degré, le reste de la surface sera un plan qui donnera pour le reste de la courbe une cubique plane, coupant en six points la courbe du sixième degré. Si alors on voulait appliquer la formule, on aurait

$$k=3.6+h_3+h_6-h_9.$$

Or

$$h_9=\frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)=\frac{1}{2}.9.2.2=18, \quad h_6=\frac{1}{2}.6.2.1=6, \quad h_3=1;$$

donc

$$k=18+1+6-18=7.$$

La cubique gauche couperait donc la courbe du sixième degré et par suite la surface du second degré en sept points, ce qui est impossible, puisqu'elle n'est pas sur cette surface dont la courbe du sixième degré est l'intersection complète avec la surface du troisième degré.

Mais si l'on admet que la cubique doit être plane, on aura alors $h_3=0$ et $k=6$, comme nous l'avions prévu.

IX. Nous avons vu que le degré de la surface engendrée par le mouvement d'une droite qui rencontre une fois une courbe de degré m_1 et deux fois une courbe de degré m est

$$f(m,m_1)=m_1\left[h_m+\frac{1}{2}m(m-1)\right].$$

Par chaque point de la première courbe, on peut mener h_m génératrices

de la surface; donc cette courbe en est une courbe multiple d'ordre h_m. Par chaque point de la seconde on peut mener $m_1(m-1)$ génératrices de la surface, qui sont les génératrices communes des deux cônes ayant le point pour sommet et chaque courbe pour base; cette courbe est donc aussi une courbe multiple de la surface, d'ordre $m_1(m-1)$.

Tout ce qui précède est vrai si les deux courbes n'ont aucun point commun; si elles ont un point commun, le cône qui a ce point pour sommet et qui a pour base la courbe de degré m fait tout entier partie de la surface. La surface proprement dite sera donc l'autre partie, de degré $m_1\left[h_m+\frac{1}{2}m(m-1)\right]-(m-1)$; et, s'il y a k points d'intersection, $f(m, m_1)$ se réduit à

$$m_1\left[h_m+\frac{1}{2}m(m-1)\right]-k(m-1), \tag{8}$$

et il y a en outre k cônes de degré $m-1$, dont il n'y a pas lieu de tenir compte.

Dans ce cas, chacun des cônes passe une fois par la courbe de degré m; le degré de multiplicité de l'autre restant égal à h_m, celui de la dernière doit donc être diminué de k, et il devient $m_1(m-1)-k$.

Nous allons appliquer ce qui précède à la détermination du nombre des droites situées sur une surface du troisième degré non réglée. Considérons la courbe du neuvième degré décomposée ainsi qu'il a été dit plus haut en une cubique plane et une courbe du sixième degré, intersection de deux surfaces du second et du troisième degré, et cherchons le degré de la surface engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant une fois sur la cubique plane et deux fois sur l'autre courbe. On aura alors

$$f(6,3)=3\left(h_6+\frac{1}{2}.6.5\right)-6.5,$$

car nous avons vu que les deux courbes ont six points d'intersection. Et comme $h_6=6$, le degré cherché est 33. Ainsi, la surface proprement dite est du trente-troisième degré; et elle coupera la surface du troisième degré suivant une courbe du quatre-vingt-dix-neuvième degré. D'ailleurs toutes les génératrices de la surface ayant trois de leurs points sur les deux courbes directrices ne peuvent couper en un quatrième point la surface du troisième degré, à moins d'être tout entières sur cette surface. Donc les deux surfaces ne peuvent avoir de points communs en dehors des deux courbes directrices et des droites situées sur la surface du troisième degré. Or, la surface réglée renferme la cubique $h_m=6$ fois, elle renferme l'autre courbe $m_1(m-1)-k=3.5-6=9$ fois; si donc on appelle x le nombre des droites situées sur la surface du troisième degré, on a

$$3.6+6.9+x=99,\quad 18+54+x=99,$$

d'où

$$x = 27.$$

Si, dans $f(m_1, m)$, on fait

$$m_1 = 1, \quad m = 4, \quad h_m = 2, \quad k = 2,$$

ou

$$m_1 = 1, \quad m = 3, \quad h_m = 1, \quad k = 1,$$

on trouve, comme on doit s'y attendre, une surface du second degré.

X. On peut appliquer la même méthode à la recherche du degré de la surface engendrée par les sécantes triples d'une courbe algébrique. Si l'on suppose en effet que la courbe se décompose en deux autres de degrés p et q $(p+q=m)$, la surface cherchée se composera des deux surfaces analogues pour les courbes suivant lesquelles elle se décompose, en outre des surfaces engendrées par le mouvement de la génératrice s'appuyant une fois sur l'une des courbes et deux fois sur l'autre, surfaces dont les degrés respectifs seront, d'après ce qui précède,

$$p\left[h_q + \frac{1}{2}q(q-1)\right] - k(q-1) \quad \text{et} \quad q\left[h_p + \frac{1}{2}p(p-1)\right] - k(p-1),$$

k étant le nombre des points d'intersection des deux courbes. Si donc on appelle $\varphi(m)$ l'expression cherchée, on aura

$$\varphi(m) = \varphi(p) + \varphi(q) + p\left[h_q + \frac{1}{2}q(q-1)\right] + q\left[h_p + \frac{1}{2}p(p-1)\right] - k(p+q-2),$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$\varphi(m) = \varphi(p) + \varphi(q) + p\left[h_q + \frac{1}{2}q(q-1)\right] + q\left[h_p + \frac{1}{2}p(p-1)\right] - (pq + h_p + h_q - h_m)(p+q-2).$$

Telle est l'expression de $\varphi(m)$; pour la déterminer explicitement, nous supposerons comme plus haut $p = m-1$, $q = 1$, de telle sorte que l'une des courbes sera une droite, et nous aurons

$$\varphi(m) = \varphi(m-1) + h_{m-1} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (m-1+h_{m-1}-h_m)(m-2),$$

puisque $\varphi(1) = 0$ et $h_1 = 0$, ou

$$\varphi(m) = \varphi(m-1) + (m-2)h_m - (m-3)h_{m-1} - \frac{1}{2}(m-1)(m-2);$$

de même

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) + (m-3)h_{m-1} - (m-4)h_{m-2} - \frac{1}{2}(m-2)(m-3),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\varphi(4) = \varphi(3) + 2h_4 - h_3 - \frac{1}{2}(4-1)(4-2).$$

$\varphi(3)$ est évidemment nul, puisque toute cubique gauche peut être mise sur une surface du second degré et n'admet pas conséquemment de sécantes triples en dehors des génératrices de la surface, qui la coupent les unes en un point, les autres en deux; il vient donc, en ajoutant toutes ces équations,

$$\varphi(m) = (m-2)\,h_m - h_3 - \frac{1}{2}\sum_4^m (m-1)(m-2).$$

La quantité $h_3 + \frac{1}{2}\sum_4^m (m-1)(m-2)$ est facile à calculer et est égale à $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$; on a donc

$$9) \qquad \varphi(m) = (m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right].$$

On a ainsi le degré cherché en fonction de m et de h_m. La surface admettra la courbe directrice comme courbe multiple d'ordre $h_m - m + 2$, puisque, par chaque point de la courbe, on peut mener $h_m - m + 2$ droites qui la rencontrent encore deux fois (*).

XI. On peut appliquer cette formule aux courbes les plus usuelles. Nous venons de voir que, pour $m = 3$, $\varphi(m)$ est nul; pour $m = 4$, on a deux valeurs de h, $h = 2$ ou $h = 3$. La première valeur donne la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré, pour laquelle on doit trouver, pour la même raison que ci dessus, $\varphi(m) = 0$. Pour $m = 4$, $h = 3$, on a la courbe d'intersection partielle de deux surfaces du second et du troisième degré, courbe qui est toujours sur une surface du second degré et sur une seule, et qui est rencontrée trois fois par les génératrices de l'un des deux systèmes; on doit donc trouver $\varphi(m) = 2$. Il n'y a pas d'autre courbe simple du quatrième degré, car le maximum de h en fonction de m est évidemment $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, nombre maximum des points doubles d'une courbe plane de degré m, ce qui donne 3 pour $m = 4$.

On sait qu'il y a trois espèces de courbes du cinquième degré pour lesquelles h peut être égal à 4, à 5 ou à 6 (**). On aura, suivant ces cas,

$$\varphi(5) = 2, \quad \varphi(5) = 5, \quad \text{ou} \quad \varphi(5) = 8.$$

La première est l'intersection partielle de deux surfaces du second et du

(*) Salmon, *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. V, p. 24.
(**) *Ibid.*, p. 40.

troisième degré qui ont une droite commune; les génératrices d'un système de la première surface la coupent donc en trois points et les génératrices de l'autre en deux points : on doit donc trouver $\varphi(m) = 2$.

Pour les courbes gauches du sixième degré, le minimum de h, qui est en général le plus grand entier contenu dans $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, est 6 (*). Il correspond à la courbe d'intersection complète de deux surfaces du second et du troisième degré (II). Une pareille courbe est évidemment rencontrée en trois points par les génératrices de chacun des deux systèmes; la surface des sécantes triples sera donc deux fois la surface du second degré, et l'on aura $\varphi(m) = 4$.

Plus généralement, si l'on considère une courbe de degré pair $2q$, intersection d'une surface du second degré et d'une surface de degré q, chaque système de génératrices de la première surface rencontrant la courbe en q points, une génératrice peut être considérée de $\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$ façons comme une sécante triple; la surface cherchée sera donc la surface du second degré prise $\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$ fois pour chaque système de génératrices, soit $2\,\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}$ fois. De sorte que $\varphi(m)$ doit être égal à $2.2\,\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} = \frac{2}{3}\,\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right) = \frac{m(m-2)(m-4)}{12}$. C'est ce qu'il est facile de vérifier en remplaçant, dans l'expression générale de $\varphi(m)$, h par sa valeur, qui est $\frac{m(m-2)}{4}$, en vertu de la formule $h = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$. Il serait aisé d'établir ainsi *a priori* la valeur de $\varphi(m)$ pour toutes les courbes situées sur une surface du second degré.

La courbe du sixième degré pour laquelle h est égal à 7 s'obtient en décomposant en une cubique gauche et une courbe du sixième degré la courbe du neuvième degré intersection de deux surfaces cubiques. Cette courbe intéressante se présente d'une façon très-remarquable dans l'étude

(*) M. Halphen a énoncé cet important théorème (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXX, p. 381). Sans y ajouter rien de nouveau, on peut le préciser en remarquant que, si m est pair, le plus grand entier contenu dans $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ est $\left(\frac{m-1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{m(m-2)}{4}$: la courbe est alors l'intersection d'une surface du second degré avec une surface de degré $\frac{m}{2}$. Si m est impair, le minimum de h est précisément $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, et la courbe est l'intersection partielle d'une surface du second degré avec une surface de degré $\frac{m+1}{2}$, intersection dont le complément est une ligne droite.

du réseau de surfaces du second degré, comme étant le lieu des sommets des cônes du réseau, ou encore le lieu des points dont les plans polaires par rapport à toutes les surfaces du réseau passent par une même droite, lesquelles droites sont précisément les sécantes triples de la courbe. Cette étude fait voir que la surface des sécantes triples est du huitième degré et admet la courbe pour courbe triple, c'est ce qui résulte encore de notre théorie générale.

XII. Si l'on considère la courbe du neuvième degré, intersection de deux surfaces du troisième degré, l'application de la formule précédente va encore nous permettre de déterminer le nombre des droites situées sur l'une des deux surfaces. On a, en effet, pour cette courbe,

$$h_9 = 18 \text{ (VIII)}, \quad \varphi(9) = 7\left(18 - \frac{1}{6}\cdot 9.8\right) = 42.$$

La surface engendrée par ses sécantes triples est du quarante-deuxième degré, et admet la courbe directrice comme courbe multiple d'ordre $h_9 - 9 + 2 = 11$. Une génératrice de la surface ayant trois points sur la courbe, et par suite sur une quelconque des deux surfaces du troisième degré, ne saurait d'ailleurs en avoir une quatrième sur cette surface sans être située tout entière sur elle ; donc, si l'on considère la courbe d'intersection d'une des surfaces du troisième degré avec celle du quarante-deuxième degré, elle ne peut se composer que de la courbe directrice du neuvième degré et des droites situées sur la surface du troisième degré. Si donc x est le nombre de ces droites, comme l'intersection complète doit être de degré $3 . 42 = 126$, on aura

$$11.9 + x = 126,$$

d'où

$$x = 27.$$

Plus généralement, soit une courbe de degré $3m$, intersection d'une surface du troisième degré avec une surface de degré m, et pour laquelle

$$h_{3m} = \frac{1}{2}\, 3m(m-1)(3-1) = 3m(m-1);$$

on aura

$$\varphi(3m) = (3m-2)\left[3m(m-1) - \frac{1}{6}\, 3m(3m-1)\right],$$

et en réduisant

$$\varphi(3m) = \frac{m}{2}(3m-2)(3m-5).$$

Si l'on considère la courbe d'intersection de cette surface avec la surface du

troisième degré, courbe de degré égal à $3\varphi(3m)$, elle se composera de la courbe précédente prise avec un degré de multiplicité égal à

$$h_{3m} - 3m + 2 = 3m(m-1) - 3m + 2 = 3m^2 - 6m + 2,$$

et des x droites situées sur la surface du troisième degré prises chacune avec un degré de multiplicité facile à trouver, car chacune d'elles coupe la surface de degré m, et par suite la courbe en m points, qui, combinés trois à trois, donnent le nombre $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ de façons dont la droite peut être considérée comme une sécante triple de la courbe directrice. On aura donc

$$\frac{3}{2}m(3m-2)(3m-5) = 3m(3m^2 - 6m + 2) + x\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

et en réduisant

$$9(3m-2)(3m-5) = 18(3m^2 - 6m + 2) + x(m-1)(m-2),$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \frac{9(3m-2)(3m-5) - 18(3m^2 - 6m + 2)}{(m-1)(m-2)} \\ &= \frac{81m^2 - 189m + 90 - 54m^2 + 108m - 36}{(m-1)(m-2)}, \\ &= 27\frac{m^2 - 3m + 2}{(m-1)(m-2)} = 27. \end{aligned}$$

XIII. Nous avons jusqu'à présent considéré des droites assujetties à trois conditions et engendrant une surface; nous allons maintenant leur imposer une condition de plus, de sorte qu'au lieu de chercher le degré d'une surface, nous aurons à déterminer le nombre des droites qui répondent à la question.

1° *Nombre des droites qui rencontrent une fois quatre courbes différentes, de degrés m_1, m_2, m_3, m_4.*

La surface engendrée par les droites qui rencontrent les trois premières courbes étant en général de degré $2m_1m_2m_3$ (*), la quatrième courbe rencontrera cette surface en $2m_1m_2m_3m_4$ points; il y aura donc en général $2m_1m_2m_3m_4$ droites répondant à la question.

Cela aura lieu si les courbes n'ont aucun point commun; supposons plus généralement que deux courbes de degrés m_p et m_q aient k_{pq} points communs; alors le degré de la première surface devient

$$2m_1m_2m_3 - m_1k_{23} - m_2k_{31} - m_3k_{12} \text{ (**)}.$$

(*) Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 350.
(**) *Ibid.*, p. 352.

En multipliant ce nombre par m_4, on aura le nombre des points d'intersection de la quatrième courbe avec la surface. Mais parmi ces points se trouvent ceux où elle rencontre les trois courbes directrices, lesquels fournissent des droites qui ne répondent pas à la question. Considérons, par exemple, un de ses points d'intersection avec la courbe m_1 ; les deux cônes ayant ce point pour sommet et pour bases respectives les courbes m_2 et m_3 se coupent suivant $m_2 m_3$ droites qu'il y a lieu de retrancher des précédentes, et comme il y a k_{14} points d'intersection, ce sera $m_2 m_3 k_{14}$ droites à retrancher ; de même pour les points d'intersection de la courbe m_4 avec les courbes m_2 et m_3. Le nombre cherché sera donc

$$2m_1 m_2 m_3 m_4 - m_1 m_4 k_{23} - m_2 m_4 k_{31} - m_3 m_4 k_{12} \\ - m_2 m_3 k_{14} - m_3 m_1 k_{24} - m_1 m_2 k_{34},$$

ou plus simplement

$$(10) \qquad 2m_1 m_2 m_3 m_4 - \sum_1^4 m_p m_q k_{rs}.$$

XIV. 2° *Nombre des droites qui rencontrent une fois deux courbes de degrés m_1 et m_2, et deux fois une courbe de degré m.*

Considérons tout de suite le cas général où les deux premières courbes coupent la troisième respectivement en k_1 et k_2 points, et où elles ont de leur côté k_{12} points communs.

La surface engendrée par une droite s'appuyant une fois sur la courbe m_1 et deux fois sur la courbe m est alors de degré (IX)

$$m_1 \left[h_m + \frac{1}{2} m (m-1) \right] - k_1 (m-1).$$

En multipliant ce nombre par m_2, on aura le nombre des points d'intersection de la courbe m_2 avec la surface ; mais il faudra, comme plus haut, en retrancher les génératrices qui répondent à ses points communs avec les deux autres courbes, savoir : h_m pour chacun de ses points d'intersection avec la courbe m_1 et $m_1(m-1)$ pour chacun de ses points d'intersection avec la courbe m, car en chacun de ces points les cônes ayant respectivement pour bases la courbe m_1 et la courbe m sont de degrés m_1 et $(m-1)$. Le nombre cherché sera donc

$$(11) \quad m_1 m_2 \left[h_m + \frac{1}{2} m (m-1) \right] - k_1 m_2 (m-1) - k_2 m_1 (m-1) - k_{12} h_m.$$

Toutes ces droites s'appuyant deux fois sur la courbe m seront des génératrices doubles de la surface engendrée par les droites qui s'appuient une fois sur chacune des trois courbes. On aurait de même deux nombres analogues de génératrices doubles pour cette surface, en permutant les trois

courbes deux à deux, de sorte que le nombre total des génératrices doubles de la surface qui est égal, lorsque les trois courbes ne se coupent pas, à (*)

$$m_1 m_2 \left[h_m + \frac{1}{2} m(m-1)\right] + m_2 m \left[h_{m_1} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right] + m m_1 \left[h_{m_2} + \frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)\right],$$

doit être diminué, dans le cas général que nous avons considéré, de

$$k_1 \left[m_2 (m-1) + m_2 (m_1 - 1) + h_{m_2}\right] + k_2 \left[m_1 (m-1) + m_1 (m_2 - 1) + h_{m_1}\right] + k_{12} \left[m (m_1 - 1) + m_3 (m_2 - 1) + h_m\right].$$

Les droites correspondantes, au lieu d'être des génératrices doubles de la surface, deviennent alors des génératrices doubles des cônes suivant lesquels elle se décompose, et qui font que son degré s'abaisse alors de $2m_1m_2m$ à $2m_1m_2m - m_1k_2 - m_2k_1 - mk_{12}$.

XV. 3° *Nombre des droites qui rencontrent deux fois deux courbes données de degrés m_1 et m_2.*

Pour trouver ce nombre, nous allons d'abord supposer que les deux courbes ne se coupent pas, et nous emploierons le procédé qui nous a déjà servi, c'est-à-dire que nous décomposerons l'une des deux courbes, la courbe m_2 par exemple, en deux autres de degrés p et q $(p + q = m_2)$, ayant k points communs donnés par l'équation

$$(1) \qquad k = pq + h_p + h_q - h_{m_2}.$$

Soit $F(m_1, m_2)$ le nombre cherché ; il se composera alors des droites qui rencontrent deux fois la courbe m_1 et deux fois la courbe p, c'est-à-dire $F(m_1, p)$, plus des droites qui rencontrent deux fois la courbe m_1 et la courbe q, c'est-à-dire $F(m_1, q)$, plus des droites qui rencontrent deux fois la courbe m_1, une fois la courbe p, et une fois la courbe q, ou, d'après ce qui précède, $pq\left[h_{m_1} - \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right] - kh_{m_1}$. On aura donc

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, p) + F(m_1, q) + pq\left[h_{m_1} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right] - kh_{m_1},$$

et, en remplaçant k par sa valeur,

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, p) + F(m_1, q) + pq\left[h_{m_1} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right] - (pq + h_p + h_q - h_{m_2}) h,$$

(*) Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 552.

ou

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, p) + F(m_1, q) + \frac{1}{2} pq\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} (h_{m_2} - h_p - h_q).$$

Telle est l'équation générale ; supposons maintenant que l'une des courbes soit une droite, c'est-à-dire faisons $p = m_2 - 1$, $q = 1$. Elle deviendra

$$F(m_1, m_2) = F(m_1, m_2 - 1) + \frac{1}{2} (m_2 - 1)\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} (h_{m_2} - h_{m_2 - 1}),$$

car

$$F(m_1, 1) = 0 \text{ et } h_1 = 0 ;$$

de même

$$F(m_1, m_2 - 1) = F(m_1, m_2 - 2) + \frac{1}{2} (m_2 - 2)\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} (h_{m_2 - 1} - h_{m_2 - 2}),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$F(m_1, 3) = F(m_1, 2) + \frac{1}{2} 2\, m_1 (m_1 - 1) + h_{m_1} h_3,$$

$$F(m_1, 2) = \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1),$$

car $h_2 = 0$ et $h_1 = 0$.

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, les produits en h se détruisent, et il reste

$$F(m_1, m_2) = h_{m_1} h_{m_2} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \left[1 + 2 + \ldots + (m_2 - 1) \right]$$
$$= h_{m_1} h_{m_2} + \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1) \text{ (*)}.$$

Cette formule est symétrique en m_1 et m_2, comme cela doit être ; on peut déjà la vérifier en cherchant le nombre de sécantes doubles communes à une courbe gauche de degré m_1 et à une courbe plane de degré m_2. Le plan de cette courbe coupe la première en m_1 points qui, combinés deux à deux, donnent évidemment $\frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)$ sécantes doubles de la première, coupant chacune la seconde en m_2 points ; de sorte que chacune d'elles peut être regardée de $\frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$ façons comme une sécante double de la seconde ; on doit donc trouver $\frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$. C'est bien ce que donne la formule, puisqu'on a alors $h_{m_2} = 0$.

Mais nous allons comme précédemment l'appliquer à la recherche du

(*) Cette formule a été donnée par M. Halphen (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1869, p. 145).

nombre des droites situées sur une surface du troisième degré ; cherchons d'abord ce qu'elle devient si les deux courbes m_1 et m_2 ont k points communs. En chacun de ces points, les deux cônes ayant les deux courbes pour bases respectives se coupent suivant $(m_1-1)(m_2-1)$ génératrices qu'il y a lieu de retrancher de celles qui sont données par la formule ; pour k points, on aurait donc à retrancher $k(m_1-1)(m_2-1)$ génératrices, mais alors celles qui joignent les k points deux à deux sont comptées deux fois : une fois pour chacun des points qu'elles joignent ; on en retranche donc ainsi $\frac{1}{2}k(k-1)$ en trop, et le nombre cherché devient, en général,

$$(12)\qquad F(m_1, m_2) = h_{m_1} h_{m_2} + \frac{1}{2} m_1(m_1-1)\frac{1}{2} m_2(m_2-1) - k(m_1-1)(m_2-1) + \frac{1}{2}k(k-1).$$

Soit maintenant x le nombre des droites situées sur une surface du troisième degré, et supposons qu'une pareille surface vienne à couper une surface de degré p suivant une courbe de degré $3p$, et une surface de degré q suivant une courbe de degré $3q$. Si l'on considère ces deux courbes pour leur appliquer la formule précédente, toutes les droites qu'elle donnera, ayant quatre de leurs points sur la surface du troisième degré, seront tout entières sur cette surface. Réciproquement, toutes les droites de cette surface, ayant p de leurs points sur la première courbe et q sur la seconde, pourront être considérées de $\frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1)$ façons comme des sécantes doubles communes aux deux courbes. On aura donc

$$h_{3p} h_{3q} + \frac{1}{2} 3p(3p-1)\frac{1}{2} 3q(3q-1) - k(3p-1)(3q-1) + \frac{1}{2}k(k-1) = x\frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1)$$

D'ailleurs

$$(11)\qquad h_{3p} = \frac{1}{2} 3p(p-1)(3-1) = 3p(p-1),$$

$$h_{3q} = 3q(q-1),$$

et

$$k = 3pq,$$

c'est le nombre des points communs aux trois surfaces. Il vient alors

$$9pq(p-1)(q-1) + \frac{9}{4}pq(3p-1)(3q-1) - 3pq(3p-1)(3q-1) + \frac{1}{2}3pq(3pq-1) = \frac{x}{4}p(p-1)q(q-1),$$

d'où l'on tire facilement, en réduisant, $x = 27$.

eu

F...

Telle ...
soit une ...

F...

car

de m...

F...

et ...

...

tra...

fois la seconde. Les premières peuvent être considérées de deux façons comme génératrices de la surface et seront doubles, les secondes seront triples, puisque leurs points d'intersection avec la courbe m peuvent être combinés deux à deux de trois façons. On aura donc $F(m_1, m)$ génératrices doubles, et $m_1(m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right] - k(h_m - m + 2)$ génératrices triples.

XVII. 5° *Nombre des droites qui rencontrent quatre fois une courbe donnée de degré m.*

Pour le trouver, nous décomposerons comme toujours la courbe en deux autres, de degrés respectifs p et $q(p+q=m)$. Le nombre cherché $\varphi(m)$ se composera évidemment des droites qui rencontrent quatre fois la courbe p, et quatre fois la courbe q, c'est-à-dire $\psi(p)+\psi(q)$, plus des droites qui rencontrent une fois la première et trois fois la seconde et inversement, c'est-à-dire $\chi(p, q)+\chi(q, p)$, et enfin des droites qui rencontrent deux fois chacune des courbes ou $F(p, q)$. On aura donc

$$\psi(m) = \psi(p) + \psi(q) + \chi(p,q) + \chi(q,p) + F(p,q).$$

Remplaçant ces différentes fonctions par leurs valeurs

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(p) + \psi(q) &+ p(q-2)\left[h_q - \frac{1}{6}q(q-1)\right] \\ &+ q(p-2)\left[h_p - \frac{1}{6}p(p-1)\right] - k(h_p - p + 2) - k(h_q - q + 2) \\ &+ h_p h_q + \frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1) - k(p-1)(q-1) + \frac{1}{2}k(k-1),\end{aligned}$$

k étant le nombre des points d'intersection des deux courbes, nombre égal à

$$(1) \qquad k = pq + h_p + h_q - h_m.$$

Si on le remplace par cette valeur, il vient

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(p) + \psi(q) &+ p(q-2)\left[h_q - \frac{1}{6}q(q-1)\right] \\ &+ q(p-2)\left[h_p - \frac{1}{6}p(p-1)\right] - (pq + h_p + h_q - h_m)(h_p + h_q - m + 4) \\ &+ h_p h_q + \frac{1}{2}p(p-1)\frac{1}{2}q(q-1) - (pq + h_p + h_q - h_m)(p-1)(q-1) \\ &+ \frac{1}{2}(pq + h_p + h_q - h_m)(pq + h_p + h_q - h_m - 1).\end{aligned}$$

Telle est l'expression générale de $\psi(m)$; pour la déterminer explicitement, nous ne ferons pas comme plus haut $p = m-1$, $q = 1$, parce qu'alors la droite suivant laquelle la courbe m se décompose devient une sécante quadruple d'ordre $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}$ de la courbe $m-1$, ce qui com-

plique la question ; mais rien n'empêche de faire $p = m - 2$, $q = 2$, c'est-à-dire de décomposer la courbe en une conique et une courbe de degré $m - 2$. On aura alors

$$\psi(2) = 0, \quad h_2 = 0,$$

par suite

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(m-2) &+ 2(m-4)\left[h_{m-2} - \frac{1}{6}(m-2)(m-3)\right] \\ &- (2m - 4 + h_{m-2} - h_m)(h_{m-2} - m + 4) \\ &+ \frac{1}{2}(m-2)(m-3) - (2m - 4 + h_{m-2} - h_m)(m-3) \\ &+ \frac{1}{2}(2m - 4 + h_{m-2} - h_m)(2m - 5 + h_{m-2} - h_m).\end{aligned}$$

Séparant les termes en h des termes indépendants de h,

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(m-2) &+ 2(m-4)h_{m-2} - 2(m-2)h_{m-2} + (m-4)(h_{m-2} - h_m) \\ &- h_{m-2}(h_{m-2} - h_m) - (m-3)(h_{m-2} - h_m) \\ &+ \frac{1}{2}(2m - 4 + 2m - 5)(h_{m-2} - h_m) + \frac{1}{2}(h_{m-2} - h_m)^2 + f(m),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}f(m) = -\frac{1}{3}(m-2)(m-3)(m-4) &+ 2(m-2)(m-4) + \frac{1}{2}(m-2)(m-3) \\ &- 2(m-2)(m-3) + (m-2)(2m-5).\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}f(m) = -\frac{1}{6}(m-2)\Big[&2m^2 - 14m + 24 - 12m + 48 - 3m + 9 \\ &+ 12m - 36 - 12m + 30\Big],\end{aligned}$$

$$f(m) = -\frac{1}{6}(m-2)(2m^2 - 29m + 75).$$

Si l'on ordonne $\psi(m)$, il vient

$$\begin{aligned}\psi(m) = \psi(m-2) &+ \frac{1}{2}h_m^2 - h_m\left[m - 4 - m + 3 + \frac{1}{2}(4m - 9)\right] \\ &+ h_{m-2}\left[2m - 8 - 2m + 4 + m - 4 - m + 3 + \frac{1}{2}(4m - 9)\right] \\ &- h_{m-2}^2 + h_m h_{m-2} + \frac{1}{2}h_{m-2}^2 - h_m h_{m-2} + f(m).\end{aligned}$$

Le produit $h_m h_{m-2}$ disparaît, et il reste, en réduisant,

$$\psi(m) = \psi(m-2) + \frac{1}{2}h_m^2 - \frac{1}{2}h_m(4m - 11) + \frac{1}{2}h_{m-2}(4m - 19) - \frac{1}{2}h_{m-2}^2 + f(m),$$

expression très-remarquable en ce sens que, si l'on y remplace m par $m-2$, les coefficients de h_{m-2}^2 et de h_{m-2} restent les mêmes au signe près, de sorte que h_{m-2} disparaîtra dans l'addition. On a, en effet,

$$\psi(m-2)=\psi(m-4)+\frac{1}{2}h_{m-2}^2-\frac{1}{2}h_{m-2}(4m-19)$$
$$+\frac{1}{2}h_{m-4}(4m-27)-\frac{1}{2}h_{m-4}^2+f(m-2).$$

Il y a maintenant deux cas à considérer, suivant que m est pair ou impair. Si m est pair et égal à $2p$, on ira de la sorte jusqu'à

$$\psi(6)=\psi(4)+\frac{1}{2}h_6^2-\frac{13}{2}h_6+\frac{5}{2}h_4-\frac{1}{2}h_4^2+f(6)$$
$$\psi(4)=\frac{1}{2}h_4^2-\frac{5}{2}h_4+f(4),$$

car $\psi(2)=0$ et $h_2=0$.

Ajoutant toutes ces équations, on a

$$\psi(m)=\frac{1}{2}h_m^2-\frac{1}{2}h_m(4m-11)+\sum f(m).$$

$\sum f(m)$ est facile à calculer, il suffit de remplacer m par $2p$ et de chercher $\sum_2^p f(2p)$, puis de remplacer p par $\frac{m}{2}$; on trouve alors

$$\sum f(m)=-\frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

On a donc définitivement

$$(14)\qquad \psi(m)=\frac{1}{2}h_m(h_m-4m+11)-\frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

Si m est impair et égal à $2p+1$, le calcul se fait aussi facilement, car on a

$$\psi(3)=\psi(1)+\frac{1}{2}h_3^2-\frac{1}{2}h_3+f(3)$$
$$\psi(1)=$$

et l'on a

$$\psi(m)=\frac{1}{2}h_m(h_m-4m+11)+1+\sum_1^p f(2p+1),$$

ce qui conduit à la même formule.

En appliquant cette formule, on remarque que, abstraction faite de la ligne droite, la première courbe qui ait des sécantes quadruples est la courbe gauche du cinquième degré pour laquelle $h_5 = 6$, qui a une sécante quadruple. Les deux courbes du sixième degré que nous avons considérées, pour lesquelles $h_6 = 6$ ou $h_6 = 7$, n'en ont pas. Mais toutes les autres courbes du sixième degré en auront nécessairement, puisque $\psi(m)$ est du second degré en h et que deux valeurs de h seules peuvent l'annuler pour une valeur donnée de m. Ce sont les courbes pour lesquelles $h = 8$, $h = 9$ ou $h = 10$, et qui ont respectivement 1, 3 et 6 sécantes triples.

Si l'on considère la surface engendrée par les sécantes triples de la courbe m, toutes les sécantes quadruples en seront des génératrices multiples d'ordre 4. La surface $\varphi(m)$ a donc $\psi(m)$ génératrices quadruples.

Nous terminerons en vérifiant au moyen de cette formule l'existence des 27 droites d'une surface du troisième degré. Supposons, pour cela, qu'une surface du troisième degré rencontre une surface de degré p suivant une courbe de degré $3p$. Les sécantes quadruples de cette courbe, ayant quatre de leurs points sur la première surface, y seront tout entières; réciproquement, toutes les droites de cette surface rencontrant l'autre surface, et, par suite, la courbe, en p points, pourront être considérées de $\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}$ façons comme sécantes quadruples de la courbe.

On devra donc avoir

$$\psi(3p) = 27\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4},$$

ce qu'il est facile de constater en remplaçant (XII), dans $\psi(m)$, m par $3p$ et h_m par $3p(p-1)$ (*).

(*) M. Zeuthen, de Copenhague, nous a communiqué un mémoire dont il est l'auteur (*Annali di matematica*, 1870), dans lequel il démontre également les formules suivantes relatives aux courbes gauches :

$$\varphi(m) = (m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right],$$

$$\psi(m) = \frac{1}{2}h_m(h_m - 4m + 11) - \frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

Suivant toute justice, nous nous empressons de lui restituer la priorité.

Sur un genre particulier de surfaces dont on peut intégrer les lignes géodésiques; par M. Laguerre.

(Séance du 11 juin 1873)

Si l'on considère les surfaces pour lesquelles l'élément de longueur est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u},$$

on vérifie aisément que leurs lignes géodésiques sont données par l'équation

$$\frac{\cos^3 i}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sin^3 i}{\sqrt{u^3}} = \text{const.},$$

i désignant l'angle que fait la ligne géodésique avec la courbe $v = \text{const}$

Question de probabilité; par M. Camille Jordan.

(Voir la page 257)

Problème. — *Trouver la probabilité pour que quatre points pris au hasard sur une sphère forment un quadrilatère sphérique convexe.*

La solution de cette question doit être rectifiée comme il suit, d'après une remarque de M. Bienaymé.

Soit T le triangle sphérique formé par les trois points A, B, C. Les arcs de grand cercle qui les joignent étant prolongés découpent la sphère en 8 triangles. Si le quatrième point D tombe dans le triangle T ou dans l'un des trois autres triangles opposés à celui-là par le sommet, le quadrilatère ABCD aura un angle $> \pi$. La chance que ce cas se présente est $\frac{1}{2}$.

Si D tombe dans le triangle symétrique de T, le quadrilatère aura deux angles $> \pi$. La probabilité de ce cas sera $\frac{T}{S}$, S étant la surface totale de la sphère. Mais à chaque triangle sphérique T sont associés 7 autres

triangles dont l'ensemble forme la sphère entière. Donc la valeur moyenne de T est $\frac{S}{8}$; ce qui donnera comme chance moyenne $\frac{1}{8}$.

Il restera donc une chance égale à $\frac{3}{8}$ pour le quadrilatère convexe.

FIN DU TOME PREMIER

TABLE DES MATIÈRES

État de la Société au 31 janvier 1873 5
Statuts de la Société 8
Règlement administratif 9

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

Séance du mercredi 6 novembre 1872 15
Séance du mercredi 20 novembre 1872 16
Séance du mercredi 4 décembre 1872 16
Séance du mercredi 18 décembre 1872 17
Séance du mercredi 8 janvier 1873 17
Séance du mercredi 22 janvier 1873 76
Séance du mercredi 5 février 1873 76
Séance du mercredi 19 février 1873 76
Séance du mercredi 5 mars 1873 120
Séance du mercredi 19 mars 1873 120
Séance du mercredi 2 avril 1873 121
Séance du mercredi 16 avril 1873 148
Séance du mercredi 30 avril 1873 149
Séance du mercredi 14 mai 1873 150
Séance du mercredi 28 mai 1873 249
Séance du mercredi 11 juin 1873 249
Séance du mercredi 25 juin 1873 250
Séance du mercredi 9 juillet 1873 250
Séance du mercredi 23 juillet 1873 250

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate; par M. Émile Weyr 18
Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre; par M. Halphen 19
Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner; par M. Laguerre 21
Sur la construction des courbes du 5me et du 6me ordre à points multiples; par M. Kœhler. 27
Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre; par M. Laguerre 31

Sur une question de probabilités; par M. E. Lemoine. 59
Sur la limite de transitivité des groupes non alternés; par M. Camille Jordan. 40
Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace; par M. Laguerre. 71
Sur quelques théorèmes d'arithmétique; par M. Laguerre. 77
Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées; par M. Flye-Sainte-Marie. . . . 82
Sur un dodécaèdre antique, conservé au musée du Louvre; par M. le comte L. Hugo. . 83
Théorème nouveau sur les factorielles; par M. Désiré André. 84
Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés; par M J. Bourget 87
Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe; par M. Laguerre. 101
Extrait d'une lettre adressée à M. Chasles par M. le Dr O. J. Broch. 104
Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace; par M. A. Mannheim. . 106
Sur le mouvement d'une droite; par M. Halphen. 114
Sur les sections planes des cônes circulaires obliques; par M. de Pistoye 117
Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques; par M. Fouret. 122
Sur les réseaux de courbes planes; par M. Kœhler 124
Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. Halphen 130
Sur la résolvante des deux équations du second degré; par M. de Saint-Germain. . . . 142
Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace; par M. Camille Jordan . . 144
Sur la courbe balistique; par M. Allégret. 150
Sur le lieu des points d'un système invariable, mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes; par M. V. Liguine. . . 152
Sur un théorème de Poncelet et sa généralisation par M. Horvarth; par M. H. Resal. . 155
Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la mécanique analytique; par M. Émile Mathieu 157
Mémoire sur les groupes primitifs; par M. Camille Jordan. 175
Sur un problème de probabilités; par M. Halphen. 221
Démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson; par M. H. Brocard 224
Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. Halphen. 226
Mémoire sur la géométrie de la sphère; par M. Laguerre. 241
Note historique sur le problème des engrenages cylindriques; par M. V. Liguine. . . . 251
Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites; par M. Halphen. 253
Questions de probabilités; par M. Camille Jordan 256
Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface; par M. Fouret. 258
Sur les courbes gauches algébriques; surface engendrée par les sécantes triples; nombre des sécantes quadruples; par M. Picquet. 260
Sur un genre particulier de surfaces dont on peut intégrer les lignes géodésiques; par M. Laguerre. 281
Question de probabilité; par M. Camille Jordan. 281

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

COMITÉ DE RÉDACTION

BRISSE (Ch.)
JORDAN (Camille)
LAGUERRE
LEVY (Maurice)
MANNHEIM
SARRAU

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES

TOME DEUXIÈME — ANNÉE 1873-74

PARIS

AU SIÉGE DE LA SOCIÉTÉ

RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1874

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 JANVIER 1874

(Les initiales S. P. désignent les sociétaires perpétuels)

ACHARD (Marc), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
ALLÉGRET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont.
ANDRÉ (Désiré), agrégé de l'Université, à Paris.
ANTOINE (Ch.), ingénieur de la Marine, à Brest.
AOUST (L'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, à Paris.
BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BAILLAUD, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
BAILLOUD, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, à Paris.
BARBIN (H.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Lillers (Pas-de-Calais).
BEAUMONT (Élie de), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, à Paris
BERTRAND (Joseph), membre de l'Institut, à Paris.
BERTRAND (Marcel), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
BEYNAC, professeur de Mathématiques, à Paris.
BÉZIER (E.), professeur au lycée de Vendôme.
BIENAYMÉ (Alexis), capitaine du Génie, à Versailles.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, à Brest.
BIENAYMÉ (J.), membre de l'Institut, à Paris.
BLEYNIE (Martial), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à Paris.
BOUCHÉ (A.), ancien élève de l'École Normale, directeur de l'École préparatoire d'Angers.
BOUFFET (M.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne.
BOULANGER, professeur de Mathématiques, à Paris.
BOURGET, agrégé de l'Université, à Paris.
BRISSE (A.), ingénieur en chef du desséchement du lac Fucino (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
BROCARD, capitaine du Génie, à Alger. S. P.
BRUNET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
CAHEN, sous-lieutenant du Génie, à l'École de Fontainebleau.
CATALAN, professeur à l'Université de Liége (Belgique).
CATINEAU (H.), chef d'escadrons d'Artillerie en retraite, à Châtellerault.
CHARLON, directeur de *la Confiance*, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, à Paris. S. P.
CHEVALLIER, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
CIVIALE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.

CLAVEUX, sous-intendant de 1re classe, à Versailles.
COLLET, professeur au lycée de Vesoul.
COLLIGNON (Éd.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
COMBETTE, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
CONINCK (Gustave de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Dinan.
CORNU (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
COURCELLES (C.), professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
CUVINOT, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Mantes.
DARBOUX, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.
DESBOVES, professeur au lycée Condorcet, à Paris.
DESCHAMPS, capitaine d'Artillerie, à Paris.
DESQ (L.), lieutenant au 24e régiment d'Artillerie, à Marseille.
DEWULF (Ed.), commandant du Génie, aux îles d'Hyères.
DIDION (Général), membre correspondant de l'Institut, à Nancy.
DOSTOR (G.), docteur ès sciences, à Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).
DURRANDE (H.), professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Nîmes.
FITREMANN, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
FLORENTIN, capitaine d'Artillerie, à Paris.
FLYE SAINTE-MARIE (C.), capitaine d'Artillerie, à Paris.
FONTÈS (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saint-Amand-du-Cher.
FOURET (G.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
FOURNIER (V.), ingénieur civil, à Paris.
GARIEL (M.-C.), professeur à l'École de Médecine, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire, à Paris. S. P.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, professeur de Mathématiques, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à la Havane.
GODART, directeur de l'institution Monge, à Paris.
GOFFART (M.), professeur de Mathématiques, à Paris.
GOURNERIE (de la), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Paris.
GRAINDORGE (J.), docteur ès sciences, à Liége.
GROS, professeur de Mathématiques, à Paris.
HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
HALPHEN (G.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
HATON DE LA COUPILLIÈRE, ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
HATT (Ph.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HENRY (P.), lieutenant au 7e régiment d'Artillerie, à Rennes.
HÉRAUD (G.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HERMARY, capitaine au 25e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
HILAIRE, professeur au lycée de Douai.
HOUBIGANT (J.), chef de bataillon du Génie en retraite, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, à Paris.
HUYOT (E.), ingénieur des Mines, à Paris.
JACOMET (Ch.), inspecteur des Lignes télégraphiques, à Clermont.
JACQUIER (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Brive.
JANIN, capitaine au 13e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, à Paris.
JAÏ (Aimé), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
JORDAN (C.), ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau.
JULLY, chef d'Institution, à Paris.
KŒHLER, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
KRETZ, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.

LAFFON DE LADÉBAT (Vice-amiral), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
LAGUERRE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAISANT, capitaine du génie, à Tours.
LAURENT (H.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAUTH, manufacturier à Thann (Alsace).
LAX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.
LEFFLER (Dr Mittag), professeur à l'Université d'Upsal (Suède).
LEHR, élève à l'École des Hautes études de la Faculté des Sciences de Marseille.
LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, à Paris.
LEMOINE (E.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LE VERRIER, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LÉVY (Albert), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LEVY (Maurice), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LÉVY (Théodore), ingénieur, à Paris.
LIGUINE, professeur à l'Université d'Odessa (Russie).
LUCAS (F.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
MALEYX (L.), professeur au Collége Stanislas, à Paris.
MANNHEIM (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
MAREL, colonel d'État-major en retraite, à Alger.
MARGERIE, sous-directeur de l'institution Monge, à Paris.
MARIE (Maximilien), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
MARSILLY (Général de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Auxerre.
MATHIEU, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.
MICHELET, ingénieur civil, à Paris.
MIGNON (A.), capitaine au 6e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (G. de), lieutenant du Génie, à Paris.
MOREL (A.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
MOUTARD (Th.), ingénieur des Mines, à Paris.
MOUTIER, ancien élève de l'École Polytechnique, à Lyon.
NICOLAÏDÈS, professeur à l'Université d'Athènes.
OVIDIO (Enrico d'), professeur à l'Université de Turin (Italie).
PAINVIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, à Paris.
PARMENTIER (Th.), colonel du Génie, à Paris.
PARRAN (A.), ingénieur des Mines, à Paris.
PERCIN (A.), capitaine d'Artillerie, à Brest.
PERRIER, capitaine d'État-Major, à Paris.
PERRIN, ingénieur des Mines, à Paris.
PHILIPPE, ingénieur, à Corbeil.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences de Paris.
PICART (A.), député à l'Assemblée nationale, à Versailles.
PICQUET (H.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
PISTOYE (L. de), capitaine d'Artillerie, à Tarbes.
PLOCQ (A.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Dunkerque.
PLOIX (Edmond), ingénieur hydrographe, à Paris.
POIREL (V.), inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, à Rosières-aux-Salines (Meurthe-et-Moselle).
POLIGNAC (Camille de), à Paris. S. P.
POUILLET (J.), professeur à l'École normale de Cluny.
PROTCHE (F.-A.), commandant en second de l'École Polytechnique, à Paris.
PUTZ (H.), chef d'escadrons d'Artillerie, à Paris.
RADAU (R.), à Paris.
RENAN, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
RESAL, membre de l'Institut, à Paris.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RITTER (F.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Niort.
RODET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.

ROLLAND, membre de l'Institut, à Paris.
ROLLIER, inspecteur général de l'Université, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, à Paris.
ROUCHÉ (E.), professeur à l'École Centrale, à Paris.
ROUSSELIN (A.), professeur au lycée de Douai.
ROUX (François), architecte, à Paris.
SAINTE-CLAIRE-DEVILLE (Charles), membre de l'Institut, à Paris.
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, à Paris.
SAINT-GERMAIN (A. de), docteur ès sciences, à Paris.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
SALTEL, professeur de Mathématiques, à Saint-Germain.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Senlis.
SCHÖNDORFFER, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
SCRIVANOFF (Grégoire), étudiant à l'Université de Saint-Pétersbourg.
SERRET (J.-A.), membre de l'Institut, à Paris.
SERRET (Paul), docteur ès sciences, à Paris.
SIMON (Ch.), professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris.
SIVERING, ingénieur en chef des Travaux publics, à Luxembourg.
SOMMIER (C.), censeur des études au lycée de Nevers.
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STUDNICKA, professeur à l'Université de Prague.
TANNERY, directeur des travaux du magasin des Tabacs, à Bergerac
TARATTE (E.), agrégé de l'Université, à Évreux.
TARBOURIECH, agrégé de l'Université, à Paris.
TERRIER, professeur à l'Académie de Neuchâtel (Suisse).
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
TISSERAND, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
TOURNEUR (Paul), ingénieur, à Marnaval (Haute-Marne).
TRESCA (É.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Pontivy.
TURQUAN, docteur ès sciences, à la Chapelle Saint-Mesmin (Loiret).
VACQUANT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
VINTÉJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur au lycée d'Alger.
WELSCH, lieutenant d'Artillerie, à Saint-Omer.
WEYR (Edouard), étudiant à l'Université de Prague.
WEYR (Dr Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague.
WICKERSHEIM, élève-ingénieur des Mines, à Paris.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 5 NOVEMBRE 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Le secrétaire donne communication d'une lettre du secrétaire de l'Académie des sciences de Prague, qui accepte le *Bulletin* en échange de ses *Publications*.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. A. Brisse, ingénieur en chef du desséchement du lac Fucino, à Avezzano (Italie) ; Janin, capitaine d'artillerie, à Vincennes.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. le comte Léopold Hugo fait hommage à la Société d'un volume relatif à la statistique des chemins de fer.

SÉANCE DU MERCREDI 19 NOVEMBRE 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Fitremann, agrégé de l'Université, à Paris ; Édouard Weyr, étudiant à l'Université de Prague.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

Le secrétaire communique à la Société une note de l'archiviste, annonçant l'ouverture de la bibliothèque.

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur les points doubles d'une courbe de quatrième classe.*

M. Camille Jordan communique à la Société un *Mémoire sur les formes bilinéaires.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication relative à l'emploi du tétraèdre chez les anciens, comme objet d'ornementation.

SÉANCE DU MERCREDI 3 DÉCEMBRE 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Camille Jordan communique à la Société une note *Sur les polynômes bilinéaires.*

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur les limites des racines d'une équation algébrique.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur les points singuliers des courbes planes algébriques.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication relative à l'emploi du tétraèdre chez les Étrusques.

SÉANCE DU MERCREDI 17 DÉCEMBRE 1873

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

M. Darboux fait hommage à la Société du *Bulletin des sciences mathématiques.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. le docteur Gösta Mittag-Leffler, professeur à l'Université d'Upsal.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Painvin communique à la Société une note *Sur les conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe donnée, un contact d'ordre déterminé.*

M. Maurice Levy communique à la Société une note *Sur une réduction de l'équation à différences partielles du troisième ordre, qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal.*

M. Fouret communique à la Société une *Démonstration nouvelle du théorème de Bezout, pour le cas de deux équations algébriques à deux inconnues.*

M. Camille Jordan fait à la Société une communication *Sur une forme particulière qu'on peut donner aux formules de Delambre.*

M. de Saint-Germain communique à la Société une note *Sur le facteur constant dans l'expression de* $\Theta(x)$ *en produit illimité.*

M. Halphen communique à la Société une *Note relative aux points singuliers.*

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur les couples de surfaces applicables.*

M. Moutard fait à la Société une communication *Sur la transformation par orthogonalité des éléments linéaires correspondants.*

M. Ribaucour présente quelques observations à la suite de la communication précédente.

M. Gros fait hommage à la Société d'un exemplaire de sa *Théorie du baguenaudier*, enrichi de tables numériques manuscrites.

M. le comte Léopold Hugo fait hommage à la Société de ses divers ouvrages sur les cristalloïdes.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. Halphen (*).

(Séance du 19 mars 1873)

TROISIÈME PARTIE

I. — DES SYSTÈMES DE CONIQUES DANS L'ESPACE.

Pour déterminer une conique dans l'espace, 8 conditions sont nécessaires. Les coniques qui satisfont à 7 conditions communes forment un *système*. M. Chasles a consacré à l'étude de ces systèmes un travail inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXI, p. 389. Il y fait remarquer, tout d'abord, que la perspective plane d'un système de coniques de l'espace est un système plan de coniques. Les deux caractéristiques de ce dernier marquent le nombre des coniques, du système de l'espace, *qui rencontrent une droite* ou *touchent un plan*. Les droites-coniques du système plan sont, les unes, les perspectives des droites-coniques du système de l'espace; les autres, les perspectives des coniques propres dont le plan passe par l'œil. Le nombre de ces dernières doit encore, d'après M. Chasles,

(*) Voir, pour la deuxième partie, t. I, p. 226.

être considéré comme une caractéristique du système de l'espace : c'est la classe de la surface développable enveloppée par les plans des coniques du système. Ce nombre ne marque pas la valeur totale des droites-coniques du système plan qui sont la perspective de ces coniques de l'espace. Je montrerai, en effet, qu'il en est précisément la moitié. Cette proposition, très-simple à établir par l'application des principes posés dans la 1re partie de ce mémoire, me permettra de trouver, pour les systèmes de coniques de l'espace, un théorème analogue à celui de M. Chasles relativement aux systèmes plans. Ce théorème est entièrement nouveau ; car l'état actuel de la question ressort très-clairement des lignes suivantes, empruntées au travail de M. Chasles, cité plus haut : « *En énonçant ici quelques propriétés générales des systèmes de coniques, qui s'expriment par une fonction linéaire des nombres qui caractérisent le système, nous n'entendons pas induire à penser qu'il doive toujours en être ainsi, comme cela a lieu dans la théorie des coniques sur le plan, pour les deux nombres que nous avons appelés les* caractéristiques *du système* (*). »

Cette proposition, que l'illustre créateur de la théorie des caractéristiques n'a pas cru devoir énoncer, est cependant exacte; et l'on peut dire que :

Dans un système de coniques de l'espace, μ étant le nombre de celles qui rencontrent une droite, ν le nombre de celles qui touchent un plan, ρ le nombre de celles dont le plan passe par un point; $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho$ est le nombre de celles qui satisfont à une condition indépendante du système, les nombres α, β, γ ne dépendant que de cette condition.

Je vais démontrer, tout d'abord, que, ainsi que je l'ai annoncé plus haut, ***dans un système plan, perspective d'un système de l'espace, une droite-conique, perspective d'une conique dont le plan passe par l'œil, a pour valeur le nombre 2.***

Soit Q un plan fixe, O un point dans ce plan, m et m' les points où une conique C du système rencontre le plan Q. Quand la conique C varie, les droites Om et Om' forment deux faisceaux se correspondant, de telle manière qu'à une droite de l'un des faisceaux correspondent μ droites de l'autre. Deux droites correspondantes coïncident : 1° si la conique touche le plan Q; 2° si la conique C se réduit à une droite-conique; 3° si son plan passe au point O. Par conséquent, si ν et ω sont les nombres des coïncidences dues aux deux premiers cas, $2\mu - \nu - \omega$ est celui des coïncidences dues au troisième. Je vais montrer que ce dernier nombre est aussi égal à 2ρ.

Soient, en effet, M et M' les deux points, en ligne droite avec O, en lesquels rencontre Q une conique C du système dont le plan passe en O. Construisons une courbe plane (A) dont les coordonnées x, y soient les tangentes des

(*) *Loc. cit.*, p. 394.

angles que font avec cette droite OM deux droites correspondantes Om, Om'. Cette courbe passe à l'origine des coordonnées. Comme, de plus, il n'y a, en outre de la conique C, que $\mu - 2$ coniques du système qui rencontrent OM, chacun des deux axes de coordonnées a 2 de ses points d'intersection avec (A) confondus à l'origine. Déterminons les tangentes en ce point. Soit B le point où la droite MM′ touche l'enveloppe des droites mm'. On voit bien aisément que les tangentes x et y des angles que font avec OM deux droites Om, Om', correspondantes et infiniment voisines de OM, OM′, sont liées par la relation : $\frac{x}{y} = \frac{OM'}{OM}\frac{CM}{CM'}$. Il en résulte, comme le point est quelconque sur le plan Q, que ce rapport a une valeur quelconque, et que l'origine des coordonnées est un point double de la courbe A, où les tangentes, symétriques par rapport à la bissectrice des axes, font des angles quelconques avec les axes. Par suite, le point O absorbe 2 points d'intersection de la courbe (A) avec la bissectrice des axes. Donc la droite OM compte pour 2 couples de droites correspondantes confondues. Il en est de même des autres droites analogues, passant par les couples de points m, m' appartenant aux $\rho - 1$ autres coniques, dont les plans contiennent le point O. Donc le nombre des coïncidences absorbées par ces droites est égal à 2ρ. On a donc enfin : $2\mu - \nu - \omega = 2\rho$.

Cette relation démontre la proposition annoncée. Mais il ne sera pas inutile de donner une autre démonstration, grâce à laquelle on verra plus nettement que ω est bien la valeur totale des droites-coniques du système plan, perspectives de droites-coniques.

Si l'on cherche les coniques du système de l'espace, telles que les deux droites Om, Om', menées du point O aux points d'intersection d'une même conique avec le plan Q, forment un faisceau harmonique avec deux droites On, On', on les trouve par les points d'intersection de la courbe (A) avec une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des x et des y, et dont le centre est sur la bissectrice de ces axes. On a ainsi 2μ points d'intersection des deux courbes, qui répondent à μ coniques du système. Si l'une des droites On coïncide avec Om, l'hyperbole passe à l'origine des coordonnées, qui compte alors pour 2 points d'intersection des deux lignes. On en conclut donc que la conique C, qui passe aux points M et M′, compte pour 1 conique du système satisfaisant à la question. Par suite, si la droite On est donnée infiniment voisine de Om, il existe *une seule* conique du système, qui coupe le plan Q en deux points m et m' infiniment voisins de On.

Faisons la perspective du système, en plaçant l'œil en O. Soit P le plan de la conique C, et D la trace de ce plan sur le tableau. D est la droite-conique, perspective de C. D'après ce qui vient d'être dit, si l'on considère un segment, situé sur la trace du plan Q, et dont une extrémité soit infiniment

voisine de D, il y a *une seule* conique du système infiniment aplatie qui divise harmoniquement ce segment. Pour avoir la valeur de la droite-conique D, il faut, d'après les principes posés plus haut (1re partie, p. 136), placer l'extrémité de ce segment à distance infiniment petite du 1er ordre de D, et chercher quel est l'ordre du carré du segment intercepté par la conique infiniment aplatie. Or x et y étant, comme plus haut, les tangentes des angles que font avec OM les droites Om, Om', correspondantes, on a vu que si ces variables sont infiniment petites, leur rapport est un nombre quelconque. Par suite, la conjuguée harmonique d'une droite On' arbitraire du plan Q, par rapport à ces deux droites Om, Om', infiniment voisines de OM, fait, avec OM, un angle du même ordre que x et y. Par suite, dans le système plan, une conique infiniment aplatie, voisine de D, intercepte sur la droite donnée un segment du même ordre que la distance de l'extrémité de cette droite à D. Cette dernière distance étant du 1er ordre, le carré du segment est du 2me ordre ; et la droite-conique D a le nombre 2 pour valeur. Donc, si ω est la valeur totale des droites-coniques du système plan, perspectives de droites-coniques, la valeur totale de toutes ses droites-coniques est $\omega + 2\rho$. On a donc

$$\nu = 2\mu - 2\rho - \omega.$$

Passons maintenant à la recherche du nombre des coniques d'un système de l'espace, qui satisfont à une condition simple.

Soit Σ une surface du 2me ordre, passant par l'œil O. Pour chaque conique C du système proposé, construisons les a coniques B qui satisfont à la condition donnée et passent aux quatre points d'intersection de C et de Σ. Nous formons ainsi un second système (B), dont chaque conique correspond à une conique du système proposé (C). Soient L et L′ les deux droites de la surface Σ passant en O. Sur la droite d'intersection du plan de deux coniques B et C correspondantes et du plan des droites L et L′, ces deux coniques et ces deux droites déterminent une involution. Par suite, si l et l' sont les tracés des droites L et L′ sur le tableau, les coniques b et c, perspectives des coniques B et C, déterminent, avec les points l et l', une involution sur la droite ll'.

Par suite, les indicatrices, relatives à la droite ll', des deux systèmes (c) et (b), perspectives des systèmes (C) et (B) se correspondent de la manière définie au théorème III (1re partie, p. 133). A chaque point de l'indicatrice de (c) correspondent a points de l'indicatrice de (b), situés sur la droite qui joint le premier au point fixe, qui représente les deux points l et l'. De plus, l'indicatrice de (b) passe en ce point fixe. Il existe, en effet, des coniques B situées sur la surface Σ, et rencontrant, par conséquent, les deux droites L et L′. Car les plans des coniques C déterminent, par leurs intersections avec Σ, un système de coniques, dont il existe un nombre fini satisfaisant à la condition donnée.

Si donc n est le nombre de ces coniques, l'indicatrice du système (b) a le point fixe pour point multiple d'ordre n. Par suite, d'après le théorème III, le nombre des couples de points correspondants des deux indicatrices, qui sont confondus, est $a\mu + n$, puisque μ est le degré de l'indicatrice du système (c) (1re partie, p. 134). Donc, si l'on retranche de ce nombre, $a\mu + n$, le nombre des couples de points correspondants confondus, afférents aux droites-coniques communes aux deux systèmes, on aura le nombre cherché des coniques propres communes à ces systèmes.

Désignons par b, comme plus haut (p. 140), le nombre des coniques infiniment aplaties satisfaisant à la condition donnée, et passant en quatre points d'un même plan, formant deux couples de points infiniment voisins. Les droites-coniques du système (c), perspectives des droites-coniques du système (C), auront chacune, parmi leurs correspondantes, b coniques infiniment aplaties; et, d'après le raisonnement fait plus haut (p. 141), ces droites-coniques absorberont $b\omega$ coniques communes aux deux systèmes.

En second lieu, à chaque conique du système (C), dont le plan passe par l'œil, correspondent a coniques du système (B), situées dans le même plan. Par suite, les droites-coniques du système (c), perspectives de coniques propres, absorbent $2a\rho$ coniques communes aux deux systèmes.

Donc le nombre des coniques cherchées est : $a\mu + n - b\omega - 2a\rho$. Il s'agit maintenant de déterminer le nombre n, qui est celui des coniques du 2me ordre, dont les plans sont tangents à une développable de classe ρ, et qui satisfont à la condition donnée.

Les coniques, qui satisfont à la condition donnée et sont sur une surface du 2me ordre donnée, contiennent *deux* arbitraires. Leurs plans enveloppent donc une surface. Soit c la classe de cette surface. Il y a $c\rho$ plans tangents communs à cette surface et à la développable de classe ρ. Donc le nombre n est égal à $c\rho$.

On a donc enfin, en tenant compte de la valeur de ω et de celle de n, pour le nombre N cherché :

$$N = (a - 2b)\mu + b\nu + (2b + c - 2a)\rho = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho,$$

ce qui est l'expression du théorème annoncé plus haut.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que les nombres α et β sont ici les mêmes que ceux qui figurent dans l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ du nombre des coniques qui satisfont à la condition donnée, et font partie d'un système plan.

II. — DROITES-CONIQUES DANS LES COMPLEXES DE L'ESPACE.

Pour déterminer une conique dans l'espace, 8 conditions sont nécessaires. Les coniques qui satisfont à 7 conditions données forment un *système;* à

6 conditions, un *complexe du* 6me *ordre*; ...; à n conditions, un *complexe du* n^{me} *ordre*.

Les coniques d'un complexe d'ordre n contiennent $8-n$ arbitraires; celles d'entre elles qui ont un axe d'une grandeur donnée contiennent $7-n$ arbitraires. La grandeur d'un axe étant donnée, on peut, pour définir une conique, considérer la position de l'autre axe et des sommets situés sur cet axe, et le plan de la courbe. Ces éléments contiennent $7-n$ arbitraires dans un complexe d'ordre n. Il en est de même si la grandeur donnée d'un axe est nulle. Ainsi les droites-coniques d'un complexe d'ordre n contiennent $7-n$ arbitraires dans la définition de leur position, de leurs sommets, et de leur plan.

Dans un complexe du 1er ordre, les coniques qui sont sur un plan y constituent un complexe plan du 1er ordre. Les droites-coniques de 1re espèce de tous les complexes plans analogues seront les droites-coniques de 1re espèce du complexe de l'espace; et de même celles de 2me espèce des complexes plans seront celles de 2me espèce du complexe de l'espace. On en conclut aisément que les droites-coniques de 1re espèce sont celles où les sommets sont arbitraires, et qui ne contiennent que 4 indéterminées dans leur position et celle de leur plan. Elles coïncident donc avec toute droite de l'espace, et, dans ce cas, le plan de chacune d'elles est déterminé; ou bien elles forment un complexe de droites (droites assujetties à une condition), et le plan de chacune d'elles est indéterminé. Les droites-coniques de 2me espèce coïncident avec toute droite de l'espace, le plan de chacune d'elles est indéterminé, et ses deux sommets contiennent une arbitraire.

En général, dans un complexe du n^{me} ordre, on distinguera 3 espèces de droites-coniques, de la manière suivante : une droite-conique est une figure formée d'une droite terminée à deux extrémités ou sommets, et d'un plan passant par cette droite. Cette figure contient, dans un complexe du n^{me} ordre, $7-n$ arbitraires. La 1re espèce de droites-coniques est celle qui est composée de telles figures où la droite et le plan contiennent seulement $5-n$ arbitraires : les sommets y sont arbitraires. La 2me espèce est composée de figures où la droite et le plan contiennent $6-n$ arbitraires; les sommets contiennent une arbitraire. Dans la 3me espèce, la droite et le plan contiennent $7-n$ arbitraires, et les sommets sont déterminés.

Dans un complexe du 6me ordre, il n'y a que deux espèces de droites-coniques, la 2me et la 3me. Enfin, pour la régularité des expressions, nous devrons considérer les droites-coniques d'un système comme de 3me espèce.

D'un complexe de coniques, on peut, d'une infinité de manières, déduire d'autres complexes d'ordre moindre qui comprennent le proposé.

Par les points d'intersection d'une conique A et d'une surface du 2me ordre Σ, faisons passer des coniques B. Supposons que la conique A varie dans toute l'étendue d'un complexe (A) d'ordre i; les coniques B engendrent

alors un complexe (B), d'ordre $i-1$. Ce dernier a pour droites-coniques celles de (A), et, en outre, les cordes de contact des coniques A bitangentes à Σ. On voit aisément que ces dernières, avec leurs plans, contiennent $6-i$ arbitraires, c'est-à-dire qu'elles forment une suite de droites-coniques de 1re espèce de (B). Dans cette suite sont comprises les droites-coniques de 1re espèce de (A). Les droites-coniques de 2me espèce de (A) forment une autre série distince de droites-coniques de 1re espèce de (B); enfin les droites-coniques de 3me espèce de (A) forment des droites-coniques de 2me espèce de (B). Ainsi le complexe (B) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2me espèce. Si (A) est dans le même cas, (B) ne contient plus de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce.

Par les 4 points (σ) d'intersection d'une conique B avec la surface Σ, il ne passe, en général, qu'une conique A. Par suite, les deux points (p), où une conique A rencontre un plan fixe P, sont déterminés d'une seule manière par les points (σ) où elle coupe la surface Σ. Pour exprimer algébriquement cette dépendance entre les points (p) et les points (σ), remarquons que, les points (σ) étant donnés, la position des points (p) est définie si l'on donne la distance δ du milieu de leur segment au point où l'intersection du plan des points (σ) et du plan P rencontre une droite fixe du plan P. La distance δ et la condition que les points (p) et (σ) soient sur une même conique déterminent, en effet, d'une seule manière le couple de points (p). Il existe donc, entre δ et les variables définissant la position des points (σ), une relation du 1er degré en δ, c'est-à-dire de la forme $v\delta - u = 0$, v et u étant des fonctions des variables définissant les points (σ). Il est clair qu'on peut supposer que u et v ne sont pas constamment nuls lorsqu'on assigne aux points (σ) toutes les positions compatibles avec le complexe (A); car, si cela était, on pourrait substituer à la relation $v\delta - u = 0$ une autre relation de même forme, où ce fait n'arriverait pas. Si l'on joint à cette relation les $i-1$ relations $w = 0$ qui ont lieu entre les 7 arbitraires définissant la position des points (σ), on a toutes les équations de condition définissant le complexe (A). Les $i-1$ équations telles que $w = 0$ définissent le complexe (B); et, en général, n équations, n'ayant lieu qu'entre les arbitraires des points (σ), définissent un complexe d'ordre n, tel que, par chaque groupe de points (σ), passent une infinité de coniques du complexe. En d'autres termes, ce complexe peut être considéré comme déduit d'un complexe d'ordre $n+1$, de la même façon que B est déduit de (A).

La relation $v\delta - u = 0$ définit un complexe du 1er ordre (K_1), qui contient le complexe du 2me ordre (K_2), défini par les relations $v = 0$, $u = 0$.

Les deux complexes (B) et (K_1), d'ordre $i-1$ et 1, ont en commun le complexe (A) d'ordre i. Mais, en général, ils ont en commun, en outre, un autre complexe du même ordre. Pour que deux coniques B et K_1 coïncident, il faut, comme on le reconnaît immédiatement, qu'elles coïncident avec

une conique A, ou qu'elles appartiennent au complexe (K_2). Donc, si le complexe (A) ne comprend pas toutes les coniques communes à (B) et à (K_1), il faut que les deux complexes (B) et (K_2) aient en commun un complexe d'ordre i, ou d'ordre inférieur. Ce dernier cas ne saurait avoir lieu : il faudrait, en effet, pour qu'il eût lieu, que les deux équations $v = 0$, $u = 0$ rentrassent dans le système des équations $w = 0$, c'est-à-dire que v et u fussent nuls; dès que les points (σ) satisfont aux équations $w = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite plus haut.

Si la surface Σ est quelconque, il y a effectivement un complexe autre que (A) commun à (B) et à (K_1). Il suffit, pour le prouver, de montrer qu'il existe des coniques communes à ces deux complexes, qui n'appartiennent pas à (A). Or on en obtient en prenant celles qui satisfont aux relations $w = 0$ et $u = 0$, $v = 0$. Donc les complexes (B) et (K_2) ont effectivement en commun un complexe (A'), d'ordre i. C'est-à-dire que les $i + 1$ équations $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, ... se réduisent à i équations, qui n'ont lieu qu'entre les coordonnées des points (σ).

Le complexe (A'), défini de cette façon, peut être considéré comme déduit d'un complexe (A_1), de l'ordre $i + 1$, de la même manière que (B) est déduit de (A). Par conséquent, (A') ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce. On peut donc énoncer la proposition suivante :

A tout complexe de coniques, d'ordre i, on peut joindre un autre complexe du même ordre ne contenant pas de droites-coniques de 3me espèce, et tel que l'ensemble de ces deux complexes constitue le complexe complet commun à deux complexes séparés du 1er ordre et d'ordre i — 1.

Mais on peut aller plus loin et déduire, d'une manière analogue, du complexe (A') un autre complexe du même ordre qui ne contienne de droites-coniques ni de la 3me, ni de la 2me espèce.

D'un complexe (C) d'ordre j, on peut déduire un complexe (D) d'ordre $j - 2$, qui contienne (C), en imposant aux coniques D de rencontrer une surface du 2me ordre Σ en 3 points par où l'on puisse mener une conique C. Il est très-aisé de voir que la plus haute espèce des droites-coniques de (C) est la 1re ; c'est-à-dire que chaque droite-conique de ce complexe, avec son plan, ne contient pas plus de $5 - (j - 2)$ arbitraires.

Par 3 points (σ) d'intersection d'une conique C avec Σ, il ne passe pas, en général, d'autre conique du complexe (C), en sorte que le 4me point σ_1 est déterminé d'une seule manière par les 3 autres. Ce 4me point peut être défini par la condition d'être dans le plan des 3 autres et par une coordonnée qui, cette condition remplie, le détermine d'une seule manière. Cette coordonnée sera, si l'on veut, la position du point où la génératrice rectiligne de Σ, passant en σ_1, rencontre une directrice rectiligue fixe de cette surface. Cette coordonnée x sera donc liée aux arbitraires des 3 autres points

par une relation telle que $tx - s = 0$, où t et s ne contiennent que les coordonnées de 3 points (σ).

Si l'on applique ces résultats aux complexe (A_1), on voit que la relation $tx - s = 0$, jointe au complexe (D), définit le complexe (A'). Les équations qui définissent le complexe (D) sont $i - 1$ équations telles que $z = 0$, z ne contenant que les coordonnées de 3 points (σ), situés sur la surface Σ. On conclura, comme plus haut, que le complexe commun à (D) et au complexe (K'_1), défini par $tx - s = 0$, se compose du complexe (A') et d'un complexe (A'') de même ordre i, et défini par les relations $t = 0$, $s = 0$, $z = 0 \ldots$, au nombre de $i + 1$, qui se réduisent à i relations entre les coordonnées de 3 points (σ). Par suite, (A'') se déduit d'un complexe d'ordre $i + 2$, comme (D) de (C). Donc ce complexe (A'') ne contient pas de droites-coniques de 3me, ni de 2me espèce.

On peut représenter cette dépendance des complexes ci-dessus de la manière suivante : (A) et (A') constituant le complexe complet commun à (B) et (K_1), on écrira

$$(A) + (A') = (B, K_1),$$

et de même

$$(A') + (A'') = (D, K'_1);$$

d'où

$$(A) + (D, K'_1) = (A'') + (B, K_1).$$

En considérant une conique comme un élément de l'espace, ainsi que Plücker l'a fait pour la ligne droite, on peut désigner les coniques, en nombre fini ou infini, communes à deux complexes, comme l'*intersection* de ces complexes. L'ensemble de *toutes* les coniques communes à deux complexes sera dite l'*intersection complète* de ces complexes. Avec ces définitions, la relation ci-dessus peut être énoncée de la manière suivante :

Théorème I. — *A tout complexe de coniques, d'ordre i, on peut joindre l'intersection complète de deux complexes d'ordre 1 et i — 1, tels que l'ensemble de ces deux complexes, d'ordre i, se compose de l'intersection complète de deux complexes d'ordre 1 et i — 1, et d'un autre complexe d'ordre i, ne contenant pas de droites-coniques de 3me, ni de 2me espèce.*

On peut remarquer, d'après la manière dont ce résultat a été obtenu, que (B) ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce, et que (D) n'en contient ni de 2me, ni de 3me espèce.

A peine est-il besoin d'ajouter que les mêmes propriétés appartiennent aux complexes plans de coniques.

Le théorème que je viens de démontrer va permetter d'établir avec une grande facilité les trois théorèmes, relatifs aux coniques dans l'espace, qui sont les analogues du théorème de M. Cremona pour les coniques dans le

plan. On verra sans peine que la même démonstration pourrait s'appliquer à ce dernier. De même aussi on pourrait démontrer les trois théorèmes dont il s'agit par des procédés analogues à celui que j'ai employé, dans la 2me partie, pour démontrer le théorème de M. Cremona. Mais cette démonstration entraînerait à des développements fastidieux, que l'on évite en suivant la marche qui va être exposée.

III. — CONIQUES COMMUNES A DEUX COMPLEXES.

Le théorème démontré au début de cette 3me partie fait connaître le nombre des coniques communes à un système et à un complexe du 1er ordre, ou *le nombre des intersections* du système et du complexe. Je vais m'occuper maintenant de la recherche de ce même nombre pour deux complexes dont la somme des ordres est égale à 8. Voici l'énoncé du théorème unique qui renferme la solution du problème.

Théorème II. — *Le nombre des coniques d'un complexe d'ordre i, qui appartiennent en même temps à un autre complexe d'ordre $8-i$, est représenté par un polynôme homogène, de degré $8-i$, à 3 variables, d, P, p, dont les coefficients dépendent du second complexe seulement, et dans lequel on remplace chaque expression de la forme $d^j P^k p^{8-i-j-k}$ par le nombre des coniques du premier complexe qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $8-i-j-k$ points.*

Si, dans cet énoncé, on suppose i égal à 7, le premier complexe est un *système*, et le théorème ne diffère pas de celui qui a été démontré au chapitre I de cette 3me partie.

Pour démontrer d'un seul coup ce théorème dans toute sa généralité, nous allons supposer qu'il soit vrai pour une valeur de i, et en conclure son exactitude pour la valeur immédiatement inférieure.

L'hypothèse consiste donc en ce que le nombre des coniques, communes à un complexe (C_{i+1}) d'ordre $i+1$ et à un complexe d'ordre $7-i$, (C_{7-i}), est représenté par une forme ternaire, en d, P, p, de degré $7-i$, dont les coefficients dépendent seulement du complexe (C_{7-i}). Nous désignerons par m_{7-i} cette forme ternaire, que nous appellerons le *module* du complexe (C_{7-i}).

Soit maintenant un complexe d'ordre i, (C_i). Les coniques de ce complexe, qui rencontrent une droite, forment un complexe (E) d'ordre $i+1$. Le nombre des coniques de (E) qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $7-j-k-i$ points n'est autre que celui des coniques C_i qui rencontrent $j+1$ droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $7-j-k-i$ points, ce que nous représentons symboliquement par $(d^{j+1}P^k p^{7-j-k-i})$. Par suite, le nombre des coniques communes à (E) et à (C_{7-i}) est, d'après l'hypothèse, représenté symboli-

quement par le produit dm_{7-i}, où l'on doit remplacer chaque expression $(d^j P^k p^{8-j-k-i})$ par le nombre des coniques C_i, qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $8-j-k-i$ points.

De la même façon, le nombre des coniques communes à (C_i), (C_{7-i}), qui touchent un plan est représenté par le produit Pm_{7-i}; et celui de ces coniques dont les plans passent par un point est représenté par pm_{7-i}. Donc les 3 caractéristiques μ, ν, ρ du système des coniques communes à (C_i) et à (C_{7-i}) sont respectivement : dm_{7-i}, Pm_{7-i}, pm_{7-i}. Par suite, d'après le théorème relatif aux systèmes de coniques, le nombre des coniques communes à ce système et à un complexe (C_1) d'ordre 1, est : $(\alpha d+\beta P+\gamma p)m_{7-i}$, les nombres α, β, γ ne dépendant que du complexe (C_1). Or cette expression est une forme de degré $8-i$ en d, P, p, et elle exprime le nombre des coniques communes au complexe (C_i) et au complexe d'ordre $8-i$, *intersection complète* des deux complexes (C_1) et (C_{7-i}). Donc, en premier lieu, *si le théorème est exact pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe est l'intersection complète d'un complexe du 1er ordre et d'un autre complexe.*

Examinons maintenant le cas où le second complexe ne satisfait pas à cette dernière condition. Soit donc (C_{8-i}) un complexe quelconque d'ordre $8-i$, dont nous cherchons le nombre des intersections avec (C_i). Prenons une surface du 2me ordre fixe Σ, et considérons les couples de coniques C_i et C_{8-i}, qui se coupent en 4 points sur Σ. On voit immédiatement que ces couples de coniques forment deux systèmes, tels que, par les points d'intersection des coniques de l'un d'eux avec Σ, passe *une* conique *correspondante* de l'autre système.

Les coniques qui coupent Σ en 4 points appartenant à une conique du complexe (C_{8-i}) forment un complexe (C'_{7-i}) d'ordre $7-i$; et l'un des systèmes (S) est celui des coniques communes à (C_i) et à (C'_{7-i}). De même, les coniques qui coupent Σ en 4 points appartenant à une conique du complexe (C_i) forment un complexe (C'_{i-1}) d'ordre $i-1$; et l'autre système (S') est celui qui est commun à (C_{8-i}) et à (C'_{i-1}).

Soit O un point de Σ, et L, L' les droites de la surface qui passent en O. Il n'y a pas de couple de coniques correspondantes des deux systèmes (S) et (S') qui se coupent à la fois sur L et sur L'. Par conséquent, les seules coniques de l'un ou l'autre de ces systèmes, qui rencontrent à la fois ces deux droites, sont tout entières sur Σ. Cherchons-en le nombre.

Pour qu'une conique d'un complexe (C_n) soit sur une surface du 2me ordre donnée arbitrairement, il faut que l'ordre n de ce complexe soit non supérieur à 3, puisque la condition, pour une conique, d'être située sur une surface du 2me ordre donnée, est une condition quintuple. Le nombre n étant supposé non supérieur à 3, les coniques C_n qui sont sur Σ contiennent $3-n$ arbitraires; et il en est de même de leurs plans.

Dans le cas actuel, on voit qu'il ne peut exister sur Σ que des coniques d'un seul des deux complexes (C_i), (C_{8-i}). Car un seul des deux nombres i, $8-i$ est inférieur à 4. Si i est égal à 4, il n'existe sur Σ des coniques d'aucun des deux complexes. Examinons les cas où i est un des nombres 5, 6, 7.

Si i est égal à 5, les plans des coniques C_i sont arbitraires; et, dans un plan donné, il y a un nombre fini de ces coniques. Un plan donné est celui qui passe par 3 points; par suite, ce nombre est représenté par le symbole (p^3). D'autre part, il y a un nombre fini c de coniques du complexe C_{8-i}, dont l'ordre est ici égal à 3, situées sur Σ. Chacune de ces coniques appartient au système S', et correspond aux (p^3) coniques C_i situées dans son plan. Il y a donc cp^3 couples de coniques correspondantes, tel que, dans chaque couple, la conique du système S' rencontre les deux droites L et L'.

Si i est égal à 6, les plans des coniques du complexe (C_i) enveloppent une surface, dont la classe est représentée par le symbole (p^2). D'autre part, les plans des coniques C_{8-i}, qui sont sur Σ, enveloppent une développable, dont soit c' la classe. Il y a $c'p^2$ coniques de S' rencontrant les droites L et L'. Le cas où i est égal à 7 a déjà été examiné plus haut (ch. I).

Ainsi, quand i est au moins égal à 4, le nombre des coniques S' rencontrant les droites L et L' est de la forme cp^{8-i}, c étant un nombre qui ne dépend que du complexe (C_{8-i}). Le cas où $i=4$ n'est pas excepté; car le symbole (p^4) est nul.

Faisons maintenant la perspective plane des deux systèmes S et S', en plaçant l'œil en O. Nous obtenons, sur le tableau, deux systèmes S_1, S'_1 de coniques qui se correspondent une à une, de telle sorte que deux coniques correspondantes, perspectives de deux coniques correspondantes de l'espace, déterminent une involution avec les traces des droites L et L' sur la droite qui joint ces deux traces, l, l'. Il y a de plus cp^{8-i} couples de coniques correspondantes des deux systèmes S_1, S'_1, tels que, dans chaque couple, la conique de S'_1 passe aux points l et l'.

On déduit de là, comme on l'a fait plus haut, que le nombre des coniques communes aux deux systèmes S_1, S'_1 est égal à la 1re caractéristique du système S_1, augmentée de cp^{8-i}, moins la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes, laquelle est la même dans chacun de ces systèmes. Si ρ est la 3me caractéristique du système S, 2ρ est la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes, et perspectives de coniques propres. Par suite, en appelant μ la 1re caractéristique du même système, et ω la valeur totale des droites-coniques, communes aux deux systèmes et perspectives de droites-coniques, le nombre cherché est égal à $\mu + cp^{8-i} - 2\rho - \omega$.

Supposons maintenant que le complexe (C_{8-i}) ne contienne pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce : cela signifie que chacune de ces

droites-coniques, avec son plan, contient au plus $5-(8-i)$ arbitraires, ou, en d'autres termes, que l'ensemble de cette droite et de son plan satisfait au moins à $8-i$ conditions. D'autre part, le plus grand nombre d'arbitraires que la même figure contient dans le complexe (C_i) est $7-i$. Donc, si les deux complexes n'ont aucune liaison, il n'y a pas de droites-coniques communes aux deux complexes dont les plans coïncident. Par suite, il n'y a pas dans le système (S) de droites-coniques ayant pour correspondante une droite-conique de (C_{8-i}). Donc, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, le nombre ω est nul. Le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est alors simplement égal à : $\mu + cp^{8-i} - 2p$. Or μ et p sont deux caractéristiques du système commun à (C_i) et à (C'_{7-i}). Elles sont donc égales à dm'_{7-i} et pm'_{7-i}, m'_{7-i} étant le *module* du complexe (C'_{7-i}). Les coefficiens de ce module ne dépendent que du complexe (C_{8-i}). Par suite, le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est exprimé par la formule : $(d-2p)m'_{7-i} + cp^{8-i}$, qui vérifie le théorème. Donc, *si le théorème est exact pour une valeur de i, au moins égale à 5, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe ne contient pas de droites-coniques d'espèce supérieure à la première.*

Si le complexe (C_{8-i}) contient des droites-coniques d'espèce supérieure à la 1re, on sait, d'après le théorème I, page 19 de cette 3me partie, qu'on peut y joindre un complexe (D, K'_1) intersection complète de deux complexes dont l'un (K'_1) est du 1er ordre, de telle sorte que l'ensemble (C_{8-i}) et (D, K'_1) soit décomposable en une intersection complète (B, K_1) et un complexe (C'_{8-i}) ne contenant pas de droites-coniques d'espèce supérieure à la première. En désignant par N(A, B, ...) le nombre des coniques communes aux complexes (A), (B), ..., on déduit de la relation :

$$(C_{8-i}) + (D, K'_1) = (C'_{8-i}) + (B, K_1),$$

la suivante :

$$N(C_i, C_{8-i}) + N(C_i, D, K'_1) = N(C_i, C'_{8-i}) + N(C_i, B, K_1).$$

D'après les deux théorèmes précédents, les 3 derniers nombres sont exprimés par des formes de degré $8-i$ en d, p, P, dont les coefficients ne dépendent pas de (C_i). Il en est donc de même du premier de ces nombres. Donc le théorème est démontré pour toutes les valeurs de i au moins égales à 4.

Il est bien facile de l'étendre aux autres valeurs de i. Il suffit pour cela de déduire de la relation : $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$, où i est au moins égal à 4, l'expression du même nombre $N(C_i, C_{8-i})$ en fonction des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$, qui expriment le nombre des coniques de (C_{8-i}), qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $i-j-k$ points.

Remplaçons, à cet effet, (C_{8-i}) par le complexe $[jdr, kp, (i-j-k)pl]$, dans la relation : $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$. On en conclura

$$N\left[C_{8-i}, jdr, kp, (i-j-k)pl\right] = d^j P^k p^{i-j-k} m_{8-i},$$

ou

$$(d^j P^k p^{i-j-k}) = d^j P^k p^{i-j-k} m_{8-i},$$

relation dans le second membre de laquelle chaque symbole $d^{j'} P^{k'} p^{8-i'-k}$ représente le nombre des coniques qui rencontrent j' droites, touchent k' plans, et dont les plans passent par $8-i'-k'$ points. On pourra former autant de relations analogues qu'il y a de manières de choisir les nombres j, k. Comme $i-j-k$ ne peut être supérieur à 3, on peut choisir ces nombres de toutes les manières qui rendent $j+k$ au moins égal à $i-3$ et au plus égal à i, c'est-à-dire de $4i-2$ manières. D'autre part, le module m_{8-i} contient $\frac{(9-i)(10-i)}{2}$ termes, si i est 7, 6 ou 5, et un de moins, si i est égal à 4. On reconnaît sans peine que ce nombre des termes de m_{8-i} est inférieur à $4i-2$, excepté dans le cas où i est égal à 4 : ces deux nombres sont alors égaux. Des $4i-2$ équations, on peut tirer les valeurs des coefficients de m_{8-i} exprimés en fonction linéaire et homogène des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$. Si, dans la relation $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$, on regarde les symboles $(d^j P^k p^{8-i-j-k})$ comme des coefficients donnés, définissant le complexe (C_i), et qu'on remplace les coefficients de m_{8-i} par les valeurs tirées des $4i-2$ équations, on aura le nombre $N(C_i, C_{8-i})$ exprimé par une fonction linéaire et homogène des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$, dont les coefficients ne dépendent pas de (C_{8-i}). Donc le théorème est général.

Dès que i surpasse 5, le nombre des équations par lesquelles on détermine les coefficients de m_{8-i} surpasse celui des inconnues. On en conclut, comme pour le cas des coniques dans le plan (2me partie, p. 236), que les nombres $(d^j P^k p^{i-j-k})$ relatifs à un complexe d'ordre $8-i$ quelconque satisfont à certaines relations, grâce auxquelles le module d'un complexe d'ordre i peut être réduit à un nombre de termes inférieur à celui qui est indiqué par son degré i. Mais la même propriété subsiste encore pour des valeurs de i inférieures à 5, ainsi que je vais le montrer.

On a trouvé plus haut que, si i est au moins égal à 4, le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est représenté par $(d-2p)m'_{7-i} + cp^{8-i}$, si (C_{8-i}) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce. On voit donc que, dans ce cas, le module de (C_{8-i}), qui est précisément égal à cette expression, ne contient pas la puissance $(8-i)^{\text{ième}}$ de P. Mais m'_{7-i} est le module du complexe (C'_{7-i}) qui ne contient pas non plus de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce. Donc la puissance $(7-i)^{\text{ième}}$ de P manque aussi. En raisonnant de même sur (C'_{7-i}), on arrive à cette con-

clusion : *Le module d'un complexe, d'ordre non supérieur à 4, qui ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce, ne comprend pas de terme en* P.

Toujours dans l'hypothèse $i \geqslant 4$, on peut supposer que le complexe (C_i) est un complexe plan. Tous les symboles $(d^j P^k p^{8-i-j-k})$ qui y sont relatifs s'évanouissent si l'exposant de p n'y est pas nul. Par conséquent, les coefficients d'un module m_{8-i}, qui affectent les termes ne contenant pas (p), sont les mêmes que leurs analogues dans le module d'un complexe plan satisfaisant aux conditions qui définissent le complexe (C_{8-i}). Il en résulte, en premier lieu, que si $8-i$ est égal à 2, et que le complexe (C_2) ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce, le module m_2 ne contient pas le terme en P^2, attendu que la propriété analogue a été démontrée plus haut (2me partie, p. 235) pour un complexe plan du 2me ordre. Le même résultat peut d'ailleurs être démontré au moyen de la relation

$$(C_{8-i}) + (D, K'_1) = (C'_{8-i}) + (B, K_1),$$

qui s'applique également aux modules des complexes entrant dans cette relation. Les complexes (C'_{8-i}) et (D) ne contiennent pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce. Par conséquent, la relation ci-dessus, appliquée aux modules, montre que les termes en P, dans le module de (C_{8-i}) sont : 1° des termes du 1er degré venant du module de (K'_1) ; 2° ceux qui proviennent du produit des modules de (B) et de (K_1). Si (B) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce, ces derniers termes se réduisent au 1er degré. Ce fait se produit si (C_{8-i}) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2me espèce. On peut donc dire que : *Si un complexe d'ordre non supérieur à 4 ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2me espèce, son module ne contient pas* P *au-dessus du 1er degré.* Et, en appliquant, dans le cas général, ce résultat au complexe (B), on peut dire que : *Le module de tout complexe d'ordre non supérieur à 4 ne contient pas* P *au-dessus du 2me degré.*

Prenons $i = 5$; le module de (C_{8-i}) ou (C_3) ne contient pas le terme en P^3. Il en est donc de même du module du complexe des coniques touchant 3 plans. Par suite, *le nombre des coniques d'un complexe du 5me ordre quelconque qui touchent 3 plans est lié, par une relation indépendante de ce complexe, aux autres nombres caractéristiques du même complexe.*

De même, si on fait $i = 4$, on conclut encore que *les nombres* (P^4), $(P^3 d)$, $(P^3 p)$, *relatifs à un complexe du 4me ordre quelconque, sont liés par 3 relations indépendantes de ce complexe aux autres nombres caractéristiques du même complexe.*

Toutes ces relations sont linéaires et homogènes. Soit $U = 0$ l'une d'elles ; il est clair qu'on peut prendre pour module de (C_{8-i}) son module, qui ne contient pas P au-dessus du 2me degré, augmenté d'un terme tel que λU,

λ étant une constante arbitraire. On peut donc modifier les énoncés ci-dessus, en disant que *les modules des complexes d'ordre 3 et 4 contiennent les premiers* UNE, *les seconds* TROIS *constantes arbitraires, dont on peut disposer de manière à annuler* UN *ou* TROIS *coefficients.*

Il serait facile de former les relations telles que $U = 0$, soit directement, soit par la considération des complexes plans, grâce à laquelle on peut aussi obtenir une nouvelle démonstration de la même proposition. Je ne m'y arrêterai pas.

Au sujet des modules des complexes d'ordre supérieur à 4, la méthode employée pour les former montre que le nombre de leurs coefficients peut être réduit au même nombre que celui des coefficients d'un module de degré complémentaire à 8.

En suivant exactement la méthode employée dans la 2me partie, p. 236, on démontrera facilement le théorème suivant, qui complète la théorie actuelle :

THÉORÈME III. — *Le module de l'intersection complète de deux complexes est égal au produit des modules de ces complexes; et, en particulier, le nombre des coniques communes à plusieurs complexes dont la somme des ordres est égale à 8, est représenté par le produit des modules de ces complexes, où l'on doit remplacer chaque terme tel que* $d^j P^k p^{8-j-k}$ *par le nombre des coniques qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par* $(8-j-k)$ *points.*

Je terminerai ce chapitre en citant quelques exemples des théorèmes qu'il renferme. J'en emprunterai les éléments au mémoire de M. Chasles dont il a été déjà question au début de cette 2me partie.

Outre les conditions simples de rencontrer des droites, toucher des plans, et que les plans des coniques passent par des points donnés, M. Chasles a considéré les conditions multiples suivantes, en regard de chacune desquelles j'écris son module :

Condition double... O_2 de passer par un point donné : $m_2 = p(d-2p)$

Condition triple.... T_3 de toucher un plan en un point donné..... : $m_3 = \frac{1}{2} pP(d-2p)$

Id..... A_3 de toucher une droite..... : $m'_3 = p^2(P-2p)$

Condition quadruple A_4 de toucher une droite en un point donné..... : $m_4 = \frac{1}{2} p^2 (P-2p)(d-2p)$.

On peut vérifier que les caractéristiques des différents systèmes considérés par M. Chasles, et formés avec ces conditions, concordent avec celles qu'on obtiendrait en les calculant au moyen de ces modules. Par exemple, les caractéristiques du système $(5P, O_2)$ sont, d'après M. Chasles, 8, 4, 6.

D'après les théorèmes ci-dessus, elles sont aussi dP^5m_2, P^6m^2, et pP^5m_2 ; c'est-à-dire

$$dP^5m_2 = d^2P^5p - 2dP^5p^2,$$
$$P^6m_2 = dP^6p - 2P^6p^2,$$
$$pP^5m^2 = dP^5p - 2P^5p^3.$$

Or, d'après les valeurs des caractéristiques des systèmes définis par les seules conditions de rencontrer des droites, toucher des plans, ou que les plans des coniques passent par des points, valeurs prises dans le mémoire de M. Chasles, on a

$$d^2P^5p = 24, \quad dP^5p^2 = 8, \quad dP^6p = 12, \quad P^6p^2 = 4, \quad dP^5p^2 = 8, \quad P^5p^3 = 1.$$

D'où l'on conclut $dP^5m_2 = 8$, $P^6m_2 = 4$, $pP^5m_2 = 6$, conformément au rérésultat de M. Chasles.

On peut faire d'autres vérifications analogues sur la même condition O_2, en considérant les systèmes $(1dr, 4P, O_2)$, $(1p, 4P, O_2)$, ... ; et de même sur les autres conditions.

M. Chasles a considéré des combinaisons diverses de ces conditions :

1° Condition triple de passer par un point donné et de rencontrer en un second point une droite donnée menée par le point donné. Il est clair que ceci revient à la simultanéité de la condition O_2 et de la condition $(1p)$. Le module est donc égal à pm_2.

2° Condition quadruple de passer par 2 points donnés. Le module est $m_2^2 = (dp - 2p^2)^2 = dp^2(d - 4p)$. La réduction provient de la suppression du terme $4p^4$, qui peut être considéré comme nul.

3° Condition quadruple de toucher un plan en un point donné, et de rencontrer une seconde fois une droite donnée passant par le point donné. Ceci revient à la simultanéité des conditions T_3 et $(1p)$. Le module est donc : pm_3 ; etc.

IV. — DÉTERMINATION DU NOMBRE DES SURFACES DU 2me ORDRE QUI SATISFONT A DES CONDITIONS DONNÉES.

Quand on cherche les coniques propres d'un système qui satisfont à une condition donnée, on est obligé de mettre à part, pour retrancher leur valeur du nombre total, les coniques du système qui sont réduites à une droite Cette obligation s'impose toutes les fois que la condition donnée est telle qu'elle soit satisfaite par une droite quelconque, considérée comme une conique aplatie. Il n'y a pas lieu de tenir, de même, compte des coniques réduites à un point (ou à deux droites) : la condition pour une conique de se réduire à deux droites est, en effet, une condition simple. Il en résulte qu'une condition qui serait satisfaite par toute conique réduite à deux droites

se décomposerait en une condition ne jouissant pas de cette propriété, et la condition de réduction à deux droites.

En général, si, dans un système de courbes, on veut trouver le nombre des courbes propres satisfaisant à une condition, il faudra mettre à part toutes les courbes composées, quand la possibilité de leur décomposition exige plus d'une condition eu égard à la forme générale des courbes du système. La même remarque s'applique aux systèmes de surfaces : ainsi, dans un système de surfaces du 2me ordre, il faut mettre à part les surfaces réduites à un plan, et les surfaces réduites à une droite (ou à deux plans). Un plan, qui compte comme une surface du 2me ordre dans un système, sera appelé *plan-quadratique;* une droite, qui compte de même pour une surface du 2me ordre dans un système, sera appelée *droite-quadratique*. J'appelle aussi *point-conique*, dans un système de coniques, un point auquel se réduit une conique du système.

Soit (A) un système de surfaces A du 2me ordre. Les sections des surfaces A par un plan fixe P forment un système (a) de coniques a. L'indicatrice du système (a), relative à une droite Δ du plan P, est l'*indicatrice* du système (A), relative à cette droite. Soit μ le nombre des surfaces A qui passent par un point, ν le nombre des surfaces A qui touchent une droite. Ces nombres sont les caractéristiques du système (a). Les droites-coniques de (a) sont les intersections de P et des plans-quadratiques de (A). Soit ω la valeur totale de ces droites-coniques ; on aura la relation : $2\mu - \nu = \omega$. Le nombre ω est la *valeur totale des plans-quadratiques du système* (A).

Dans un système plan de coniques, (a), on a une relation corrélative de cette dernière. Ce sera : $2\nu - \mu = \varphi$, le nombre φ désignant la *valeur totale des points-coniques* du système. La valeur d'un point-conique se trouvera en transformant corrélativement la proposition de la 1re partie (page 137) ; c'est-à-dire que, *pour trouver la valeur d'un point-conique, il suffit de chercher les coniques d'axes infiniment petits, dont les tangentes issues d'un point arbitraire divisent harmoniquement un angle ayant son sommet en ce point, et dont un côté est à distance infiniment petite du premier ordre du point-conique, et de faire la somme des ordres des carrés des angles de ces tangentes.*

Dans le système (a), dérivé du système (A), les points-coniques proviennent des droites-quadratiques de (A) et des surfaces A tangentes à P. Soit χ la valeur totale des premières, et ρ celle des secondes ; on aura : $\rho + \chi = 2\nu - \mu$. Cherchons pour combien d'unités chaque point-conique de (a), provenant d'une surface A, tangente à P, figure dans le nombre ρ.

Soit donc A une surface tangente à P au point a, et A′ une surface du système, infiniment peu différente de A. Prenons pour infiniment petit du 1er ordre la distance des centres de A et de A′. Le plan P fait un angle du 1er ordre avec un plan tangent à A′ en un point infiniment voisin de a. Par suite, les tangentes, menées d'un point arbitraire O du plan P à la section

a' de A' par P, font entre elles un angle de l'ordre $\frac{1}{2}$. La conjuguée harmonique L' d'une droite arbitraire L, menée par O, par rapport à ces tangentes, est à une distance du centre de a' de l'ordre du carré de l'angle de ces tangentes, c'est-à-dire du 1er ordre. D'ailleurs a et le centre de a' sont à une distance du 1er ordre. Donc L' est à une distance du 1er ordre de a. Donc, d'après la proposition ci-dessus, chaque conique a' entre pour une unité dans la valeur du point-conique a. Il reste à trouver le nombre des coniques a'. En supposant le point O et la droite L à l'infini, les coniques a' sont assujetties à avoir leurs centres sur une droite donnée, située à distance infiniment petite du 1er ordre de a. Or il n'y a qu'une telle conique du système (a) qui soit infiniment peu différente du point-conique a. Donc la valeur du point-conique a est l'unité. Donc *le nombre ρ marque précisément le nombre des surfaces* A *tangentes à un plan.* C'est la 3me caractéristique du système (A). Le nombre χ est *la valeur totale des droites-quadratiques* du système.

Cherchons maintenant le nombre des surfaces A qui satisfont à une condition donnée. Soit Σ une surface fixe du 2me ordre. Par la biquadratique d'intersection de Σ et de chaque surface A, menons les surfaces, au nombre de m, qui satisfont à la condition donnée. Elles forment un second système (A_1), dont chaque surface correspond à une surface A. Les systèmes de coniques, (a) et (a_1), déterminés par les intersections d'un plan P avec les surfaces des systèmes (A) et (A_1), se correspondent de telle manière que deux coniques correspondantes, a et a_1, se coupent entièrement sur une conique fixe. Soit $m - n$ le nombre des surfaces ordinaires, satisfaisant à la condition donnée, qui passent par une biquadratique qui diffère infiniment peu d'une conique : à chaque droite-conique du système (a) correspondent n droites-coniques du système (a_1). On en conclut par un raisonnement répété déjà plusieurs fois que le nombre des coniques communes aux deux systèmes est $m\mu - n\omega$. Mais, parmi ces coniques, se trouvent des points-coniques, provenant des droites-quadratiques communes aux deux systèmes (A) et (A_1). Pour trouver le nombre des coniques absorbées par ces points-coniques, nous allons déterminer le nombre des couples de points correspondants des indicatrices de (a) et de (a_1) qui sont confondus en un point représentatif d'un de ces points-coniques.

Relativement à une droite-quadratique, la conjuguée d'une droite quelconque est la droite-quadratique elle-même. Par suite, relativement à une surface infiniment peu différente, les conjuguées de toutes les droites sont infiniment peu différentes entre elles. Parmi ces conjuguées, se trouve un axe de la surface. Si, par cet axe X, on mène un plan arbitraire, la polaire d'un point quelconque de ce plan, relativement à la conique d'intersection, est infiniment peu différente de X. Cette conique est donc infiniment apla-

tie. Soit ε le rapport infiniment petit des axes de cette conique. On voit facilement que la conjuguée d'une droite quelconque, relativement à la surface considérée S, diffère de l'axe X d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2. De même aussi la section, faite dans S par un plan arbitraire, est une conique dont chaque point, à distance finie de X, est à une distance de l'asymptote voisine de l'ordre de ε^2.

Prenons sur S une biquadratique résultant de son intersection avec une surface du 2me ordre arbitraire, Σ. Par cette biquadratique, nous menons les m surfaces qui satisfont à une condition donnée. Soit S_1 une de ces surfaces. Les sections faites dans S et S_1 par un plan contenant X sont des coniques c, c_1, se coupant en 4 points sur la biquadratique, et la conique c est infiniment aplatie. Si, par la nature de la condition considérée, il y a t coniques c_1 qui sont aussi infiniment aplaties, chacune de ces t coniques a un axe de l'ordre de ε, et la polaire d'un point de son plan, relativement à cette conique, diffère de la polaire du même point, relativement à c, d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2. Il y a alors t surfaces S_1 infiniment peu différentes d'une droite-quadratique. Soit S_1 une de ces surfaces. La section faite dans S_1 par un plan arbitraire est une conique dont le centre diffère de celui de la section faite dans S par le même plan d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2, et qui, en ses points à distance finie de X, est à une distance de l'ordre de ε^2 de ses asymptotes.

Mais les deux sections ont 4 points communs à distance finie de X. Donc chaque asymptote de l'une est à une distance d'une asymptote de l'autre infiniment petite de l'ordre de ε^2. Donc enfin les deux points où une droite Δ, à distance finie de X, rencontre S sont respectivement à distance infiniment petite de l'ordre de ε^2 des deux points où cette droite rencontre S_1. Il en est de même des milieux de ces deux couples de points. La distance de ces points milieux est la différence des abscisses des points des indicatrices des deux systèmes (A) et (A_1), relatives à la droite Δ, qui répondent aux surfaces S et S_1. Donc, si le point de l'indicatrice de (A), répondant à S, est à une distance du 1er ordre du point de cette indicatrice, répondant à la droite-quadratique infiniment voisine de S, l'ordre de ε^2 marque le nombre des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices, absorbés par le couple de surfaces S et S_1 ; et chaque surface S fait disparaître t fois ce nombre de surfaces communes aux deux systèmes.

Or il est bien aisé de voir, d'après l'expression donnée plus haut de la valeur d'un point-conique d'un système de coniques, que, si l'on prend, sur l'indicatrice de (A), un point à distance infiniment petite du 1er ordre du point correspondant à une droite-quadratique, et que ε soit le rapport infiniment petit des axes d'une section faite dans la surface correspondante par un plan mené par l'axe de cette surface, l'ordre de ε^2 est le nombre pour lequel cette surface figure dans la valeur totale de cette droite-quadratique. Par

suite, la somme des ordres des quantités telles que ε^2 est la valeur totale de cette droite-quadratique. Donc enfin le nombre des surfaces correspondantes des systèmes (A) et (A_1) confondues, qui sont absorbées par une droite-quadratique, est égal à t fois la valeur de cette droite-quadratique. Donc le nombre des surfaces A qui satisfont à la condition donnée est :

$$N = m\mu - \nu\omega - t\chi = (m - 2n - t)\,\mu + (n - 2t)\,\nu + t\rho = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho.$$

Ainsi se trouve démontré un important théorème, dû à M. Chasles, mais qui n'avait pas encore reçu de démonstration. Son énoncé sera compris dans celui d'un théorème plus général, dont je vais actuellement m'occuper.

Je nomme *complexe du n^{me} ordre* de surfaces du 2me ordre l'ensemble de ces surfaces qui satisfont à n conditions. L'ensemble des surfaces communes à deux complexes d'ordre n et n', ou *intersection complète* de ces complexes, est un complexe d'ordre $n + n'$, si ce nombre est inférieur à 8; un système, si ce nombre est égal à 8; un nombre fini de surfaces, si $n + n'$ est égal à 9. Cette intersection complète peut être décomposable en plusieurs complexes d'ordre $n + n'$, ou en plusieurs systèmes, ou en plusieurs groupes distincts de surfaces.

Une surface du 2me ordre peut être définie par les points où elle rencontre 5 droites données D_1, D_2, ..., D_5. Si les 8 points d'intersection avec les 4 premières sont donnés, les 2 points d'intersection avec la 5me font partie d'une involution, en sorte que ces deux points sont déterminés d'une seule manière par une coordonnée, qui sera, si l'on veut, la distance δ de leur milieu à une origine prise sur D_5.

Si la surface considérée fait partie d'un complexe (A) d'ordre $i \geqslant 2$, par chaque système de 8 points situés sur les 4 premières droites et sur une surface A, il ne passe pas, en général, d'autre surface du complexe. En sorte que δ est déterminé d'une seule manière par les 8 points. Il existe donc, pour le complexe (A), une relation telle que $v\delta - u = 0$, où v et u ne contiennent que les coordonnées des points situés sur les 4 premières droites. Cette relation définit un complexe (K_1) du 1er ordre.

Les surfaces du 2me ordre, passant par chaque système de 8 points où chaque surface A rencontre les 4 premières droites, forment un complexe (B) d'ordre $i - 1$. On voit facilement que les complexes (B) et le complexe défini par les relations $v = 0$, $u = 0$, ont en commun un complexe d'ordre i, (A'), défini par des relations où n'entrent que des points des 4 premières droites. Ce complexe (A'), joint au complexe (A), constitue l'intersection complète de (B) et de (K_1). Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à raisonner exactement comme on l'a fait plus haut (3me partie, p. 18). Cette propriété s'exprime par la relation : $(A) + (A') = (B, K_1)$.

On trouvera de même un complexe (A''), défini par des relations entre 7 points seulement, et tel qu'en le joignant au complexe (A'), on obtiendra

l'intersection de deux complexes (B'), (K'_1), ce dernier du 1er ordre. Cette propriété s'exprimera par la relation : $(A')+(A'')=(B', K'_1)$. On aura de même : $A''+A'''=(B'', K''_1)$, ..., le complexe (A''') étant défini par des relations entre 6 points. Comme les complexes A, A', ... sont tous d'ordre i, l'opération s'arrêtera lorsqu'on obtiendra un complexe défini par des relations entre i points. Ce dernier complexe est donc (A^{9-i}). Il est formé par les surfaces qui passent en i points donnés, ou plutôt il est composé d'un certain nombre de tels complexes. On aura donc finalement :

$$(A)=\pm(A^{9-i})+(B, K_1)-(B', K'_1)+(B'', K''_1)\ldots.$$

Cette relation montre que l'on pourra trouver le nombre des surfaces communes à (A) et à un complexe donné d'ordre $9-i$, si l'on sait le faire pour le complexe (A^{9-i}) et les complexes (B, K_1), (B', K'_1), etc.

Cela posé, nous allons démontrer que :

Théorème. — *Le nombre des surfaces du 2me ordre d'un complexe d'ordre i, qui appartiennent en même temps à un autre complexe d'ordre $9-i$, est représenté par un polynôme homogène, de degré $9-i$ à 3 variables, p, d, P, dont les coefficients dépendent du second complexe seulement, et dans lequel on remplace chaque expression de la forme $p^j d^k P^{9-j-k-i}$ par le nombre des surfaces du 2me ordre du premier complexe, qui passent en j points, touchent k droites et $9-j-k-i$ plans.*

Si, dans cet énoncé, on fait $i=8$, on a le théorème sur les systèmes, démontré plus haut.

L'exactitude de ce théorème est évidente si le complexe d'ordre $9-i$ se compose des surfaces qui passent en $9-i$ points. Le polynôme de degré $9-i$ se réduit à p^{9-i}.

Admettons l'exactitude du théorème pour une valeur de i. Le nombre des surfaces communes à un complexe d'ordre i et à un complexe (C_{9-i}), d'ordre $9-i$, est représenté par un polynôme de degré $9-i$, ou *module* du complexe (C_{9-i}). Soit m_{9-i} ce module. Considérons un complexe d'ordre $i-1$, (C_{i-1}). Les complexes (C_{9-i}) et (C_{i-1}) ont en commun un système, dont on reconnaît facilement que les caractéristiques sont : pm_{9-i}, dm_{9-i}, Pm_{9-i}. Par suite, d'après le théorème sur les systèmes, le nombre des surfaces de ce système, qui appartiennent à un complexe du 1er ordre (K_1), est de la forme : $(\alpha p+\beta d+\gamma P)\,m_{9-i}$, qui est un polynôme homogène de degré $10-i$. Donc, si le théorème est vrai pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe est l'intersection complète d'un complexe du 1er ordre et d'un autre complexe.

Or un complexe quelconque a été réduit à une suite de complexes du même ordre, satisfaisant à cette dernière condition, et à un complexe de surfaces passant en des points fixes. Donc, dans le cas général, si le théo-

rème est exact pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure. Or il est vrai pour $i = 8$; donc il est entièrement démontré.

A peine est-il besoin d'ajouter que, de même que pour les complexes de coniques, les modules des complexes d'ordre supérieur à 4 peuvent être réduits au même nombre de termes que ceux des complexes d'ordre complémentaire à 9.

En suivant la méthode employée plus haut, on démontrera facilement que :

Théorème IV. — *Le module de l'intersection complète de deux complexes est égal au produit des modules de ces complexes ;* et, en particulier, *le nombre des surfaces du 2me ordre communes à plusieurs complexes, dont la somme des ordres est égale à 9, est représenté par le produit des modules de ces complexes, où l'on remplace chaque terme tel que* $p^j d^k P^{9-j-k}$ *par le nombre des surfaces du 2me ordre qui passent en* j *points, et touchent* k *droites et* $9 - j - k$ *plans.*

On peut facilement obtenir des vérifications de cette théorie au moyen des caractéristiques des systèmes de surfaces du 2me ordre considérés par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 405). Dans une étude ultérieure, j'aurai occasion de revenir sur les applications des principes posés dans le travail actuel, et de donner à ce sujet les développements convenables.

Il me sera permis, en terminant ce mémoire, de faire une remarque sur les complexes de surface du 2me ordre. De telles surfaces, étant considérées comme éléments de l'espace, donnent lieu à des complexes de différents ordres, comme les points donnent lieu à des lignes et à des surfaces. Le nombre des intersections de trois surfaces ou d'une ligne et d'une surface est le produit des degrés; il en est de même du degré de la ligne d'intersection de deux surfaces.

De même, dans les complexes considérés, le nombre des intersections est figuré par le produit des modules des complexes, ou bien le module d'un complexe intersection de deux autres est le produit des modules de ces derniers. Et il faut bien remarquer que, si l'on ne veut pas mettre à part les surfaces singulières, plans et droites-quadratiques, tous les modules se réduisent à un seul terme, et ce ne sont plus des produits symboliques, mais de véritables produits que l'on a à considérer.

Les mêmes observations s'appliquent aux complexes de coniques. Je suis même en mesure d'affirmer que des propriétés analogues existent pour les complexes de courbes planes et de surfaces de degré quelconque.

Recherches de géométrie à n *dimensions*, par M. Halphen.

(Séance du 25 juin 1875)

1. Si une surface contient un point multiple d'ordre inférieur d'une unité à son degré, les droites issues de ce point la rencontrent en un seul autre point. A cause de cette propriété, M. Cayley a donné à une telle surface le nom de *monoïde*. Ce géomètre a montré que la considération des monoïdes pouvait être très-utile pour la classification des courbes gauches; il en a déduit la classification des courbes du 3e, 4e et 5e degré (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LIV, p. 55, 396, 672 et t. LVIII, p. 994). M. Ed. Weyr en a déduit la classification des courbes du 6e degré (*ibid.*, t. LXVI). J'ai fait aussi usage de ces surfaces dans un mémoire sur la théorie des courbes gauches, présenté à l'Académie en 1870.

En supposant le point multiple à l'infini sur l'axe Oz, on obtient l'équation d'une surface monoïde de degré p, sous la forme $vz - u = 0$, où u et v sont des polynomes en x et y, de degrés p et $p-1$. Je me propose ici de développer quelques considérations au sujet d'équations analogues entre des variables en nombre supérieur à 3. Pour faciliter le langage, je demanderai qu'il me soit permis d'employer une expression que je vais indiquer. Le nombre des variables étant n, ou, si l'on veut, dans un espace à n dimensions, je nommerai *complexe d'ordre* i l'ensemble des systèmes de valeurs des variables, ou l'ensemble des points, qui satisfont à i conditions; et *intersection de deux complexes* d'ordres i et i', le complexe d'ordre $i+i'$ défini par la simultanéité des conditions qui définissent les premiers complexes. Si $i+i'$ est égal à n, l'intersection se réduit à un nombre fini de points. Le *degré* d'un complexe du 1er ordre est le degré de l'équation qui le définit. Le *degré* d'un complexe d'ordre i est le nombre de ses intersections avec le complexe défini par $n-i$ équations du 1er degré, qui, d'après cette définition même, est un complexe d'ordre $n-i$, du 1er degré. On peut conserver l'expression de *degré* d'un complexe d'ordre i quand i est égal au nombre n des variables. C'est alors le nombre de points que ce complexe représente.

De même que l'intersection complète de deux surfaces peut se décomposer en plusieurs courbes distinctes, de même aussi l'intersection complète de deux complexes peut se décomposer en plusieurs complexes distincts. En sorte qu'un complexe d'ordre i peut ne pas être représenté seul par i équations quelconques entre les n variables. Mais s'il s'agit d'un complexe, intersection complète de i complexes du 1er ordre, il est clair que son degré est égal au produit des degrés de ceux-ci. Dans cet ordre d'idées, les variables étant $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'équation $vx_n - u = 0$, où u et v sont des po-

lynomes de degrés p et $p-1$ ne contenant pas x_n, représente un complexe de 1er ordre, de degré p, que l'on peut appeler *monoïde*.

Ces définitions établies, je vais étendre à un espace à n dimensions un théorème que j'ai démontré dans un autre travail (Même *Bulletin*, t. I, p. 133), et relatif aux intersections des courbes planes. Voici ce théorème :

Théorème I. — *Le nombre des intersections de deux courbes réunies en un point* O *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante arbitraire dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

Je vais d'abord donner à ce théorème une autre forme. Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe, et ξ, η, ξ_1, η_1 les coordonnées de deux points M,M du plan, par où l'on mène deux sécantes parallèles, rencontrant respectivement la courbe aux points m, m', ... et m_1, m'_1, ... On sait qu'on a

$$\frac{Mm.Mm'\ldots}{M_1m_1.M_1m'_1\ldots}=\frac{f(\xi,\eta)}{f(\xi_1,\eta_1)};$$

en sorte que si l'on suppose fixé le point M_1 et la direction de la sécante, le produit $Mm.Mm'$ ..., pour un point arbitraire M, est proportionnel à $f(\xi,\eta)$.

Soit maintenant une autre courbe $\varphi=0$, rencontrant la courbe f en un point O, où les deux courbes peuvent avoir des branches multiples quelconques, ayant entre elles des contacts quelconques. Plaçons le point M sur une des branches de φ, à distance infiniment petite du 1er ordre de O. La quantité $f(\xi,\eta)$ est infiniment petite, et son ordre est égal à la somme des ordres des segments interceptés à partir de M, sur une sécante arbitraire, par la courbe f. Si l'on place successivement le point M, de la même manière, sur les différentes branches de la courbe φ, la somme des ordres des quantités $f(\xi,\eta)$ sera celle des ordres des segments interceptés par les deux courbes sur une sécante à distance infiniment petite du premier ordre de O. Donc :

Théorème II. — *Le nombre des intersections des deux courbes* $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, *confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des quantités* $f(x,y)$, *quand le point* (x,y) *est placé successivement sur les différentes branches de la courbe* $\varphi=0$, *à distance infiniment petite du* 1er *ordre du point* O.

Soit maintenant un complexe du 1er ordre à n variables $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, et cherchons la signification de l'expression $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, quand $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ sont les coordonnées d'un point quelconque. Par ce point, menons arbitrairement $n-2$ complexes du 1er ordre et du 1er degré, qu'on peut réduire à ne contenir chacun que 3 coordonnées :

$$(1)\qquad \begin{cases} x_3-\xi_3=A_3(x_1-\xi_1)+B_3(x_2-\xi_2),\\ x_4-\xi_4=A_4(x_1-\xi_1)+B_4(x_2-\xi_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n-\xi_n=A_n(x_1-\xi_1)+B_n(x_2-\xi_2). \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $x_3, \ldots, x_n$, tirées de ces formules, dans $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, on obtient une relation entre x_1 et x_2 : $F(x_1, x_2) = 0$. Mais, si l'on fait $x_1 = \xi_1$ et $x_2 = \xi_2$, les équations (1) montrent que l'on a aussi $x_3 = \xi_3, \ldots, x_n = \xi_n$. Donc $F(\xi_1, \xi_2)$ n'est autre chose que $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Soit maintenant un autre complexe du 1er ordre $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Supposons que l'intersection de $f = 0$ et de $\varphi = 0$ se décompose en plusieurs complexes distincts du 2e ordre. Si l'on coupe les deux complexes $f = 0$ et $\varphi = 0$ par $n - 2$ complexes simultanés du 1er ordre et du 1er degré, on détermine comme ci-dessus, dans chacun de ces deux complexes, une courbe plane. Les intersections de ces deux courbes $F(x_1, x_2) = 0$, $\Phi(x_1, x_2) = 0$ sont les intersections du complexe ($f = 0$, $\varphi = 0$) avec les $n - 2$ complexes simultanés du 1er degré. Si le complexe $f = 0$, $\varphi = 0$ se décompose, ces intersections se décomposent en plusieurs groupes qu'on obtiendra par des équations distinctes. Soit m le nombre des points contenus dans un de ces groupes, supposé irréductible. Prenons un de ces points O. Le nombre des intersections qu'il absorbe est égal, d'après le th. II, à la somme des ordres de $F(x_1, x_2)$, quand on place successivement le point (x_1, x_2) sur les différentes branches de Φ, à distance infiniment petite du 1er ordre de O. Les m points tels que O absorberont ensemble m fois ce nombre d'intersections. Comme $F(x_1, x_2)$ n'est autre chose que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on en conclut aisément :

Théorème III. — *Si l'intersection de deux complexes du 1er ordre, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, se décompose en plusieurs complexes distincts du 2e ordre, soit O un point pris arbitrairement sur l'un de ces derniers complexes. On place le point $(x_1, \ldots, x_n)$, à distance infiniment petite du 1er ordre du point O, successivement sur les différentes nappes de $\varphi = 0$, et l'on fait la somme des ordres des quantités $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cette somme, multipliée par le degré du complexe du 2e ordre considéré, marque le nombre des unités pour lequel ce complexe compte dans le degré total de l'intersection complète de $f = 0$ et de $\varphi = 0$.*

Soit $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ l'équation d'un autre complexe passant par ce même complexe du 2e ordre A, et supposons que le rapport $\frac{f}{f_1}$ reste fini quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se place sur A, quelle que soit la nappe de φ qu'il parcoure pour y parvenir. Il en résulte que f et f_1 sont du même ordre quand ce point est à une distance infiniment petite du 1er ordre de A sur une quelconque des nappes de φ. Donc le complexe A compte pour le même nombre d'unités dans le degré de l'intersection de f_1 et de φ, que dans celui de f et de φ.

Je vais m'occuper maintenant de la représentation d'un complexe d'ordre supérieur à l'unité. Dans un complexe d'ordre i, pour les points situés à l'infini, les rapports des cordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à l'une d'elles sont liés

par i relations. Si l'on considère ces rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ comme de nouvelles variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, ces i relations définissent un complexe d'ordre i à $n-1$ dimensions. Ce complexe peut être décomposable. Il peut aussi arriver que dans ce complexe, ou dans une de ses parties, quelques-unes des coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots$ soient constamment nulles ou constamment infinies. Mais, par un simple changement des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut faire disparaître ce cas particulier. Pour ce changement de coordonnées, on emploiera les formules

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^n x_n + a_1^{n+1}, \\
x'_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^n x_n + a_2^{n+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x'_n &= a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^n x_n + a_n^{n+1}.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose tous les coefficients a_i^j quelconques, toutes les nouvelles coordonnées $x'_1, x'_2, \ldots$ sont infinies et du même ordre, dès qu'une des anciennes coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ est infinie. Par suite, les i relations qui lient les rapports $\frac{x'_1}{x'_n}, \frac{x'_2}{x'_n}, \ldots, \frac{x'_{n-1}}{x'_n}$ ne sont pas telles que quelques-uns de ces rapports soient constamment nuls ou constamment infinis.

Soient $C=0, C_1=0$ deux complexes du 1er ordre. L'élimination de x_n entre ces deux équations conduit à $D=0$. On peut aussi, d'une infinité de manières, tirer des deux équations données une équation de la forme $vx_n - u = 0$, où v et x ne contiennent pas x_n. Le complexe du 2e ordre $(C=0, C_1=0)$ se décompose ou ne se décompose pas, suivant que D est ou n'est pas décomposable en facteurs. Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ un facteur irréductible de D ; les équations

$$(1) \qquad \varphi = 0, \quad vx_n - u = 0$$

définissent un complexe du 2e ordre irréductible, attendu que la seconde de ces équations donne une seule valeur de x_n pour chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ satisfaisant à $\varphi = 0$. Ce n'est pas à dire pour cela que le complexe considéré soit l'intersection complète des deux complexes (1). On va voir, en effet, que cette intersection se compose, en outre, du complexe $(\varphi = 0, v = 0)$.

Supposons que, pour les valeurs infinies des coordonnées des points du complexe, aucun des rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots$ ne soit constamment nul ni infini, ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement, ainsi qu'on vient de le montrer. Supposons, en outre, que le complexe des points dont les coordonnées sont ces rapports mêmes, soit indécomposable. (Dans le cas où il n'y a que 3 coordonnées x_1, x_2, x_3, ces rapports sont au nombre de

2, et le complexe du 2e ordre formé par les points dont les coordonnées sont $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}$ se compose d'un nombre fini de points. L'hypothèse dont il s'agit ici revient à supposer irréductible l'équation à une inconnue qui les détermine.) Dans cette hypothèse, on obtient, en égalant à zéro la somme des termes de degré le plus élevé dans φ, une relation entre les rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_1}$, qui est indécomposable. Soit Φ la somme de ces termes, en sorte qu'on ait $\varphi = \Phi + \varphi_1$, φ_1 étant de degré inférieur à φ. Si les termes du degré le plus élevé dans v contiennent le facteur Φ, en sorte qu'on ait $v = V\Phi + v_1$, v_1 étant de degré inférieur à v, on pourra remplacer, pour la représentation du complexe considéré, v par $v - V\varphi = v_1 - V\varphi_1$. Si $v_1 - V\varphi_1$ contient encore, dans ses termes de degré le plus élevé, le facteur Φ, on pourra faire la même transformation sur cette nouvelle expression. Comme cette transformation en abaisse le degré, on est assuré de parvenir, en la répétant un nombre fini de fois, à une expression pouvant remplacer v, et dans laquelle les termes de degré le plus élevé ne contiennent pas le facteur Φ. Le même raisonnement est appliquable à u. On peut donc supposer que ni u, ni v ne renferment le facteur Φ dans leurs termes de degré le plus élevé. Donc, quand les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ acquièrent les valeurs infinies qui annullent Φ, u et v sont infinis d'un ordre marqué par leurs degrés respectifs. D'ailleurs x_n doit être du même ordre que les autres coordonnées. Donc, le degré de u étant p, celui de v est $p-1$. Ainsi l'équation $vx_n - u = 0$ représente un monoïde de degré p.

En second lieu, x_n ne peut devenir infini, d'après l'hypothèse, pour l'ensemble des valeurs des autres coordonnées qui annulent à la fois v et φ, puisque le complexe des points à l'infini est irréductible. Donc, pour ces valeurs, le rapport $\frac{u}{v}$ est fini, c'est-à-dire que le complexe $u = 0$ passe par l'intersection de $v = 0$ et $\varphi = 0$, et que u est infiniment petit du même ordre que v quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est infiniment voisin de cette intersection sur une nappe quelconque de φ. Donc, d'après la remarque faite à la suite du théorème III, l'intersection de v et de φ, qui appartient tout entière à u, compte pour autant d'unités dans le degré de l'intersection de u et de φ, que dans celle de v et de φ. C'est-à dire que, si m est le degré de φ, elle compte pour $(p-1)m$ unités. Le restant de l'intersection de u et de φ est de degré $pm - (p-1)m = m$. On a supposé que le complexe du 3e ordre des points à l'infini du complexe considéré était irréductible. Il est facile de montrer qu'on parvient aux mêmes conséquences quand cette hypothèse n'est pas réalisée. Le complexe étant indécomposable, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que son intersection avec $x_1 = 0$ est indécomposable. Il suffit, pour réaliser cette hypothèse, de supposer que les coordon-

nées ne sont point particularisées. Effectuons maintenant la transformation

$$x'_1 = \frac{1}{x_1}, \quad x'_2 = \frac{x_2}{x_1}, \ \ldots, \ x'_n = \frac{x_n}{x_1}.$$

Dans le nouveau complexe, l'intersection avec l'infini est indécomposable. Ce complexe est donc représenté par des équations $v'x'_n - u' = 0$, $\varphi' = 0$, où, u' étant de degré de p, v' est de degré $p-1$. Revenons aux anciennes coordonnées, et nous aurons, ainsi qu'on le voit aisément, pour l'ancien complexe, une représentation : $\varphi = 0$, $vx_n - u = 0$, où les degrés de u et de v sont ceux de u' et de v'. Donc, dans ce cas comme dans le précédent, l'intersection de u et de φ se compose de celle de v et de φ, dont le degré compte pour $(p-1)m$ unités et d'un complexe de degré m. Ces conclusions s'appliquent même à un complexe décomposable ; car soient $\varphi = 0$, $vx_n - u = 0$ et $\varphi' = 0$, $v'x_n - u' = 0$ deux complexes irréductibles : on pourra représenter leur ensemble par $\varphi\varphi' = 0$, $(\varphi' v + \varphi v')x_n - (\varphi' u + \varphi u') = 0$, et l'on voit que cette représentation satisfait aux mêmes conditions que ci-dessus.

Puisque u passe par toute l'intersection de v et de φ, et que cette intersection compte pour autant d'unités dans le degré de $(u = 0, \varphi = 0)$ que dans celui de $(v = 0, \varphi = 0)$, il en résulte que, si aucune portion de cette intersection n'est multiple dans φ, u est de la forme $Av + B\varphi$, où A est du 1er degré. Le monoïde $vx_n - u = 0$ se réduit alors à $x_n = A$. Le complexe du 2e ordre considéré est alors tracé sur un complexe du 1er ordre et du 1er degré.

Par des raisonnements analogues, on voit facilement que tout complexe du $i^{\text{ème}}$ ordre est représenté par une équation $\varphi = 0$, entre $n - i + 1$ coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-i+1}$, et $i - 1$ monoïdes $x_{n-i+1} = \frac{u}{v}$, $x_{n-i+3} = \frac{u'}{v'}$, ..., satisfaisant aux mêmes conditions que ci-dessus. On peut réduire ces monoïdes au même dénominateur V, et on aura alors

$$x_{n-i+2} = \frac{u_{n-i+2}}{V}, \quad x_{n-i+3} = \frac{u_{n-i+3}}{V}, \ \ldots, \ x_n = \frac{u_n}{V}.$$

De même que ci-dessus, chaque complexe $u_{n-i+2}, \ldots, u_n$ est d'un degré supérieur d'une unité à celui de V, et passe par l'intersection de V et de φ. Je vais montrer que le degré d'un tel complexe est précisément celui de φ.

Coupons ce complexe C par le complexe du 1er ordre et du 1er degré

$$P = A_n x_n + A_{n-1} x_{n-1} + \ldots + A_2 x_2 + A_1 x_1 + B = 0.$$

La substitution, dans P, des valeurs de $x_n, \ldots, x_{n-i+2}$, donne lieu à

$$\psi = A_n u_n + A_{n-1} u_{n-1} + \ldots + A_{n-i+2} u_{n-i+2} + V(A_{n-i+1} x_{n-i+1} + \ldots + A_1 x_1 + B) = 0.$$

Les deux complexes du 1er ordre, à $n-i+1$ dimensions, φ et ψ, ont en commun le complexe ($V=0$, $\varphi=0$), et l'on voit immédiatement, par l'application du théorème III, que, si m est le degré de φ, et $p-1$ celui de V, ce complexe compte pour $(p-1)m$ unités dans le degré de l'intersection de φ et de ψ. Le reste de cette intersection est donc de degré m, puisque ψ est de degré p. Or le degré de cette portion de l'intersection de φ et de ψ n'est autre que le degré de C. Donc *le degré du complexe* C *est égal à celui de* φ.

Par la même méthode, on démontrera bien facilement que le degré de l'intersection de C et d'un complexe du 1er ordre est égal au produit des degrés de ces complexes. Pour y parvenir, on substituera, dans l'équation du dernier complexe, à $x_{n-i+2}, \ldots, x_n$ leurs valeurs. On formera ainsi un nouveau complexe du 1er ordre χ, analogue à ψ. Si le degré du complexe donné est n, le degré de χ sera np, et l'on verra aisément que le complexe ($V=0$, $\varphi=0$) compte pour $(p-1)mn$ unités dans le degré de l'intersection de χ et de φ. Le reste de cette intersection est de degré mn, et c'est précisément le degré de l'intersection des deux complexes proposés. Donc :

Théorème IV. — *Le degré de l'intersection de deux complexes, dont l'un est du 1er ordre, est égal au produit des degrés de ces complexes.*

Quand on n'a à considérer que 3 dimensions, le théorème IV exprime que *le nombre des intersections d'une courbe et d'une surface est égale au produit des degrés de cette courbe et de cette surface*, principe que l'on paraît avoir jusqu'à présent admis sans démonstration (Voy. Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, ch. II, Classification des courbes).

Plus généralement, je vais démontrer que :

Théorème V. — *Le degré de l'intersection de deux complexes, dont la somme des ordres n'excède pas le nombre des dimensions, est égal au produit des degrés de ces complexes.*

La démonstration que je vais donner de ce théorème s'applique aussi au théorème IV.

Soit un complexe C_i^n du $i^{\text{ème}}$ ordre à n dimensions, et de degré m, représenté par les équations

$$(1) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-i+1}) = 0, \; x_{n-i+2} = \frac{u_{n-i+2}}{V}, \ldots, x_n = \frac{u_n}{V}.$$

Introduisons $i-1$ nouvelles dimensions $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$, en remplaçant

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ par } x_1 + a_1^{(1)} y_1 + a_1^{(2)} y_2 + \ldots + a_1^{(i-1)} y_{i-1}, \\ x_2 \text{ par } x_2 + a_2^{(1)} y_1 + a_2^{2} y_2 + \ldots + a_2^{(i-1)} y_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-i+1} \text{ par } x_{n-i+1} + a_{n-i+1}^{(1)} y_1 + a_{n-i+1}^{(2)} y_2 + \ldots + a_{n-i+1}^{(i-1)} y_{i-1}. \end{array}$$

En faisant ces substitutions dans les équations (1), on obtient évidemment les équations d'un complexe C_i^{n+i-1} du $i^{\text{ème}}$ ordre à $n+i-1$ dimensions, du même degré m. Par des éliminations, on peut représenter le même complexe au moyen d'équations telles que

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad y_1 = \frac{U_1}{W}, \quad y_2 = \frac{U_2}{W}, \ldots, \quad y_{i-1} = \frac{U_{i-1}}{W},$$

où ψ, qui ne contient que les anciennes dimensions $x_1, \ldots, x_n$, est de degré m, et où $U_1, \ldots, U_{i-1}$ et W ne contiennent que ces mêmes dimensions. Le complexe C_i^{n+i-1} est coupé suivant un complexe d'ordre $2i-1$ à $n+i-1$ dimensions, et de degré m, par un complexe du 1er degré et d'ordre $i-1$. C'est le cas de son intersection avec le complexe $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots, y_{i-1} = 0$.

Soit maintenant un second complexe $C_{i'}^n$ d'ordre i', à n dimensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On le transformera de la même manière en un complexe d'ordre i' à $n+i'-1$ dimensions en remplaçant

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ par } x_1 = b_1^{(1)} z_1 + b_1^{(2)} z_2 + \ldots + b_1^{(i'-1)} z_{i'-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-i'+2} \text{ par } x_{n-i'+2} + b_{n-i'+2}^{(1)} z_1 + b_{n-i'+2}^{(2)} z_2 + \ldots + b_{n-i+2}^{(i'-1)} z_{i'-1}. \end{array}$$

Ce nouveau complexe $C_{i'}^{n+i'-1}$ est du même degré m' que $C_{i'}^n$, et sera représenté par des équations telles que

$$\psi'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad z_1 = \frac{U'_1}{W'}, \quad \ldots, \quad z_{i'-1} = \frac{U'_{i'-1}}{W'}.$$

Les deux complexes C_i^{n+i-1} et $C_{i'}^{n+i'-1}$ peuvent être tous deux considérés comme des complexes d'ordres i et i' à $n+i+i'-2$ dimensions $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, z_1, \ldots, z_{i'-1})$. Pour obtenir la représentation de l'intersection de ces deux complexes, il suffira d'éliminer une des premières coordonnées, x_n, entre les équations $\psi = 0$ et $\psi' = 0$, ce qui donnera lieu à une équation $\Phi = 0$, de degré mm', entre $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; de déduire de ces mêmes équations une relation telle que $vx_n - u = 0$, et de joindre à ces deux relations $\Phi = 0$, $vx_n - u = 0$ les expressions de $y_1, \ldots, y_{i-1}$, et de $z_1, \ldots, z_{i-1}$ fournies par la représentation des deux complexes C_i^{n+i-1} et

$C_{i'}^{n+i'-1}$, et où l'on remplace x_n par sa valeur en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. On voit donc que l'on obtient ainsi la représentation d'un complexe d'ordre $i+i'$ à $n+i+i'-2$ dimensions, de degré mm'. L'intersection de ce dernier complexe avec

$$y_1 = 0, \ \ldots, \ y_{i-1} = 0, \ \ z_1 = 0, \ \ldots, \ z_{i-1} = 0$$

est un complexe du même degré mm'. Or cette intersection n'est autre chose que celle des deux complexes proposés $C_i, C^{i'}$. Le théorème V est donc entièrement démontré.

II. L'application la plus simple de la représentation d'un complexe d'ordre supérieur à l'unité est la représentation d'une courbe dans l'espace. D'après les principes qui viennent d'être exposés, toute courbe C est représentée par les équations à 3 dimensions

$$\varphi(x, y) = 0, \quad vz - u = 0,$$

où $\varphi = 0$ est une courbe plane, d'un degré égal à celui de la courbe représentée, et où u et v ne contiennent que x et y. Le degré de u étant p, celui de v est $p-1$, la courbe $u=0$ passe en tous les points communs à $v=0$ et à $\varphi=0$, et ces points comptent pour $(p-1)m$ intersection de $u=0$ et de $\varphi=0$, m étant le degré de φ. Les m autres intersections de u et de φ sont les points où la courbe C rencontre le plan $z=0$. Si, parmi les points $(v=0, \varphi=0)$, il n'y en a pas qui soient multiples sur φ, la courbe est plane. Les points multiples de φ, qui sont communs à u et à v sont des *points multiples apparents* de la courbe C. Comme le lieu des points de l'espace, d'où l'on peut mener des droites s'appuyant plus de deux fois sur une courbe, est une surface, on peut toujours supposer que le point à l'infini sur l'axe des z n'est pas sur cette surface. Par suite, les points multiples apparents dont il s'agit sont simplement des points doubles. Si la courbe $\varphi=0$ a d'autres points multiples où ne passent pas les courbes $u=0$ et $v=0$, ce sont les projections des points multiples de la courbe C. Nous n'aurons pas lieu de nous en occuper ici, et nous ne parlerons que des points doubles de φ, où passent les lignes $u=0$ et $v=0$. Soit s le nombre de ces points ; à cause des degrés m et $p-1$ de φ et de v, on doit avoir $s < \frac{(p-1)m}{2}$. En dehors de ces points doubles, φ et v se coupent en $(p-1)m-2s$ autres points. Donc u et v ont $(p-1)m-s$ points communs sur φ. On doit donc avoir $(p-1)s < p(p-1)$. Ces deux inégalités donnent $\frac{(p-1)m}{2} > s > (p-1)(m-p)$. D'où l'on conclut $p > \frac{m}{2}$.

Parmi tous les monoïdes $vz - u = 0$ équivalents pour la représentation de la courbe C, il en est dont le degré p est minimum. Toute courbe $v' = 0$ qui passe aux s points doubles de φ peut servir à former un monoïde équivalent. Car il est facile de voir que le produit $v'u$ est de la forme $u'v + a\varphi$, u' étant un polynome dont le degré surpasse celui de v' d'une unité. Par suite, quand le point (x,y) parcourt la ligne $\varphi = 0$, on a $\frac{u'}{v'} = \frac{u}{v}$. Donc le monoïde $z = \frac{u'}{v'}$ est équivalent à $z = \frac{u}{v}$ pour la représentation de la courbe C. Le nombre des points doubles de φ étant inférieur à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, si φ est une courbe propre de degré m, et à $\frac{m(m-1)}{2}$, si φ est une courbe décomposable, on pourra, dans tous les cas, faire passer par les points doubles une courbe de degré $m-1$. Donc, tout d'abord, on peut supposer que p ne dépasse pas m. Cela étant, pour que p soit le degré minimum du monoïde, il faut que, par les s points doubles de φ, on ne puisse mener une courbe de degré inférieur à $p-1$, ce qui exige qu'on ait $s \geqslant \frac{(p-1)p}{2}$. Cette inégalité donne pour chaque valeur de s une limite du minimum de p. On peut facilement trouver une autre limite plus rapprochée. Les éléments $(u,v),(u',v')$ de deux monoïdes équivalents sont liés par la relation $uv' - vu' = a\varphi$. u et v étant connus, et u',v' indéterminés, a est assujetti simplement à cette condition que la courbe $a = 0$ passe aux points d'intersection de u et de v extérieurs à φ. Ces points sont au nombre de $s - (p-1)(m-p)$. Pour qu'on ne puisse déterminer u' et v' de telle sorte que le degré de v' soit inférieur à $p-1$, il faut que le degré de a ne puisse descendre au-dessous de $2p - m - 1$; ce qui exige que l'on ait

$$s - (p-1)(m-p) \geqslant \frac{(2p-m-1)(2p-m)}{2},$$

ou

$$s \geqslant \frac{m(m-1)}{2} - p(m-p).$$

Cette limite de s est constamment supérieure à $\frac{(p-1)p}{2}$, dès que p est inférieur à $m-1$. Elle décroît constamment avec p jusqu'à la valeur de p qui la rend minima, et qui est précisément la limite absolue de p trouvée plus haut, c'est-à-dire le plus grand entier contenu dans $\frac{m+1}{2}$. Donc s ne peut, en aucun cas, descendre au-dessous du minimum obtenu en faisant dans l'expression ci-dessus $p = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ ($[x]$ = le plus grand entier con-

tenu dans x). Ce minimum est $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$. Il existe toujours, quel que soit m, des courbes de degré m ayant $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$ points doubles apparents, et il n'en existe qu'une espèce. Ces courbes résultent de l'intersection d'une surface du 2me ordre et d'une surface de degré $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ qui ont, en outre, une droite commune lorsque m est impair. On peut donc dire, ainsi que je l'ai déjà énoncé ailleurs (*Comptes rendus*, t. LXX) :

Les courbes gauches de degré m, qui ont le moindre nombre de points doubles apparents possible, en ont $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$.

Occupons-nous maintenant des complexes du $(n-1)^e$ ordre à n dimensions. Un tel complexe C est représenté par les équations

$$\varphi(x_1, x_2) = 0, \quad x_3 = \frac{u_3}{V}, \quad x_4 = \frac{u_4}{V}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{V},$$

où chaque groupe $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{u_i}{V}\right)$ représente une courbe dans l'espace. On peut donc dire que le complexe est représenté par $n-2$ courbes tracées sur un même cylindre. Chaque point multiple de φ, où passe v, est un point multiple apparent pour toutes ces courbes. Elles ont donc les mêmes points multiples apparents. En général, par un complexe C_3 du 3me ordre et du 1er degré, on peut mener un nombre fini de complexes C_2 du 2me ordre et du 1er degré rencontrant deux fois le complexe C du $(n-1)^e$ ordre. Supposons que le complexe C_3 soit celui des points à l'infini du complexe du 2me ordre $(x_1=0, x_2=0)$. Alors ξ_1, ξ_2 étant les coordonnées d'un point multiple de φ, qui ne soit qu'apparent sur les courbes $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{u_i}{V}\right)$, le complexe $(x_1 = \xi_1\ x_2 = \xi_2)$ est un des complexes C_2 passant par C_3 et rencontrant plusieurs fois le complexe C. On voit donc que, si les coordonnées ne sont pas particularisées, les points multiples apparents des courbes $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{x_i}{V}\right)$ seront des points doubles. Leur nombre ne change pas si l'on change les coordonnées.

Si l'on considère trois coordonnées x_i, x_j, x_k d'un point du complexe C comme les coordonnées rectilignes d'un point de l'espace à 3 dimensions, ces coordonnées définissent une courbe de l'espace, que je désigne par (i,j,k). Le complexe C est représenté par le groupe des courbes $(i,j,1)$, $(i,j,2), \ldots, (i,j,n)$, que j'appelle le groupe (i,j). Le passage de la représentation du complexe C par un groupe (i,j) à la représentation par un

groupe (i',j') revient à un changement de coordonnées. Par suite, toutes les courbes (i,j,k) ont le même nombre de points doubles apparents.

Voici maintenant une application géométrique importante de ces complexes. Considérons une courbe plane définie par l'équation

$$S = a_1x^q + a_2x^{q-1}y + \ldots + a_{Q-1}x + a_Qy - 1 = 0,$$

où $(a_1, a_2, \ldots, a_Q)$ sont des coefficients dont le nombre Q marque le nombre des conditions nécessaires pour déterminer la courbe. Supposons que l'on donne simplement $Q - 1$ conditions. La courbe S engendre alors un système (S), qui est défini par un complexe du $(Q-1)^{\text{ème}}$ ordre à Q dimensions $(a_1, a_2, \ldots, a_Q)$. Les valeurs infinies des variables a correspondent aux courbes S qui passent à l'origine des coordonnées (x,y). Si toutes ces variables ne deviennent pas infinies ensemble, l'équation de quelques-unes des courbes S, passant à l'origine, manque de quelques termes. Or on peut choisir les axes de coordonnées de manière que ce fait ne se produise pas. Supposons, en effet, que, dans l'équation d'une de ces courbes S passant à l'origine, le coefficient d'un terme tel que $x^ry^{r'}$ soit nul : en changeant arbitrairement les directions des axes sans changer l'origine, on fera apparaître ce terme dans l'équation de la courbe, à moins que tous les termes de degré $r + r'$ n'aient des coefficients nuls. Mais cette dernière hypothèse est impossible si l'origine des coordonnées n'est pas particularisée. Car, si l'on suppose qu'en plaçant l'origine en un point arbitraire, il y ait toujours une courbe du système passant en ce point dont l'équation manque des termes de degré $r + r'$, il en résulte que chaque courbe du système jouit de cette propriété relativement à chaque point situé sur elle. Il y a donc lieu de se demander quelles sont les courbes telles qu'en plaçant l'origine des coordonnées sur la courbe, l'équation qui les représente manque des termes d'un degré donné. Or il est bien facile de voir que ces courbes ne sauraient être des courbes propres, et qu'il faut et il suffit que leur équation contienne un facteur élevé à une puissance égale au degré des termes qui doivent disparaître. Cette hypothèse est donc impossible dans le cas d'un système de courbes propres.

Il résulte de cette discussion que, dans le complexe du $(Q-1)^e$ ordre, à Q dimensions, qui représente le système (S), les Q coordonnées deviennent infinies toutes ensembles. Par suite, ce complexe C est représenté par $Q-2$ courbes $(i,j,1), (i,j,2), \ldots, (i,j,Q)$ tracées sur le même cylindre, rapportées à des axes quelconques. Le degré de ces courbes marque le nombre des courbes du système qui passent en un point, ou *la première caractéristique* μ du système, attendu que la condition pour la courbe S de passer en un point est linéaire en $(a_1, a_2, \ldots, a_Q)$.

Si l'on change les axes des coordonnées (x,y), ou si l'on applique à ces coordonnées une transformation homographique, ces transformations ont

pour effet de remplacer les coefficients a par des expressions linéaires en fonction de ces coefficients. Elles reviennent donc à de simples changements de coordonnées pour le complexe C. Par suite, toutes les propriétés de C indépendantes des coordonnées donnent dans le système (S) des propriétés subsistant lorsqu'on lui applique une transformation homographique. Considérons, par exemple, les points doubles apparents des courbes représentatives de C. Soit a_{q+1} le coefficient de y^q dans S. Quelle est la signification des points doubles apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$? Pour un tel point, on aura deux valeurs de chacun des coefficients a, autres que a_1 et a_{q+1}, répondant à une seule valeur de chacun de ces derniers. On aura donc deux courbes S et S', telles que la courbe $S - S' = 0$, qui passe à l'origine des coordonnées, aura dans ces termes de degré le plus élevé, le facteur xy. Cette courbe passe donc par les deux points à l'infini des deux axes de coordonnées. Le nombre des points doubles apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$ marque donc le nombre des couples de courbes du système, telles que par leurs intersections et par trois points donnés, dont deux à l'infini sur les axes et un à l'origine, on peut mener une courbe du même degré. Le nombre des points doubles apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$ ne changeant pas, si l'on transforme homographiquement le système (S), on peut dire que *ce nombre marque le nombre des couples de courbes du système, telles que, par leur intersection et 3 points arbitraires, on peut mener une courbe du même degré.* D'après cette interprétation, on voit que les points multiples apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$ et, par suite, des autres groupes, sont des points doubles, si les axes des coordonnées, x,y, sont quelconques.

Si, par les intersections de chaque couple de courbes du système (S), on mène les courbes du même degré, ces dernières contiennent 3 arbitraires. Elles forment un complexe de courbes, qui est d'ordre $Q - 3$. Le nombre de ces courbes qu'on peut mener par 3 points s'appellera la 1re *caractéristique* de ce complexe. Ce complexe sera dit *dérivé* du système (S). Si le nombre des couples de courbes S ci-dessus est moindre que $\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\right]$, toutes les courbes (i,j,k) sont planes, le nombre de leurs points doubles apparents est nul. De plus, chaque coefficient a_k s'exprimant alors linéairement en fonction de deux coefficients a_i,a_j, l'équation de la courbe S est comprise dans la forme $S' + a_iS'' + a_jS''' = 0$, qui représente un *réseau*. Donc :

Théorème VI. — *Si la 1re caractéristique du complexe dérivé d'un système est inférieur à* $\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\right]$, *$\mu$ étant celle du système, elle est nulle. Quand la 1re caractéristique du complexe dérivé est nulle, le système fait partie d'un réseau.*

On pourrait donner différentes autres interprétations des points doubles apparents des courbes (i,j,k), relativement au système (S), et obtenir ainsi des théorèmes sur des couples de courbes de ce système. Je ne m'y arrête pas, attendu que ces théorèmes découlent des propriétés générales des complexes de courbes, d'ordre $Q - 3$, tels que le complexe dérivé. Je ferai seulement remarquer que, dans le cas d'un système de coniques, la 1re caractéristique du complexe dérivé marque le nombre des couples de coniques du système qui ont une corde commune donnée.

Toutes les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, aux systèmes de surfaces et aux systèmes de complexes du 1er ordre à n dimensions, et donnent lieu, pour ces cas, à des théorèmes identiques au théorème VI.

Si l'on veut astreindre les courbes d'un système (S) à une condition nouvelle, on définira cette condition par une équation entre les coefficients a. Soit m le degré de cette équation. D'après le théorème IV, le nombre des systèmes de valeurs des coefficients a qui satisfont à cette condition et à celles du système (S), est $m\mu$, puisque ces dernières sont exprimées par un complexe de degré μ. Ce qui distingue tout particulièrement les beaux théorèmes découverts par M. Chasles à l'occasion de cette recherche, c'est qu'il donnent le nombre des *courbes propres* d'un système qui satisfont à une condition. Pour parvenir à ces théorèmes, il faut donc retrancher du nombre $m\mu$ le nombre afférent aux courbes non propres. C'est ce que nous allons faire pour le cas d'un système de coniques sur le plan. Il est facile de voir que, dans ce cas, il n'y a lieu de considérer, parmi les courbes non propres du système, que les coniques réduites à une droite (*).

Soit

$$S = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2\varepsilon y + 1 = 0$$

l'équation d'une conique appartenant à un système défini par les relations

$$\varphi(d,\varepsilon) = 0, \quad b = \frac{u}{v}, \quad a = \frac{u_1}{v}, \quad c = \frac{u_2}{v}.$$

Les conditions, pour les coniques S, de se réduire à une droite, sont

$$\alpha = bd - a\varepsilon = 0, \quad \alpha_1 = a - d^2 = 0, \quad \alpha_2 = c - \varepsilon^2 = 0.$$

On peut remplacer les cinq coefficients a,b,c,d,ε par $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,d,\varepsilon$, de la manière suivante : on a

$$a = d^2 + \alpha_1, \quad c = \varepsilon^2 + \alpha_2, \quad b = \frac{\alpha}{d} + \frac{a\varepsilon}{d} = \frac{\alpha}{d} + \frac{\varepsilon}{d}(d^2 + \alpha_1).$$

(*) Voir *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du 2e ordre*, 3e partie, détermination des surfaces du 2e ordre.

Étant donnée une condition, représentée par une équation entre les coefficients a,b,c,d,ε, on y substituera ces valeurs de a,c,b. Si l'équation ainsi transformée ne contient pas de terme indépendant de α,α_1,α_2, la condition est telle qu'elle est satisfaite par toute droite considérée comme une conique. Prenons, par exemple, la condition $\alpha_1=0$, sur laquelle la transformation est toute faite. Cherchons maintenant le nombre des coniques S qui satisfont à cette condition. Pour cela, mettons dans l'équation $\alpha_1=a-d^2=0$, à la place de a, sa valeur $\frac{u_1}{v}$; nous obtenons l'équation $u_1-d^2v=0$. d et ε étant censées des coordonnées rectilignes, cette équation représente une courbe ψ, qui coupe $\varphi=0$ de degré μ en des points dont, si p est le degré de u, $2(p-1)\mu$ sont sur u et sur v. Les 2μ autres conviennent à la question.

Supposons maintenant que le système (S) contienne des coniques réduites à une droite. Soit O le point de φ répondant à l'une d'elles, ce point pouvant être multiple sur φ. En ce point, c'est-à-dire lorsque d et ε sont égaux aux coordonnées de ce point, α,α_1,α_2 sont nuls. Donc la courbe ψ passe au point O. D'après le théorème II, le nombre des intersections des deux courbes φ et ψ, confondues en O, est marqué par la somme des ordres des quantités ψ ou α_1, quand le point (d,ε) est placé successivement à distance infiniment petite du 1er ordre de O, sur les différentes branches de φ. Soit ω cette somme; nous voyons que la conique réduite à une droite, ou *droite conique*, considérée réduit de ω unités le nombre des coniques du système satifaisant à la condition $\alpha_1=0$. Mais cette condition est celle de toucher l'axe des x. Si les axes sont quelconques, le nombre ω devra être le même si l'on prend pour axe des x une droite quelconque du plan. On en conclut tout d'abord qu'il est le même, si, à la condition $\alpha_1=0$, on substitue la condition $\alpha_2=0$. La condition de toucher la droite de l'infini est $b^2-ac=0$. On en conclut donc encore que la somme des ordres de b^2-ac est ω, quand le point (d,ε) se place successivement sur les différentes branches de φ, à distance infiniment petite du 1er ordre de O. Or on a

$$\alpha(bd+a\varepsilon)=b^2d^2-a^2\varepsilon^2=d^2(b^2-ac)+a^2\alpha_2-ac\alpha_1.$$

Par suite, la somme des ordres de α est également ω.

Prenons maintenant, au lieu des précédentes, une condition qui soit telle que l'équation en $d,\varepsilon,\alpha,\alpha_1,\alpha_2$ qui la représente soit satisfaite pour $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=0$. Soit n le moindre degré de cette équation en α,α_1,α_2. Si, dans cette équation, on exprime α,α_1,α_2 en d,ε, par les conditions du système (S), on obtient une équation qui représente une courbe χ, de degré mp, m étant le degré de la condition. Cette courbe rencontre φ en $mp\mu$ points dont $m(p-1)\mu$ appartiennent à l'intersection de v et de φ. Il reste donc $m\mu$

points. La courbe χ passe, en outre, au point O, et la somme des ordres de χ, quand le point (d, ε) est placé successivement sur les différentes branches de φ, à distance du 1er ordre de O, est $n\omega$. Donc le point O compte pour $n\omega$ intersections de φ et de χ. Donc la droite conique considérée réduit de $n\omega$ le nombre des coniques du système satisfaisant à la condition donnée. Donc si Ω est la somme des nombres ω analogues pour toutes les droites coniques du système (S), le nombre des coniques propres satisfaisant à la condition donnée est $N = m\mu - n\Omega$. En appelant ν le nombre des coniques qui touchent une droite, on a $\nu = 2\mu - \Omega$. Donc, en général, on a $N = (m - 2n)\mu + n\nu$, équation qui exprime un théorème célèbre, dû à M. Chasles.

Pour le cas d'un système de surfaces du 2me ordre, on parviendra au résultat connu en suivant une marche analogue. Les surfaces non propres à éliminer sont les surfaces réduites à un plan, et les surfaces réduites à deux plans. On considérera d'abord les premières relativement à la condition de contact avec une droite, et on obtiendra la relation $\nu = 2\mu - \Omega$, ν étant la 2me caractéristique du système. En désignant par ρ le nombre des surfaces du système qui touchent un plan, on reconnaîtra que ce nombre est égal à $3\mu - 2\Omega$, moins le nombre afférent aux surfaces réduites à deux plans, ou $\rho = 3\mu - 2\Omega - \Omega'$. Enfin, pour une autre condition, on obtiendra

$$N = m\mu - n\Omega - r\Omega' = (m - 2n + r)\mu + (n - 2r)\nu + r\rho,$$

équation qui exprime un autre théorème de M. Chasles.

Enfin, de la même manière, on démontrera aisément que le nombre des complexes indécomposables du 1er ordre, à n dimensions du 2me degré, d'un système, qui satisfont à une condition, s'exprime par la même formule à 3 termes, attendu qu'il n'y a encore que deux espèces de complexes non propres à éliminer.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que les mêmes raisonnements permettent de prévoir les résultats qu'on obtiendrait si l'on voulait éliminer certaines familles de courbes propres, d'un système (S), du nombre des solutions du problème proposé. Admettons, par exemple, qu'un système (S) de coniques dans le plan contienne des cercles. Cherchons maintenant les coniques du système qui coupent une droite donnée sous des angles supplémentaires. Tous les cercles du système satisfont à cette condition. Le nombre des coniques, différentes des cercles, qui y satisfont, est donc moindre que dans le cas général. On reconnaîtra aisément qu'il est généralement égal à μ. Dans le cas actuel, il sera $\lambda = \mu - \Omega''$. Ici le nombre Ω'' désigne non pas le nombre des cercles du système, mais un nombre qui dépend de la manière dont les cercles existent dans le système, et qui est, de tout point, analogue aux nombre Ω et Ω' ci-dessus.

Si, maintenant, on considère une autre condition qui soit satisfaite par tous les cercles, on trouvera que le nombre des coniques, autres que les cercles appartenant au système (S), et qui y satisfont, est

$$N = \alpha\mu + \beta\nu - q\Omega'' = (\alpha - q)\mu + \beta\nu + q\lambda.$$

On aura donc à considérer une caractéristique λ de plus. Et, en général, chaque famille que l'on voudra éliminer donnera lieu à une caractéristique de plus.

Les mêmes problèmes relatifs à des systèmes de degré plus élevé peuvent être traités par la même méthode. Mais ce sujet exige des développements que j'espère pouvoir présenter en une autre occasion.

Les complexes à Q dimensions d'ordre inférieur à $Q-1$ s'appliquent, comme ceux d'ordre $Q-1$, à la représentation des conditions qui existent entre les coefficients d'une courbe plane variable. Si, entre les Q coefficients de la courbe

$$S = a_1 x_q + a_2 x^{q-1} y + \ldots + a_{Q-1} x + a_Q y - 1 = 0,$$

il y a seulement $Q-i$ relations, la courbe S engendre un complexe de courbes, $(S)_{Q-i}$. Ce complexe de courbes sera représenté par un complexe d'ordre $Q-i$, C_{Q-i}, à Q dimensions, $a_1, a_2, \ldots, a_Q$, dans lequel les points à l'infini forment un complexe irréductible d'ordre $Q-i+1$. Car l'origine des coordonnées (x,y) étant quelconque, et le complexe $(S)_{Q-i}$ étant censé indécomposable, il en est de même du complexe, d'ordre supérieur d'une unité, formé par les courbes S qui passent à l'origine des coordonnées. Le degré du complexe C_{Q-i} marque le nombre des courbes S qu'on peut mener par i points. C'est la 1re caractéristique de $(S)_{Q-i}$. On voit que si l'on astreint les courbes S à faire partie de deux complexes $(S)_{Q-i}$ et $(S)_{Q-i'}$ donnés, leur ensemble constituera un complexe d'ordre $2Q-i-i'$, représenté par l'intersection de C_{Q-i} et $C_{Q-i'}$. La 1re caractéristique de ce complexe est donc le produit de celles des complexes considérés. Dans le cas où la somme des ordres des deux complexes est égale à Q, le produit est le nombre des courbes communes aux deux complexes. Ces résultats doivent être modifiés si les complexes contiennent des courbes non propres. Mais on peut, dès à présent, énoncer ce théorème :

Théorème VII. — *Q étant le nombre des conditions nécessaires pour déterminer des courbes S sur le plan, si l'on considère deux complexes de ces courbes assujetties respectivement à i et à i' conditions, et dont l'un ne contienne aucune courbe non propre, le produit des 1res caractéristiques de ces deux complexes marque : 1° si $i+i'$ est égal à Q, le nombre des courbes qui leur sont communes ; 2° si $i+i'$ est inférieur à Q, la 1re caractéristique du système ou du complexe fourni par ces courbes.*

Tout complexe de courbes, de 1re caractéristique égale à l'unité, est représenté par un complexe du 1er degré, dans lequel, son ordre étant j, j coordonnées s'expriment linéairement en fonction des $Q-j$ autres. Par suite, ce complexe de courbes, qu'on peut appeler *complexe linéaire*, est représenté par une équation de la forme

$$S = S' + a_1 S'' + \ldots + a_{Q-j+1} S^{Q-j+1} = 0,$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}$ sont des arbitraires. La courbe $S = 0$ est une courbe quelconque du complexe.

Soit maintenant un complexe de 1re caractéristique égale à 2, il est représenté par un complexe

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}) = 0, \quad a_{Q-j+2} = \frac{u_{Q-j+2}}{V}, \ldots,$$

dont le degré est 2. Par suite, le degré φ est 2. Or il est aisé de voir que le complexe du 1er ordre et du 2me degré à $Q-j+1$ dimensions, $\varphi = 0$ ne peut contenir un complexe double d'ordre 2 sans se décomposer. Donc les coordonnées de ce complexe, autres que $a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}$, s'expriment linéairement en fonctions de ces dernières. Par suite, l'équation générale des courbes du complexe est

$$S = S' + a_1 S'' + \ldots + a_{Q-j+1} S^{Q-j+1} = 0,$$

dans laquelle les $Q-j+1$ arbitraires a sont liées par la relation $\varphi = 0$. Donc :

Théorème VIII. — *Tout complexe de courbes, dont la 1re caractéristique est 2, est contenu dans un complexe linéaire d'ordre inférieur d'une unité.*

Dans le cas d'un complexe d'ordre $Q-2$, c'est-à-dire formé par des courbes contenant 2 arbitraires, la fonction φ ne contient que 3 dimensions. Égalée à zéro, elle représente une surface. Toutes les fois que cette surface ne contient pas de ligne double, le complexe est contenu dans un complexe linéaire d'ordre $Q-3$. Si cette surface est réglée, c'est-à-dire engendrée par une série de droites, le complexe peut être engendré par une série de faisceaux $S' + aS'' = 0$. Donc, si la 1re caractéristique est 2, c'est-à-dire si la surface φ est du 2me degré, on a :

Théorème IX. — *Tout complexe de courbes d'ordre $Q-2$ et de 1re caractéristique 2, peut être engendré de deux manières différentes par une série de faisceaux.*

Si la 1re caractéristique du complexe d'ordre $Q-2$ est égale à 3, la surface φ est du 3me degré. Suivant qu'elle a ou qu'elle n'a pas de droite double, elle est ou n'est pas réglée. Donc :

Théorème X. — *Les complexes de courbes d'ordre $Q-2$ et de 1re caracté-*

ristique égale à 3 sont de deux espèces : les uns sont contenus dans un complexe linéaire d'ordre Q — 3, *et contiennent, en général,* 27 *faisceaux ; les autres sont engendrés par une suite de faisceaux.*

Je me bornerai, pour le moment, à ces quelques conséquences si faciles de la théorie ébauchée au début de ce travail. Il est entendu que ces derniers théorèmes s'appliquent aussi aux complexes de surfaces, et aux complexes de complexes du 1er ordre à n dimensions. On voit, par les applications ci-dessus, que la considération des complexes de courbes donne une interprétation très-nette de la géométrie à n dimensions.

Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur ; par M. Saltel.

(Séance du 23 juillet 1873)

Tous les géomètres savent de quelle importance serait, dans la théorie des courbes d'ordre supérieur, la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires formés par ces courbes (*). Parmi les tentatives faites dans cette direction, on doit citer d'abord M. de Jonquières qui, le premier, et le seul jusqu'ici, a fait connaître une méthode générale permettant de déterminer ces nombres toutes les fois que les points donnés sont en nombre supérieur à $\frac{m(m-1)}{2}+1$ (**). En second lieu, on doit citer MM. Zeuthen et Maillard, dont les travaux sur les courbes du troisième ordre ont mérité les éloges les plus flatteurs du juge le plus autorisé en pareille matière (***).

L'objet de cette note est de montrer que le *principe arguesien unicursal* enseigne à déterminer les caractéristiques des courbes qui sont *termes* d'une *hiérarchie arguesienne*, pourvu que, parmi les $\frac{m(m+3)}{2}-1$ conditions données, il y ait trois points dont la somme des degrés de multiplicité soit supérieure au degré de la courbe donnée.

L'esprit qui préside à cette nouvelle méthode est des plus simples. Supposons qu'il s'agisse de connaître, par exemple, les caractéristiques des sys-

(*) « Ce qui manque principalement pour que la théorie des courbes d'ordre supérieur soit aussi complète, ou du moins aussi avancée que celle des coniques, c'est de connaître les caractéristiques des systèmes élémentaires de chaque ordre de courbes. » Chasles, *Comptes rendus.*

(**) Voir le mémoire de M. de Jonquières intitulé : *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes.*

(***) Voir les *Comptes rendus* de l'année 1872.

têmes élémentaires formés par les courbes du quatrième ordre pourvues de trois points doubles donnés. Considérons le système déterminé par ces trois points doubles, par p points simples, et par d droites (*) ; supposons en outre le problème résolu et les courbes tracées. Si l'on transforme ces courbes, en prenant pour triangle de référence les trois points doubles, toutes ces courbes se transformeront en des coniques, et les d droites et les p points se transformeront en d coniques passant par les trois points doubles et en p points (**). Le problème se transforme donc lui-même en cet autre, résolu dans la théorie des coniques : *Combien y a-t-il de coniques tangentes à d coniques données et passant par p points donnés*. La question proposée est bien, comme on voit, entièrement résolue.

Remarque I. — Les *courbes exceptionnelles* résultent évidemment des courbes exceptionnelles du système transformé, et réciproquement; d'ailleurs puisque à deux courbes tangentes en un point a correspondent deux courbes tangentes au point correspondant a', les *sommets* doivent se correspondre deux à deux. Les considérations précédentes permettent donc de répondre d'une multitude de manières nouvelles au *desideratum* exprimé par M. Chasles dans les *Comptes rendus*, t. LXIV : « D'après les considérations précédentes, je désirerais former des systèmes de courbes du quatrième ordre, dans lesquels une des courbes serait une conique double, et où l'on reconnaîtrait la nécessité de regarder certains points comme des *sommets* par lesquels passeraient des tangentes de la courbe... » Il suffira, pour cela, de considérer dans le système transformé une droite double satisfaisant aux conditions exigées ; sa transformée sera une conique double répondant à la question. Bien plus, si l'on considère une conique voisine de la conique infiniment aplatie, et qu'on la transforme, on obtiendra l'image de la courbe du quatrième ordre voisine de la conique double.

Remarque II. — Il est bien évident que les raisonnements précédents s'appliquent à toutes les courbes qui sont termes de hiérarchies, et que la recherche de leurs caractéristiques se ramène à la recherche de ces mêmes nombres dans des courbes de degré inférieur.

Remarque III. — Il est important de remarquer que, dans un grand nombre de cas, la méthode de M. de Jonquières s'applique alors que la nôtre ne s'applique pas et réciproquement. Nous allons indiquer les déterminations que font connaître les deux méthodes combinées, appliquées aux courbes du quatrième ordre :

1° Courbes à trois points doubles .... tous les systèmes,
2° Courbes à un point triple ..... tous les systèmes à l'exception de deux,

(*) Il est bien entendu que l'on doit avoir $p + d = 5$.
(**) Voir notre mémoire *Sur le principe arguesien unicursal*. Paris, Gauthier-Villars.

3° Courbes à deux points doubles ..... tous les systèmes à l'exception d'un seul.

4° Courbes dépourvues de points doubles... les sept premiers systèmes.

Remarque IV. — Qu'on nous permette de faire ici, à l'occasion d'une application du principe arguesien, une remarque dont les conséquences peuvent devenir capitales. Selon M. Chasles (Voir *Comptes rendus*, t. LXII) : « Des propriétés qu'on démontre pour les courbes douées du nombre maximum de points doubles (ou d'un nombre de points multiples équivalent à ce maximum) se peuvent conclure celles des courbes dépourvues de points doubles. La question est de reconnaître dans chaque cas la modification causée par les points doubles : on remonte ainsi de la propriété trouvée pour une courbe à points doubles à l'expression de cette propriété pour une courbe pure (*). » Or le *principe arguesien unicursal* enseigne que toute propriété générale des coniques se transforme en une propriété générale des courbes d'ordre supérieur affectées d'un nombre de points multiples équivalant à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles ; il semblerait donc que, s'il est possible de passer des propriétés des courbes unicursales aux courbes pures, le principe arguesien unicursal constitue une méthode générale pour passer des propriétés des coniques aux propriétés des courbes dépourvues de points multiples.

Sur la durée des oscillations du pendule composé; par M. de Saint-Germain.

(Séance du 23 juillet 1873)

Il n'y a pas lieu de chercher quelle forme il faut donner à un pendule composé, de masse déterminée m, pour rendre minimum la durée de ses oscillations, ou plutôt la longueur du pendule simple synchrone ; car on peut diminuer ces quantités autant qu'on veut en disposant la matière donnée sous forme d'un cylindre indéfiniment allongé renfermant l'axe de suspension. Mais il peut y avoir une solution finie quand on impose certaines conditions à la forme de la surface extérieure du pendule.

Pour que le pendule synchrone ou pendule composé soit minimum, il faut que si on ajoute sur une partie quelconque de sa surface une masse dm, en observant, bien entendu, les conditions imposées à cette surface, la

(*) On lit aussi dans le même tome des *Comptes rendus* : « Ce n'est pas seulement aux questions de contact que convient ce procédé de démonstration propre aux courbes dont les points se déterminent individuellement. Il est susceptible de très-nombreuses applications différentes. Nous aurons à dire aussi comment les théorèmes démontrés par cette méthode se généralisent et s'appliquent aux courbes de classe et d'ordre quelconques. »

longueur du pendule synchrone soit augmentée d'une quantité constante cdm; sinon, en ôtant de la matière aux parties du pendule donné où cette suppression serait le plus sensible pour la reporter en d'autres points où elle a moins d'effet, on réduirait la durée des oscillations. Soit donc $l = \frac{\mu}{ma}$ la longueur du pendule synchrone, a étant la distance du centre de gravité à l'axe, μ le moment d'inertie relatif à cet axe; quelle que soit la partie de la surface où l'on ajoute la masse dm, on aura

$$(1) \qquad dl = \frac{mad\mu - \mu d.am}{m^2a^2} = cdm.$$

Le pendule doit-il être un disque cylindrique d'épaisseur h ayant ses génératrices parallèles à l'axe, il faut répartir la masse dm le long d'une génératrice : soient r sa distance à l'axe, θ l'angle des plans menés suivant cet axe par le centre de gravité ou par la génératrice, on aura

$$d\mu = r^2dm, \quad d.ma = r\cos\theta\, dm.$$

L'équation (1) devient : $mar^2 - \mu r\cos\theta = cm^2a^2$.

La base du disque est un cercle. Soient R le rayon, ε la densité, on a

$$m = \pi R^2 h\varepsilon, \quad l = a + \frac{R^2}{2a};$$

R^2 étant connu, l aura sa valeur minimum $\sqrt{\frac{2m}{\mu h\varepsilon}}$ pour $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; c'est-à-dire que l'axe de suspension passe au milieu du côté du carré inscrit dans la base.

Considérons encore un solide de révolution oscillant autour d'une perpendiculaire à son axe; la masse dm devra être répartie le long de ce parallèle. Soient ρ son rayon, z la distance de son plan à l'axe de suspension, on aura

$$d\mu = \left(z^2 + \frac{1}{2}\rho^2\right) dm, \quad d.ma = zdm.$$

L'équation (1) donne : $ma\,(2z^2 + \rho^2) - 2\mu z = 2cm^2a^2$.

Le pendule prendra la forme d'un ellipsoïde aplati ayant α pour demi-axe de symétrie, $\alpha\sqrt{2}$ pour rayon équatorial. Alors

$$m = \frac{8}{3}\pi\alpha^3\varepsilon, \quad l = a + \frac{3}{5}\frac{\alpha^2}{a};$$

α est connu, et l a sa valeur minimum $\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\varepsilon}}$ pour $a = \alpha\sqrt{\frac{3}{5}}$. On voit où doit passer l'axe de suspension, et aussi comment on pourra étudier les pendules d'autres formes.

Sur le déplacement d'un solide invariable ; par M. Halphen

(Séance du 23 juillet 1875)

Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer la position, dans l'espace, d'un solide donné, étant six, l'étude des déplacements d'un solide peut être partagée en six cas distincts, suivant que ce corps est assujetti à cinq, quatre, ..., une condition, ou est entièrement libre.

Le cas où les conditions sont au nombre de cinq a donné lieu à une théorie trop connue pour qu'il soit utile d'en rappeler ici les résultats. Les cas où les conditions sont au nombre de quatre ou de trois ont donné lieu à d'élégants théorèmes dus à M. Mannheim, et sur lesquels je vais revenir. Je donne ici des théorèmes analogues pour les autres cas, en suivant une marche uniforme qui s'applique également à tous, à l'exception du premier.

Rappelons d'abord un résultat bien connu. Soient, dans un solide de position donnée, x, y, z, et ξ, η, ζ les coordonnées de deux points de ce corps relativement à des axes rectangulaires fixes dans l'espace, le premier point étant considéré comme variable et le second comme fixe dans le corps. Soit t_1 une variable dont dépend la position du corps. Si on écarte le solide infiniment peu de sa position, en faisant varier t_1, on a

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= \frac{d\xi}{dt_1} + c_1(y-\eta) - b_1(z-\zeta),\\ \frac{dy}{dt_1} &= \frac{d\eta}{dt_1} + a_1(z-\zeta) - c_1(x-\xi),\\ \frac{dz}{dt_1} &= \frac{d\zeta}{dt_1} + b_1(x-\xi) - a_1(y-\eta). \end{aligned}$$

Dans ces relations, a_1, b_1, c_1 sont des constantes relativement au point (x, y, z) considéré. Les trois plans, représentés par les équations obtenues en égalant à zéro les trois dérivées $\frac{dx}{dt_1}$, $\frac{dy}{dt_1}$, $\frac{dz}{dt_1}$, sont parallèles à la droite $\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$. Il n'y a donc pas de point commun à ces plans. Par suite, dans le mouvement imprimé au corps, aucun point n'est immobile. Ad-

mettons maintenant que la position du corps dépende d'autres variables, t_2, t_3, ... En faisant varier séparément chacune d'elles, on obtiendra des relations analogues aux relations (1), que nous figurerons en affectant, dans les relations (1), les constantes a, b, c du même indice que la variable correspondante. Si d'ailleurs on fait varier simultanément les différentes variables, on a

$$dx = \frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 + \frac{dx}{dt_3} dt_3 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En posant donc

$$\begin{aligned} a_1\, dt_1 + a_2\, dt_2 + a_3\, dt_3 + \ldots &= \mathrm{A}, \\ b_1\, dt_1 + b_2\, dt_2 + b_3\, dt_3 + \ldots &= \mathrm{B}, \\ c_1\, dt_1 + c_2\, dt_2 + c_3\, dt_3 + \ldots &= \mathrm{C}, \end{aligned}$$

on aura

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx &= d\xi + \mathrm{C}(y - \eta) - \mathrm{B}(z - \zeta), \\ dy &= d\eta + \mathrm{A}(z - \zeta) - \mathrm{C}(x - \xi), \\ dz &= d\zeta + \mathrm{B}(x - \xi) - \mathrm{A}(y - \eta). \end{aligned}$$

Les trois plans, dont on obtient les équations en égalant à zéro ces trois différentielles, sont parallèles à la droite $\frac{x}{\mathrm{A}} = \frac{y}{\mathrm{B}} = \frac{z}{\mathrm{C}}$. Par suite, comme précédemment, aucun point n'est immobile. Mais si l'on choisit les variations de t_1, t_2, t_3,... de manière à vérifier l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{A}d\xi + \mathrm{B}d\eta + \mathrm{C}d\zeta = 0,$$

ces trois plans se coupent suivant une même droite dont tous les points sont alors immobiles.

Quand les variables sont au nombre de deux, l'équation (3) détermine le rapport qui doit exister entre dt_1 et dt_2 pour que cette condition soit satisfaite. Or l'équation (3) est du deuxième degré relativement à $\frac{dt_1}{dt_2}$. On peut donc satisfaire à la condition d'immobilité d'une droite de deux manières. Quand les variables sont en nombre supérieur à deux, l'équation (3) a lieu entre plusieurs inconnues, et admet une infinité de systèmes de solutions. En résumé, dès que le nombre n des variables surpasse l'unité, il est toujours possible de trouver des systèmes $(\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_n^1)$, $(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2)$,..., $(\omega_1^n, \omega_2^n, \ldots, \omega_n^n)$ de n nombres chacun, et au nombre de n, tels qu'en faisant

$$\frac{dt_1}{\omega_1^i} = \frac{dt_2}{\omega_2^i} = \ldots = \frac{dt_n}{\omega_n^i}.$$

une droite du solide reste immobile.

Substituons maintenant aux variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les variables $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, définies par les relations linéaires

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_n^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \ldots & \omega_n^1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix}, \ldots, \theta_n = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \ldots & \omega_n^1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_n^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{vmatrix};$$

on obtiendra le mouvement le plus général du solide en faisant varier successivement $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Or, si l'on suppose nulles les différentielles de toutes ces variables, à l'exception de celle de θ_i, on en conclut

$$\frac{dt_1}{\omega_1^i} = \frac{dt_2}{\omega_2^i} = \ldots = \frac{dt_n}{\omega_n^i};$$

c'est-à-dire qu'une droite du corps est immobile. Ainsi le déplacement le plus général du corps s'obtient par n rotations arbitraires autour de n droites restant les mêmes.

Appliquons maintenant ces résultats aux différents cas. S'il y a deux variables seulement, les deux axes de rotation sont déterminés par l'équation (3). Donc :

Théorème I. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à quatre conditions s'obtiennent par deux rotations autour de deux droites déterminées.*

Ce théorème est dû à M. Mannheim (*Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable*, p. 32). On en conclut que *les points de ces deux axes décrivent des éléments de lignes, tandis que les autres points décrivent des éléments de surfaces.*

Ce corollaire peut facilement être démontré directement par le calcul. Pour faciliter l'écriture, j'emploierai, dans la suite, la notation suivante : $u, v, \ldots, w$ étant n fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, je représenterai par $(u_1\, v_2 \ldots w_n)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dt_1} & \frac{du}{dt_2} & \ldots & \frac{du}{dt_n} \\ \frac{dv}{dt_1} & \frac{dv}{dt_2} & \ldots & \frac{dv}{dt_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dw}{dt_1} & \frac{dw}{dt_2} & \ldots & \frac{dw}{dt_n} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, dans le cas de deux variables, les points des deux axes sont

ceux dont les coordonnées, mises pour x, y, z dans les équations $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, ou

$$\frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 = 0,$$
$$\frac{dy}{dt_1} dt_1 + \frac{dy}{dt_2} dt_2 = 0,$$
$$\frac{dz}{dt_1} dt_1 + \frac{dz}{dt_2} dt_2 = 0,$$

rendent ces équations possibles, en y considérant $\frac{dt_1}{dt_2}$ comme inconnue. Par suite, les coordonnées des points des axes satisfont aux équations simultanées : $(x_1\, y_2) = 0$, $(y_1\, z_2) = 0$, $(z_1\, x_2) = 0$. Il est facile de vérifier qu'en effet les paraboloïdes représentés par ces trois équations se coupent suivant les deux droites définies ci-dessus. Considérons maintenant l'un de ces paraboloïdes, le premier, par exemple, qui a pour plan directeur le plan des xy ; menons, par chaque point M du corps, une parallèle à une droite fixe, et soient p, p' les deux points où cette parallèle rencontre le paraboloïde. Les produits $Mp.Mp'$ sont proportionnels aux valeurs du déterminant $(x_1\, y_2)$, où l'on met, pour x, y, z, les coordonnées de chaque point M. D'ailleurs, $dt\, dt_1\, (x_1\, y_2)$ est la projection, sur le plan des $x\, y$, de l'élément de surface décrit par le point M. On a donc ce théorème, qui comprend le corollaire ci-dessus :

Théorème II. — *Les projections, sur un plan donné, des éléments superficiels, décrits par les points du corps, sont proportionnelles aux produits des segments interceptés, sur des sécantes parallèles issues de ces points, par un paraboloïde passant par les deux axes, et ayant le plan donné pour plan directeur.*

Supposons maintenant qu'il y ait trois variables. Dans ce cas, on peut, par l'équation (3), déterminer trois axes, dont chacun renferme une arbitraire. Ces axes forment donc une surface gauche, dont on obtient facilement l'équation comme ci-dessus, en remarquant que les coordonnées de chacun de ses points rendent possibles les trois équations simultanées : $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, qui ne renferment que deux inconnues $\frac{dt_1}{dt_2}$, $\frac{dt_1}{dt_3}$. L'équation de cette surface est donc : $(x_1\, y_2\, z_3) = 0$. En effectuant les calculs, on s'apercevra que cette équation s'abaisse au deuxième degré. On peut aussi s'assurer de cet abaissement, en remarquant que le déterminant $(x_1 y_2 z_3)$, multiplié par $dt_1\, dt_2\, dt_3$, représente l'élément de volume décrit par le point dont les coordonnées sont x, y, z. Si l'on suppose que les conditions données soient la fixité d'un point, chaque point du corps décrit seulement un élément superficiel. Par suite, le déterminant ci-dessus est nul, si toutes les dérivées

partielles de ξ, η, ζ s'annulent. Or, par cet évanouissement, ce déterminant se réduit aux termes du troisième degré en $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, et il n'a disparu que des termes de degré inférieur à 3. Donc les premiers sont toujours nuls. Ainsi $(x_1\, y_2\, z_3)=0$ est un hyperboloïde dont chaque génératrice peut être prise pour un des trois axes de rotation. Donc :

Théorème IV. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à trois conditions s'obtiennent par trois rotations autour de trois mêmes droites prises arbitrairement parmi les génératrices d'un hyperboloïde. Les points de cet hyperboloïde décrivent des éléments superficiels.*

Ce théorème a été énoncé par M. Mannheim (*loc. cit.*, p. 37). Mais la démonstration donnée par cet auteur ne s'applique qu'au cas où les trois conditions sont de nature à être ramenées chacune au mouvement d'un point sur une surface. D'après ce qui vient d'être dit, il y a toujours, dans un corps assujetti à trois conditions, une infinité de points qui se meuvent sur des surfaces. Le mouvement peut donc être défini par celui de trois de ces points ; mais cette propriété n'est pas évidente *a priori*. Comme plus haut, on peut encore dire que :

Théorème V. — *Les volumes décrits par les points du corps sont proportionnels aux produits des segments interceptés sur des sécantes parallèles, issues de ces points, par l'hyperboloïde des axes.*

Supposons actuellement qu'il y ait quatre variables. L'équation (3) laisse subsister deux arbitraires pour la détermination de chaque axe de rotation. Ces droites forment donc une congruence. Pour trouver celles qui passent par un point donné, il suffit de déterminer les rapports de dt_1, dt_2, dt_3, dt_4 par les équations simultanées $dx=0$, $dy=0$, $dz=0$, où x, y, z sont les coordonnées du point donné. On a ainsi trois équations linéaires. Donc, *par un point passe une droite de la congruence*. On trouvera aussi facilement qu'*il y a une droite de la congruence dans un plan donné*. Par suite, les droites de la congruence rencontrent deux droites fixes. J'admets ici la connaissance de cette propriété de la congruence d'ordre et de classe 1. Il est d'ailleurs bien facile de montrer directement ici que les droites ci-dessus rencontrent deux droites fixes.

En effet, les droites de la congruence sont indéterminées si on les astreint à passer par un point dont les coordonnées annulent à la fois les quatre déterminants

$$(x_1y_2z_3),\ (x_2y_3z_4),\ (x_3y_4z_1),\ (x_4y_1z_2).$$

Chacun de ces déterminants égalé à zéro représente un hyperboloïde, d'après une remarque faite plus haut. Remarquons maintenant que les deux droites communes aux trois paraboloïdes obtenus en égalant à zéro (x_1y_2), (y_1z_2), $(z_1\, x_2)$ appartiennent à deux de ces hyperboloïdes, savoir : $(x_1\, y_2\, z_3)=0$ et $(x_4\, y_1 z_2)=0$. Désignons ces deux droites par $(1, 2)$ et $(1, 2)'$. Nous avons

six pareils couples de deux droites : (2, 3) et (2, 3)′, (3, 4) et (3, 4)′, etc. Les deux hyperboloïdes $(x_1\, y_2\, z_3) = 0$ et $(x_4\, y_1\, z_2) = 0$ se coupent suivant deux autres droites qui rencontrent *dix* des douze droites ci-dessus. Il en résulte que ces deux droites appartiennent aux deux autres hyperboloïdes. Ainsi les quatre hyperboloïdes ont deux droites communes, et ces droites sont rencontrées par tous les axes. On voit immédiatement que la propriété des points de ces deux droites, de faire évanouir à la fois les quatre déterminants ci-dessus, peut être interprétée en disant que ces points décrivent des volumes nuls. Il est évident, en effet, que ces droites sont normales à tous les déplacements de leurs points. Par conséquent, ces points décrivent des éléments superficiels. On peut donc dire que :

Théorème VI. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à deux conditions s'obtiennent par quatre rotations autour de quatre mêmes droites prises arbitrairement parmi celles qui rencontrent deux droites déterminées. Les points de ces deux dernières droites décrivent des éléments superficiels.*

S'il y a cinq variables, l'équation (3) laisse subsister, dans chaque axe de rotation, trois arbitraires. Ces droites forment un complexe. Cherchons celles de ces droites qui passent par un point (x, y, z) et sont dans un plan contenant ce point :

$$M(X - x) + N(Y - y) + P(Z - z) = 0.$$

La condition que la droite passe par le point donné fournit, comme précédemment, trois équations linéaires et homogènes entre les cinq différentielles dt. On exprimera que la droite est, en outre, contenue dans le plan donné par l'équation :

$$MA + NB + PC = 0,$$

qui est aussi linéaire et homogène. Par suite, il y a une droite satisfaisant aux conditions données. Donc :

Théorème VII. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à une condition s'obtiennent par cinq rotations autour de cinq mêmes droites, prises arbitrairement dans un complexe linéaire déterminé.*

Si la condition donnée est celle du mouvement d'un point sur une surface, le complexe est formé des droites qui rencontrent la normale à cette surface, et les points de cette normale décrivent des éléments superficiels. Mais ce fait ne se produit pas en général. On verra sans peine qu'il faut et qu'il suffit, pour qu'il se produise, qu'il y ait une droite commune aux dix hyperboloïdes obtenus en égalant à zéro les dix déterminants $(x_i\, y_j\, z_k)$, où les nombres i, j, k sont 1, 2, 3, 4 ou 5.

Enfin, s'il y a six variables, on parvient immédiatement à ce théorème :

Théorème VIII. — *Tous les déplacements d'un solide libre s'obtiennent par six rotations autour de six mêmes droites prises arbitrairement.*

En terminant cette note, je ferai remarquer que l'on peut parvenir rapidement aux résultats qu'elle renferme, en faisant usage de deux théorèmes que j'ai communiqués à l'Académie des sciences en 1871 et en 1872, et que j'ai déjà eu l'occasion de signaler à notre Société. Ces théorèmes sont relatifs aux droites communes à des complexes ou des congruences données. On en déduit immédiatement, dans les cas les plus simples : 1° que l'ordre et la classe de la congruence formée par les droites communes à deux complexes linéaires sont l'unité, ce qui d'ailleurs est évident *a priori;* on en conclut aisément que cette congruence est formée par les droites rencontrant deux droites fixes; 2° que les droites communes à trois complexes linéaires forment un hyperboloïde; 3° que les droites communes à quatre complexes linéaires sont au nombre de *deux.*

Remarquons maintenant que, pour un déplacement dépendant d'une seule variable, les droites normales aux déplacements de leurs points forment un complexe linéaire. En prenant ce point de départ, dû à M. Chasles, nous en concluons que, pour les déplacements dépendant de deux variables, les droites normales aux déplacements de leurs points sont les droites communes à deux complexes linéaires. Elles rencontrent donc deux droites fixes, ce qui est le théorème de M. Mannheim. Pour les déplacements dépendant de trois variables, les droites normales aux déplacements de leurs points sont les droites communes à trois complexes linéaires. Ces droites forment donc un hyperboloïde. C'est le théorème IV, ou, du moins, la seconde partie de ce théorème, d'où l'on peut déduire la première. Pour les déplacements dépendant de quatre variables, on a de même deux droites normales à tous les déplacements de leurs points. C'est la seconde partie du théorème VI. J'ajoute que cette théorie pourrait facilement être faite par la considération de la composition des rotations; mais je me borne à cette simple indication.

Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ en produit illimité;
par M. de Saint-Germain.

(Séance du 17 décembre 1873)

Considérons la fonction définie par Jacobi au moyen d'une série :

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,$$

où nous dirons seulement que q est < 1. On peut exprimer la fonction

comme produit d'un nombre infini de facteurs, de la forme

$$1 - 2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K} + q^{4n+2},$$

avec un facteur indépendant de x, et que nous désignerons par $\varphi(q)$. Une simple remarque permet de déterminer ce facteur plus aisément que ne l'a fait Jacobi. Égalons les expressions de $\Theta(x)$, ou mieux de $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, en série et en produit illimité :

$$1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$
$$= \varphi(q)(1 - 2q\cos 2x + q^2)(1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\ldots.$$

Dans cette identité, je fais $x = \frac{\pi}{4}$; il vient

$$(1)\quad 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \ldots = \varphi(q)(1 + q^2)(1 + q^6)(1 + q^{10})\ldots.$$

Faisons au contraire $x = 0$, et changeons q en q^4, nous aurons

$$1 - 2q^4 + 2q^{16} - \ldots = \varphi(q^4)(1 - q^4)^2(1 - q^{12})^2(1 - q^{20})^2\ldots.$$

Le premier membre est le même que dans l'équation (1), et le second est divisible par $(1+q^2)(1+q^6)\ldots$; on a donc, en supprimant ce facteur commun,

$$\varphi(q) = \varphi(q^4)(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^{12})(1 - q^{10})(1 - q^{20})\ldots.$$

Nous trouvons un produit de facteurs de la forme $1 - q^{2n}$, où n a toutes les valeurs de 1 à ∞, sauf celles qui sont multiples de 4. Si on multiplie les deux membres par $(1 - q^8)(1 - q^{16})\ldots$, on n'aura plus de lacunes, et on pourra écrire, n variant de 1 à ∞,

$$\varphi(q)\Pi(1 - q^{8n}) = \varphi(q^4)\Pi(1 - q^{2n});$$

d'où

$$\frac{\varphi(q)}{\Pi(1 - q^{2n})} = \frac{\varphi(q^4)}{\Pi(1 - q^{8n})} = \frac{\varphi(q^{16})}{\Pi(1 - q^{32n})} = \ldots.$$

On aura une suite de rapports égaux, dont les dénominateurs tendent vers l'unité; il en est de même du numérateur, car si dans l'équation (1) on remplace q par $q^{4\mu}$, il est évident que, pour μ infini, $\varphi(q^{4\mu}) = 1$. On a donc

$$\varphi(q) = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8)\ldots.$$

C'est la formule de Jacobi.

Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice; par M. Saltel.

(Séance du 14 janvier 1874)

Théorème I. — *Si une surface Σ admet une droite A, toutes les courbes de la surface tangentes à cette droite en un de ses points a ont en ce point même plan osculateur.*

Ce plan n'est autre que le plan tangent en *a* à Σ.

Corollaire. — Ce théorème permet, dans une foule de cas, de déterminer facilement le *plan osculateur* en un point d'une courbe gauche; voici, par exemple, la construction de ce plan dans le cas particulier où la courbe est une *cubique* déterminée par sa tangente *a*T, son point de contact *a*, et quatre points 1, 2, 3, 4.

Joignez le point a aux quatre points 1, 2, 3, 4, *considérez les droites* *a*T, (*a*1), (*a*2), (*a*3), (*a*4), *coupez-les par un plan arbitraire, soient t*, 1′, 2′, 3′, 4′ *les points obtenus; déterminez la tangente* θ *au point t à la conique définie par les cinq points t*, 1′, 2′, 3′, 4′ ; *le plan* *a*Tθ *est le plan demandé.*

Théorème II. — *Si une surface Σ admet une section circulaire c, toutes les courbes de la surface osculatrices à ce cercle en un de ses points a ont en ce point même sphère osculatrice.*

Cette sphère n'est autre que la sphère passant par *c* et tangente en *a* à Σ.

Corollaire. — Ce théorème permet de déterminer facilement, dans une foule de cas, la sphère osculatrice en un point d'une courbe gauche; voir, par exemple, la construction de cette sphère dans le cas particulier où la courbe est cubique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1873).

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 14 JANVIER 1874

PRÉSIDENCE DE M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. Civiale, ancien élève de l'École polytechnique, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

Le président donne lecture d'une lettre de M. Henri Sainte-Claire Deville, annonçant que le Ministère de l'instruction publique souscrit à vingt exemplaires du *Bulletin* de la Société.

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Saltel, d'une note *Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice.*

La Société procède, par la voie du scrutin, au remplacement des membres sortants du Bureau et du Conseil, qui se trouvent ainsi constitués :

Président.	M. LAFFON DE LADÉBAT.
Vice-Présidents.	M. RESAL. M. ÉLIE DE BEAUMONT. M. BIENAYMÉ. M. DE LA GOURNERIE.
Secrétaires.	M. BRISSE. M. LAGUERRE.
Vice-Secrétaires.	M. LÉVY (Albert). M. LAURENT.
Trésorier	M. ANDRÉ (Désiré).
Archiviste.	M. HOUBIGANT.
Membres du Conseil	M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LEVY (Maurice). M. MANNHEIM. M. PAINVIN. M. PROTCHE. M. SERRET (J.-A.).
Membres du Conseil non résidents.	M. AOUST (L'abbé). M. CLAYEUX. M. PARMENTIER. M. WEYR (Émile).

Sur la proposition écrite de plusieurs membres de la Société, M. Chasles est, à l'unanimité, proclamé *président honoraire.*

M. Bourget, au nom de la Commission des comptes, donne lecture de son rapport sur la gestion du trésorier.

Le Société, adoptant les conclusions du rapporteur, vote des remercîments à M. Désiré André.

SÉANCE DU MERCREDI 28 JANVIER 1874

PRÉSIDÉE PAR M. ÉLIE DE BEAUMONT

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Hermite, membre de l'Institut, à Paris; Marin, directeur de l'exploitation des chemins de fer de l'Est, à Paris; de Rancy, sous-directeur de la compagnie d'assurances *l'Aigle*, à Paris; Henry, ingénieur des ponts et chaussées, à Romorantin; Brémard, architecte, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur la résolution numérique des équations*.

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur la théorie des fonctions*.

M. Fouret communique à la Société une note *Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des solutions d'un système d'équations simultanées*.

SÉANCE DU MERCREDI 11 FÉVRIER 1874

PRÉSIDÉE PAR M. CHASLES

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. José Gonzalez, consul des États-Unis de Colombie, directeur de l'observatoire de Bogota.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Laguerre communique à la Société une note *Sur les normales abaissées d'un point donné sur une surface du second ordre*.

M. Halphen communique à la Société une note *Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques*.

M. Painvin communique à la Société une note *Sur les conditions que doit remplir une conique pour avoir un contact du 5e ordre avec une courbe d'ordre quelconque*.

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur la disposition géométrique d'une tablette de jeu des anciens Égyptiens*.

SÉANCE DU MERCREDI 25 FÉVRIER 1874

PRÉSIDÉE PAR M. ÉLIE DE BEAUMONT

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire communique, de la part de M. Turquan, une note *Sur l'intégration de quelques équations différentielles.*

Le secrétaire communique, de la part de M. H. Laurent, une note *Sur la théorie des roulettes gauches.*

M. Fouret communique à la Société une note *Sur les systèmes de courbes transcendantes.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur la théorie des courbes qui se correspondent point par point dans les surfaces gauches.*

SÉANCE DU MERCREDI 11 MARS 1874

PRÉSIDÉE PAR M. CHASLES

Le secrétaire donne lecture d'une lettre de M. Resal qui fait hommage à la Société d'une traduction inédite du mémoire de M. Adams sur la planète Neptune.

M. Jordan fait à la Société une communication *Sur les formes bilinéaires.*

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur les formes quadratiques.*

SÉANCE DU MERCREDI 25 MARS 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Resal fait part à la Société de la perte douloureuse qu'elle vient d'éprouver en la personne de son président, M. le vice-amiral Laffon de Ladébat, décédé à Paris, le 24 de ce mois. Sur l'invitation du ministre de la marine, l'un des vice-présidents de la Société tiendra l'un des cordons du poële pendant la cérémonie funèbre.

M. Painvin communique à la Société une note *Sur le contact des courbes et des coniques.*

M. Fouret communique à la Société un *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur un point de la théori du contact.*

SÉANCE DU MERCREDI 8 AVRIL 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Resal, en sa qualité de vice-président ayant représenté la Société aux obsèques de M. le vice-amiral Laffon de Ladébat, rend compte de sa mission.

Le secrétaire annonce que la Société royale astronomique de Londres, la Société mathématique de Londres, la Société royale d'Édimbourg, la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, acceptent le *Bulletin* en échange de leurs *Publications*.

M. Nicolaïdès fait hommage à la Société de ses *Analectes*.

Le secrétaire communique à la Société, de la part de M. Brocard, des *Propriétés nouvelles du quadrilatère et du triangle*.

M. Jordan communique à la Société un *Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires*.

M. Brisse communique à la Société la *Démonstration d'un théorème de Joachimsthal relatif à la théorie des normales aux coniques*.

M. Fouret communique à la Société une note *Sur quelques propriétés des épicycloïdes*.

M. Graindorge fait hommage à la Société de sa traduction de la *Théorie des fonctions elliptiques*, de Schlœmich, de son *Mémoire sur l'intégration des équations de la dynamique*, et de son *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du premier et du second ordre*.

SÉANCE DU MERCREDI 22 AVRIL 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. Édouard Lucas, professeur de mathématiques spéciales, à Moulins.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. Resal fait hommage à la Société d'une note de M. Transon *Sur une formule de Wronski*.

M. Darboux présente à cet sujet quelques observations.

M. Halphen communique à la Société une note *Sur les points singuliers et sur les développées des divers ordres des courbes algébriques*.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques; par M. Halphen.

(Séance du 11 février 1874)

Une des plus importantes propriétés que l'on rencontre, dès le début, dans l'étude des courbes algébriques planes, consiste en ce que toutes les courbes d'un degré donné sont des cas particuliers d'un même être géométrique, la courbe plane générale de ce degré. On conçoit donc immédiatement l'existence, pour toutes ces courbes, de propriétés communes et ne dépendant que d'une seule variable, le degré. C'est ainsi que le nombre des points d'inflexion, celui des sommets, celui des points de rencontre avec une ligne donnée, s'expriment par des fonctions du degré.

Pour les courbes gauches algébriques, il n'en est point de même. On ne connaît, en effet, aucun être géométrique qui comprenne, comme cas particuliers, toutes les courbes gauches d'un degré donné. On ne peut donc, pour aucune propriété des courbes gauches, si générale qu'elle soit, affirmer *a priori* qu'elle ne dépend que du degré. Il existe cependant de telles propriétés : c'est ainsi que le nombre des points de rencontre d'une courbe gauche avec une surface donnée ne dépend, quant à la courbe, que de son degré.

En avançant davantage dans l'étude des courbes gauches algébriques, on y a reconnu l'existence de plusieurs propriétés ne dépendant que de deux variables, le *degré* et le *nombre des points doubles apparents*. Mais il faut bien se garder de croire que toutes les courbes gauches, pour lesquelles ces deux nombres ont des valeurs données, soient des cas particuliers d'une seule et même courbe générale satisfaisant à cette même condition. Ce fait est, il est vrai, exact pour les degrés les plus simples. Mais dès qu'on envisage les courbes de degré un peu élevé, on en reconnaît facilement l'inexactitude, ainsi qu'on s'en convaincra par l'exemple suivant, choisi parmi les plus simples.

L'intersection complète de deux surfaces du troisième degré est une ligne du neuvième degré ayant, d'après une formule bien connue, 18 points doubles apparents. On reconnaît aisément que cette ligne est déterminée par 18 de ses points, c'est-à-dire qu'elle renferme 36 arbitraires. Désignons-la par la lettre C.

Considérons, d'autre part, la ligne C′, tracée sur un hyperboloïde et rencontrant les génératrices rectilignes de la surface respectivement en 6 et

en 3 points. Cette ligne, qui est aussi du 9me degré, possède aussi 18 points doubles apparents. D'après les formules bien connues qu'a données M. Chasles, elle renferme 27 arbitraires, l'hyperboloïde étant donné. Par suite, cette surface n'étant pas donnée, la ligne C′ renferme $27 + 9 = 36$ arbitraires.

Si l'on demande les courbes du 9me degré, sans singularités, et ayant 18 points doubles apparents, on obtient donc, par les courbes C et C′, deux solutions du problème. Ces solutions sont d'ailleurs les seules; elles diffèrent entre elles et ont le même degré de généralité, puisqu'elles renferment le même nombre d'arbitraires. Ces deux courbes ont en commun toutes les propriétés ne dépendant que de ces deux nombres, le degré et le nombre des points doubles apparents. Mais elles diffèrent à l'égard des autres. Elles diffèrent au point de vue du degré minimum des surfaces qui les contiennent. Elles diffèrent encore au point de vue du degré minimum des surfaces monoïdes qui y passent : pour la courbe C, ce degré est 5; pour la courbe C′, ce degré est égal à 6.

Il serait d'un très-grand intérêt de connaître le caractère général des propriétés des courbes qui ne dépendent que du degré et du nombre des points doubles apparents. La déterminaiton des formules relatives à ces propriétés en serait généralement rendue très-facile par le moyen des équations fonctionnelles.

Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer le degré de la surface engendrée par les droites qui rencontrent en trois points différents une courbe gauche algébrique. En admettant que ce degré ne dépende que de celui de la courbe et du nombre de ses points doubles apparents, on le détermine avec la plus grande facilité au moyen des équations fonctionnelles (Voyez Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, t. II, p. 528; Leipzig, 1865). Mais l'hypothèse n'étant nullement justifiée *a priori*, la démonstration n'a aucune valeur. Elle serait au contraire entièrement rigoureuse, et la plus rapide de toutes, si l'on possédait le moyen de reconnaître *a priori* que l'hypothèse est exacte.

Le degré de la surface dont il s'agit, ainsi que les formules relatives à beaucoup d'autres propriétés des courbes, ne dépendant que de leur degré et du nombre de leurs points doubles apparents, a été déterminé en toute rigueur par M. Zeuthen (*Annali di mat.*, ser. II, t. III). Je me propose de donner ici quelques autres formules, qui sont dans le même cas, et qui ne me paraissent pas avoir été publiées jusqu'à présent.

Je m'appuierai sur les deux lemmes suivants, dont la démonstration est si facile que je crois pouvoir me dispenser de la donner.

Lemme I. — *Par chaque point d'une courbe gauche algébrique passent deux séries de plans, relatifs à ce point. Soient m et m_1 les nombres respectifs de ces plans relatifs à un même point, et c et c_1 les classes respectives de leurs enveloppes. Soit enfin x le nombre des couples de plans des deux séries, rela-*

tifs à un même point, et qui coïncident. Les intersections des plans ae l'une et l'autre série, relatifs à un même point, forment une surface de degré $mc_1 + m_1c - x$.

Lemme II. — *Sur une surface réglée de degré p, considérons une courbe* Q, *de degré q, qui soit rencontrée en t points par les génératrices rectilignes de la surface, et par chaque point de laquelle passent* χ *génératrices. Soit de plus i le nombre des génératrices de la surface situées à l'infini. Par chaque point de* Q, *on mène les plans perpendiculaires aux génératrices qui y passent : la classe de l'enveloppe de ces plans est* $pt + q\chi - it(\chi + 1)$.

Appliquons le lemme II à une courbe Q, sans singularité, de degré q et de classe r, et à la surface développable dont elle est l'arête de rebroussement. Nous avons ici

$$t = 1,\ p = x,\ \chi = 1,\ i = 0.$$

Nous trouvons alors que la classe de l'enveloppe des plans normaux à Q est $q + r$, ce qui est bien connu.

Appliquons le lemme I à la même courbe, en considérant les deux séries des plans normaux et osculateurs. La classe de l'enveloppe de ces derniers est, comme on sait, égale à $3(r - q)$. D'ailleurs, il n'existe aucun point de la courbe où le plan normal et le plan osculateur coïncident. Donc on a

$$c = r + q,\ c_1 = 3(r - q),\ m = m_1 = 1,\ x = 0.$$

Par suite, le degré de la surface des normales principales est

$$c + c_1 = 4r - 2q.$$

Appliquons le lemme II à la courbe Q et à la surface de ses normales principales. Remarquons que la normale principale relative à un point à l'infini est, en général, à l'infini. Nous avons ici

$$t = 1,\ p = 4r - 2q,\ \chi = 1,\ i = q.$$

Nous trouvons ainsi la classe de l'enveloppe des plans rectifiants de Q, qui est égale à $4r - 3q$.

Ce dernier résultat s'obtient encore au moyen du lemme I. Considérons, en effet, les deux séries des plans osculateurs et rectifiants. On aura ici $c = 3(r - q)$, et c_1 sera inconnu. Mais on sait que le degré de la surface formée par leurs intersections, qui est la développable dont Q est l'arête de rebroussement, est égal à r. D'ailleurs le nombre x des points de Q où les deux plans coïncident est facile à déterminer. C'est, en effet, le nombre des plans osculateurs *isotropes*. Il resterait à montrer que chacun de ces plans ne figure que pour une unité dans le nombre x. Je ne m'arrêterai pas sur ce point, facile à élucider, et j'écrirai donc

$$x = 6(r - q),\quad c_1 + 3(r - q) = r + 6(r - q).$$

D'où

$$c_1 = 4r - 3q.$$

On obtiendra aussi de deux manières le degré de la surface engendrée par les binormales de Q :

1° Par le lemme I, en considérant les deux séries des plans normaux et rectifiants. Ils coïncident quand la tangente est *isotrope*; c'est-à-dire $2r$ fois. Le degré cherché est donc

$$(4r - 3q) + (q + r) - 2r = 3r - 2q.$$

2° Par le lemme II, en remarquant que q binormales sont à l'infini, et que, par suite, le degré cherché, diminué de q, reproduit la classe de l'enveloppe du plan osculateur. Donc cette classe $3(r - q)$, augmentée de q, est le degré cherché : $3r - 2q$.

Nous résumons ces résultats de la manière suivante :

Théorème. — *Pour une courbe gauche de degré q et de classe r, sans singularité,*

1° *L'enveloppe des plans rectifiants est de la classe $4r - 3q$,*

2° *La surface des normales principales est de degré $4r - 2q$.*

3° *La surface des binormales est de degré $3r - 2q$* (*).

J'ajoute encore que l'on peut aisément déterminer :

Le nombre des normales principales qui rencontrent de nouveau la courbe, et qui est égal à $(q - 1)(4q - 2r) - 3r$;

Le nombre des binormales qui rencontrent de nouveau la courbe, et qui est égal à $(q - 1)(3r - 2q) - r$;

Le nombre des droites à distance finie qui sont normales à la courbe en deux points différents, et qui est égal à $\frac{(q+r)(q+r-1)}{2} - 2r$.

Ce dernier résultat s'applique également aux courbes planes; on doit alors faire $r = q(q - 1)$.

Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques; par M. Fouret.

(Séance du 25 mars 1874)

I. Définition des systèmes généraux de courbes. — La notion des systèmes de courbes planes algébriques, introduite dans la science, il y a une

(*) Dans l'ouvrage précédemment cité, M. Fiedler donne, sans démonstration, pour les degrés de ces deux dernières surfaces, et dans un cas particulier, des évaluations inexactes.

dizaine d'années, par M. Chasles, a conduit, comme on le sait, l'illustre géomètre et ceux qui l'ont suivi dans cette voie, à des résultats fort importants.

Dans ce genre de recherches, on considère l'ensemble des courbes d'un même degré, d'ailleurs quelconque, satisfaisant à des conditions communes, en nombre inférieur d'une unité au nombre de conditions nécessaire pour déterminer de pareilles courbes.

L'ensemble de ces courbes forme ce que l'on appelle un système. Parmi ces courbes, il en existe nécessairement un nombre déterminé μ, passant par un point quelconque, et un nombre déterminé ν, tangentes à une droite quelconque. Ces deux nombres sont appelés les deux *caractéristiques* du système : ils le caractérisent en ce sens qu'ils permettent d'énoncer, sous une forme simple, une multitude de propriétés de ce système.

Or, parmi ces propriétés quelques-unes dépendent de l'ordre, de la classe, ou des particularités qui distinguent les courbes du système ; d'autres, au contraire, en sont complétement indépendantes, et s'expriment uniquement à l'aide des deux caractéristiques μ et ν. D'autre part, il arrive fréquemment que des systèmes de courbes, du même degré, ou de degrés différents, et satisfaisant à des conditions très-différentes, ont cependant les mêmes caractéristiques. Cette double remarque m'a suggéré l'idée de considérer comme des cas particuliers d'un système plus général tous les systèmes définis par les deux mêmes caractéristiques, quelles que soient les particularités (ordre, classe, etc.) ou les propriétés communes aux courbes de l'un quelconque de ces systèmes. En cherchant ainsi à réunir par un lien commun tous les systèmes particuliers de courbes algébriques de mêmes caractéristiques, j'ai reconnu qu'ils satisfont à un même type d'équation différentielle, dont la forme la plus générale peut être considérée comme définissant un système général (μ,ν).

Ce système général (μ,ν) comprend, comme cas particuliers, outre les systèmes algébriques de mêmes caractéristiques, une infinité de systèmes de courbes transcendantes. On est ainsi amené à ajouter à l'étude des systèmes de courbes algébriques celle des systèmes de courbes transcendantes, ou plutôt à les comprendre indistinctement dans une même étude, celle des systèmes généraux de courbes définis par deux caractéristiques.

II. Démonstration de l'existence des systèmes de courbes transcendantes. — Considérons une équation différentielle du premier ordre, à deux variables

$$(1) \qquad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

que nous supposerons algébrique, entière et rationnelle. On sait qu'une pareille équation représente une infinité de courbes, en général transcen-

dantes, et que si $\frac{dy}{dx}$ y figure au degré μ, il existe μ de ces courbes qui passent par un point quelconque du plan.

Pour avoir les courbes tangentes à une droite quelconque

$$(2) \qquad y = ax + b,$$

on peut déterminer les x des points de contact au moyen de l'équation

$$\varphi(x, ax + b, a) = 0.$$

Cette équation, de même que (1), est algébrique, entière et rationnelle, et son degré ν est égal au nombre des points de contact de la droite (2) avec les courbes définies par (1).

L'ensemble de ces courbes est donc tel, qu'il en passe un nombre déterminé μ par un point quelconque et qu'il y en ait un nombre déterminé ν qui touchent une droite quelconque ; il forme par suite un système à caractéristiques μ et ν.

Je dis que, réciproquement, tout ensemble de courbes remplissant ces conditions, et formant par suite un système (μ,ν), satisfait nécessairement à une équation différentielle algébrique.

En effet, on voit immédiatement que le lieu des points de contact des tangentes de ces courbes, issues d'un point O quelconque du plan, est une courbe algébrique d'ordre $\mu + \nu$, ayant un point multiple d'ordre μ en O.

Cela est encore vrai, si l'on suppose le point O à l'infini, dans la direction

$$y = ax.$$

Or l'équation du lieu ainsi obtenu n'est autre que l'équation différentielle des courbes du système, dans laquelle on remplace $\frac{dy}{dx}$ par a; par conséquent, cette équation doit être algébrique, entière et rationnelle, et de degré $\mu + \nu$ par rapport à x et y. Il est d'ailleurs évident qu'elle doit être algébrique de degré μ en $\frac{dy}{dx}$, puisqu'elle doit déterminer μ courbes passant par un point quelconque.

Donc, en résumé, il existe des système de courbes transcendantes, et les courbes d'un pareil système satisfont à une même équation différentielle algébrique.

III. Équation générale des systèmes de courbes. — L'équation différentielle la plus générale des systèmes (μ,ν) de courbes, algébriques ou transcendantes, peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \Phi[(x,y)_\nu, (\alpha,\beta)_\mu] = 0,$$

dans laquelle

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{dy}{dx}, \\ \beta = x\dfrac{dy}{dx} - y. \end{cases}$$

Φ étant un polynôme de degré μ par rapport à l'ensemble des variables α et β, de degré ν par rapport à l'ensemble des variables x et y.

En effet, par un point quelconque (x,y) passent μ des courbes (3); car, en substituant dans (3) les expressions (4) de α et β, on obtient une équation de degré μ en $\dfrac{dy}{dx}$.

Pour avoir le nombre des courbes tangentes à une droite quelconque, il suffit de remarquer que les expressions (4) de α et β ne sont autre chsoe que le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine d'une droite tangente à une courbe (3). En choisissant arbitrairement les coordonnées α, β, de cette droite, le système des équations (3) et (4) conduit à une équation de degré ν en x ou y, qui détermine, conjointement avec la deuxième des équations (4), ν points de contact des courbes (3) avec la droite (α,β).

Il est, par suite, démontré que l'équation (3) représente un système (μ,ν).

Réciproquement, tout système (μ,ν) peut être représenté par une équation différentielle algébrique de la forme de l'équation (3).

En effet, nous avons déjà vu (art. II), que tout système (μ,ν) peut être représenté par une équation différentielle algébrique

$$\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Cette équation, si l'on y fait $\dfrac{dy}{dx} = \alpha$, devient l'équation du lieu des points de contact des courbes du système avec des droites parallèles à la direction

$$y = \alpha x.$$

Mais ce lieu étant de degré $\mu + \nu$, et ayant un point multiple d'ordre μ à l'infini dans la direction $y = \alpha x$, son équation doit être de la forme

$$(5)\qquad R(y-\alpha x)^{\mu} + (S_0\alpha + S_1)(y-\alpha x)^{\mu-1} + \ldots$$
$$+ (V_0\alpha^{\mu-1} + V_1\alpha^{\mu-2} + \ldots + V_{\mu-1})(y-\alpha x) + P_0\alpha^{\mu} + P_1\alpha^{\mu-1} + \ldots + P_{\mu} = 0,$$

dans laquelle R,S,...,V désignent des polynômes homogènes de degré ν en x et y, et P des polynômes complets également de degré ν en x et y.

On voit en effet immédiatement que l'équation (5) satisfait à la double

condition : 1° de représenter une courbe d'ordre $\mu+\nu$ ayant un point multiple d'ordre μ à l'infini dans la direction $y=\alpha x$; 2° d'être de degré μ par rapport à α, c'est-à-dire de représenter à un autre point de vue, et comme équation différentielle, un ensemble de courbes dont μ passent par un point quelconque.

On voit de plus, sans difficulté, que l'équation (5) est l'équation la plus générale satisfaisant à cette double condition. Or, dans cette équation, nous pouvons, en vertu des relations (4), remplacer $y-\alpha x$ par $-\beta$; nous la transformons alors en une équation de la forme (3), c'est-à-dire contenant α et β ensemble au degré μ, x et y ensemble au degré ν.

Tout système (μ,ν) de courbes peut donc être défini par une pareille équation.

IV. Remarques. — 1° A cause des relations (4), l'équation (5) peut être écrite d'une infinité de manières sous la forme (3) : la plus simple est celle qui consiste à remplacer $y-\alpha x$ par $-\beta$ dans (5).

2° Le nombre des coefficents de (5), après que l'on a divisé par l'un d'eux, est $\frac{(\mu+1)(\nu+1)(\mu+\nu+2)}{4}-1$. Tel est le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un système général (μ,ν).

L'équation la plus générale de la forme (3) contenant

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}{4}-1$$

coefficients, il y en a sur ce nombre $\frac{\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)}{4}$ surabondants; on peut les faire disparaître en se servant des relations de (4).

3° L'équation (3), en vertu des relations (5), peut être considérée à la fois comme l'équation différentielle ponctuelle et l'équation différentielle tangentielle du système (μ,ν). En substituant les expressions (5) de α et β, on a la première forme. Pour avoir la seconde, il suffit de tirer de (5)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{d\beta}{d\alpha},\\ y&=\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta,\end{aligned}\right.$$

et de substituer ces expressions dans (3).

Cette double signification de l'équation (3), contenant à la fois les coordonnées ponctuelles et tangentielles des mêmes courbes, nous paraît constituer un fait intéressant au point de vue de la géométrie analytique.

4° Si, dans l'équation (3), on change x en α, y en β, et réciproquement, on forme une nouvelle équation qui représente un système (ν,μ) corrélatif du système (μ,ν) représenté par l'équation (3). Il résulte de cette remarque

qu'ayant démontré une propriété quelconque d'un système de courbes, on sera en droit d'en conclure, sans démonstration, la propriété corrélative.

5° On peut supposer, comme cas particulier, que les termes en α et β disparaissent de l'équation (3) ($\mu = 0$); cette équation ne contient plus alors que x et y au degré ν, et, par suite, le système qu'elle représente se réduit à une courbe algébrique du degré ν.

Si, au contraire, ce sont les termes en x et y qui manquent dans (3) ($\nu = 0$), on a l'équation tangentielle d'une courbe algébrique de la classe μ.

Les courbes algébriques se présentent ainsi, et de deux manières, comme cas très-particulier des systèmes généraux de courbes; de telle sorte qu'une courbe algébrique du m^e ordre et de la n^e classe peut être considérée, soit comme un système ($\mu = 0$, $\nu = m$) de points, soit comme un système ($\mu = n$, $\nu = 0$) de droites. La géométrie à deux dimensions, ayant pour éléments le point et la ligne droite, devient en quelque sorte un cas particulier d'une géométrie plane plus générale, dans laquelle les points et les droites sont remplacés par certaines courbes transcendantes. Cette géométrie des systèmes, étendue à l'espace, n'est d'ailleurs autre chose que la géométrie dont Plücker a, dans ces dernières années, ouvert la voie; seulement elle se présente ici avec un domaine notablement agrandi.

V. Propriétés des systèmes généraux de courbes. — Dans un prochain travail, nous montrerons comment on peut étendre aux systèmes de courbes la plupart des propriétés des courbes algébriques, spécialement celles qui ont rapport aux transversales, aux polaires et aux axes harmoniques, aux faisceaux et aux involutions, etc. Pour le moment, nous nous proposons de faire voir, par quelques exemples, la manière simple dont peuvent s'établir non-seulement les propriétés d'un système, mais les propriétés relatives à plusieurs systèmes. Nous rappellerons tout d'abord un théorème dont nous avons déjà fait usage précédemment, et qui est fondamental dans toute cette théorie; il consiste en ce que :

Le lieu des points de contact des courbes d'un système général (μ,ν), *avec des droites issues d'un même point* O, *est une courbe d'ordre* $\mu + \nu$, *douée d'un point multiple d'ordre* μ *en* O.

Ce théorème a pour corrélatif le suivant, qui nous sera également utile :

L'enveloppe des tangentes des courbes d'un système général (μ,ν), *aux points où ces courbes rencontrent une droite* D, *est une courbe de la classe* $\mu + \nu$, *ayant une tangente multiple d'ordre* ν *coïncidant avec* D.

Ce théorème, de même que le précédent, se démontre immédiatement.

VI. *Étant donné un système* (μ,ν) *et trois points* e, f, g, *le lieu d'un point* a, *tel que la tangente à l'une des courbes du système qui y passent forme avec*

les trois droites ac, af, ag un rapport anharmonique constant et égal à λ, *est de l'ordre* $2\mu+\nu$ *et a trois points multiples d'ordre* μ *en e, f et g* (*).

Cherchons le nombre des points a du lieu situés sur une droite quelconque passant par le point g. Soit h le point de rencontre de cette droite avec ef. La tangente en un des points a, à l'une des courbes du système passant par ce point, doit couper ef en un point i tel que

$$\frac{ic}{if} : \frac{hc}{hf} = \lambda.$$

Or le lieu des points de contact des tangentes, menées du point i aux courbes du système, est de l'ordre $\mu+\nu$, et rencontre, par suite, gh en $\mu+\nu$ points.

Le lieu a donc, sur une droite quelconque passant par g, $\mu+\nu$ points en dehors de ce point g.

Si l'on considère les μ courbes du système passant par le point g, à chacune des μ tangentes gt, correspond une droite gs, formant avec gt, ge et gf un rapport anharmonique égal à λ. Les μ droites gs ainsi obtenues sont les tangentes à μ branches du lieu qui passent par le point g.

Le lieu est donc de l'ordre $2\mu+\nu$ et a un point multiple d'ordre μ en g. On voit de la même manière qu'il a deux autres points multiples d'ordre μ en e et f.

VII. *Étant donnés un système* (μ, ν), *deux points e, f, et une droite* D, *l'enveloppe des droites issues des divers points a de* D, *et telles que le rapport anharmonique formé par l'une quelconque d'entre elles, la tangente à l'une des courbes du système passant en a, et les droites ac et af, soit constant et égal à* λ, *est une courbe de la classe* $2\mu+\nu$, *qui a une tangente multiple d'ordre* $(\mu+\nu)$ *coïncidant avec* D *et une tangente multiple d'ordre* μ *coïncidant avec ef.*

Cherchons le nombre des tangentes de l'enveloppe qui passent par un point g quelconque. Le lieu défini à l'article VI, et décrit à l'aide des points e, f, g, rencontre D en $2\mu+\nu$ points. Chacun de ces points détermine une des tangentes de l'enveloppe qui passent en g. Cette enveloppe est, par suite, de la classe $2\mu+\nu$.

Prenons en particulier le point g sur la droite D. Le lieu (VI) a un point multiple d'ordre μ en g, et rencontre D en $\mu+\nu$ autres points. En ces points, l'enveloppe est tangente à D, qui est par conséquent une tangente multiple d'ordre $\mu+\nu$.

On voit de plus aisément que, si l'on considère les μ courbes du système qui passent par le point de rencontre des droites ef et D, les μ tangentes en

(*) Ce théorème, pour le cas des systèmes de coniques, a été donné par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 297; 1864).

ce point ont toutes pour tangente correspondante de l'enveloppe la droite ef, qui est, par conséquent, une tangente multiple d'ordre μ.

VIII. *Étant donnés deux systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu')$ *et deux points* e,f, *le lieu d'un point, tel que les tangentes aux courbes de l'un et l'autre système passant par ce point divisent le segment* ef *dans un rapport anharmonique donné* λ, *est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$, *qui a deux points multiples d'ordre* $\mu\mu'$ *en* e *et* f.

Cherchons le nombre des points d'intersection du lieu avec un droite D quelconque. L'enveloppe (A) des droites déterminées à l'aide de D et du système (μ,ν), par la construction indiquée à l'article VII, est, comme nous l'avons vu, de la classe $2\mu+\nu$, et a une tangente d'ordre $\mu+\nu$ coïncidant avec ef. D'autre part, l'enveloppe (B) des tangentes du système μ',ν', dont les points de contact sont situés sur D, est de la classe $\mu'+\nu'$, et a une tangente multiple d'ordre ν' coïncidant avec D. Par suite, le nombre des tangentes communes à (A) et à (B) est, au total, égal à $(2\mu+\nu)(\mu'+\nu')$. Seulement $(\mu+\nu)\nu'$ de ces tangentes communes coïncident avec D.

Or les tangentes communes autres que D déterminent, sur cette droite D, les points du lieu cherché. Ce lieu est donc de l'ordre

$$(2\mu+\nu)(\mu'+\nu')-(\mu+\nu)\nu'=2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu.$$

Il est facile de voir que chacun des points e et f est un point multiple d'ordre $\mu\mu'$ du lieu. En effet, considérons les μ courbes du système (μ,ν) et les μ' courbes du système (μ',ν') qui passent par l'un de ces points, e par exemple.

On peut associer ces courbes chacune à chacune de $\mu\mu'$ manières, et chacune de ces combinaisons détermine un élément du lieu passant par e. Il y a donc $\mu\mu'$ branches de ce lieu qui se croisent en e. Il en est évidemment de même de f.

IX. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν), (μ',ν'), *un point* e *et une droite* D, *l'enveloppe des droites issues des divers points* a *de* D, *et telles que le rapport anharmonique formé par l'une quelconque d'entre elles, les tangentes à deux courbes de l'un et l'autre système passant en* a, *et la droite* ae, *soit constant et égal à* λ, *est une courbe de la classe* $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$, *qui a une tangente multiple d'ordre* $\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$ *coïncidant avec* D.

Cherchons le nombre des tangentes de l'enveloppe ainsi définie, qui passent par un point f quelconque. Le lieu VIII, décrit à l'aide des points e,f, et du rapport anharmonique λ, rencontre D en $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$ points, et chacun de ces points détermine une des tangentes de l'enveloppe qui passent en f. Cette enveloppe est donc bien de la classe $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$.

Si l'on prend le point f sur D, le lieu III, ayant un point multiple d'ordre $\mu\mu'$ en f, rencontre D en $\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$ autres points, qui sont des points

de contact de l'enveloppe avec D. Donc cette droite est pour l'enveloppe une tangente multiple d'ordre $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$.

X. *Étant donnés trois systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu')(\mu'',\nu'')$, *et un point e, le lieu d'un point a, tel que les tangentes à trois courbes appartenant chacune à chacun des systèmes, et la droite ae, forment un rapport anharmonique* λ, *est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu'\mu'' + \mu'\mu''\nu + \mu''\mu\nu' + \mu\mu'\nu''$, *qui a un point multiple d'ordre* $\mu\mu'\mu''$ *en e.*

La démonstration de ce théorème étant tout à fait analogue à celle donnée à l'article VIII, nous ne nous y arrêterons pas.

XI. *Étant donnés trois systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu'),(\mu'',\nu'')$, *et une droite* D, *l'enveloppe d'une droite issue d'un point a de* D, *de manière à former avec les tangentes à trois courbes appartenant chacune à chacun des systèmes et passant en a, un rapport anharmonique constant et égal à* λ, *est une courbe de la classe* $2\mu\mu'\mu'' + \mu'\mu''\nu + \mu''\mu\nu' + \mu\mu'\nu''$, *qui a une tangente multiple d'ordre* $\mu\mu'\mu'' + \mu'\mu''\nu + \mu''\mu\nu' + \mu\mu'\nu''$ *coïncidant avec* D.

Démonstration toute semblable à celle donnée à l'article IX.

XII. *Étant donnés quatre systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu'),(\mu'',\nu''),(\mu''',\nu''')$, *le lieu des points en lesquels se coupent suivant un rapport anharmonique donné quatre courbes appartenant chacune à chacun des systèmes est de l'ordre*

$$2\mu\mu'\mu''\mu''' + \mu'\mu''\mu'''\nu + \mu''\mu'''\mu\nu' + \mu'''\mu\mu'\nu'' + \mu\mu'\mu''\nu'''.$$

Démonstration semblable à celle des articles VIII et X.

Ce dernier théorème relatif à quatre systèmes est d'une grande généralité ; il comprend comme cas particuliers les théorèmes des articles VI, VIII et X. On en déduit également comme corollaire le théorème suivant, communiqué par M. Chasles à l'Académie, dans sa séance du 2 mars 1874, comme généralisation d'un théorème fondamental dans la théorie des coniques :

Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à quatre courbes de classes n_1, n_2, n_3, n_4, ***quatre tangentes ayant un rapport anharmonique donné, est une courbe de l'ordre*** $2n_1n_2n_3n_4$.

Ce théorème se déduit du précédent d'après la remarque déjà faite précédemment (art. IV), que les tangentes d'une courbe de n^{me} classe forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = n, \nu = 0$.

XIII. Le théorème VIII conduit à de nombreuses conséquences.

Si l'on suppose que le système (μ',ν') consiste en un faisceau de courbes algébriques du m^{me} ordre, on a

$$\mu' = 1, \nu' = 2(m-1);$$

l'ordre du lieu est alors égal à

$$2m\mu + \nu,$$

et l'on voit aisément que ce lieu a pour points multiples d'ordre μ les m^2 points fondamentaux du faisceau du m^{me} ordre. Les points e et f sont d'ailleurs aussi des points multiples d'ordre μ.

Considérons un système (μ,ν) et une courbe algébrique U du m^{me} ordre, sans singularités. On peut construire une infinité de faisceaux du m^{me} ordre comprenant la courbe U. Considérons l'un quelconque de ces faisceaux. En vertu du théorème VIII, il donne lieu conjointement avec le système (μ,ν) à une courbe (C) d'ordre $2m\mu+\nu$, ayant pour points multiples d'ordre μ les m^2 points fondamentaux du faisceau. La courbe U coupe la courbe (C) en un nombre total de points égal à $m(2m\mu+\nu)$; mais au nombre de ces points figurent les m^2 points fondamentaux du faisceau dont U fait partie; ces m^2 points, étant multiples d'ordre μ, comptent ensemble pour $m^2\mu$ points dans le nombre total des points d'intersection. Les $m(m\mu+\nu)$ autres points d'intersection donnent lieu au théorème suivant :

XIV. *Étant donnés un système* (μ,ν), *une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités* U, *et un segment* ef, *il existe* $m(m\mu+\nu)$ *points de* U *qui sont tels que la tangente à* U *en chacun de ces points et la tangente à l'une des* μ *courbes du système qui y passent divisent* ef *dans un rapport anharmonique donné.*

Les théorèmes VIII et XIV sont susceptibles de recevoir plusieurs formes, et donnent des résultats intéressants, lorsqu'on choisit convenablement le segment ef, ou la valeur du rapport anharmonique.

Prenons pour points e et f les points à l'infini sur un cercle. Les théorèmes VIII et XIV donnent alors les suivants (*) :

XV. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν) *et* (μ',ν') *de courbes algébriques ou transcendantes, le lieu des points par chacun desquels passent deux courbes de l'un et l'autre système, se coupant sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation, est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$, *qui a pour points multiples d'ordre* $\mu\mu'$ *les deux points circulaires à l'infini.*

XVI. *Étant donnés un système* (μ,ν) *et une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités* U, *il existe* $m(m\mu+\nu)$ *courbes du système qui coupent* U *sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation.*

On peut supposer aussi que les points e et f soient à l'infini dans deux directions rectangulaires, et que le rapport anharmonique soit égal à -1. Les théorèmes VIII et XIV deviennent alors les suivants :

XVII. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν) *et* (μ',ν') *de courbes algébriques ou transcendantes, le lieu des points par chacun desquels passent deux courbes de l'un et l'autre système, se coupant sous un angle dont la bissectrice est donnée de direction, est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$, *qui a deux*

(*) On formera facilement l'énoncé du théorème résultant, dans cette hypothèse, du théorème VI.

points multiples d'ordre $\mu\mu'$ à l'infini, dans la direction même de la bissectrice et dans la direction perpendiculaire.

XVIII. *Étant donnés un système* (μ,ν) *et une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités* U, *il existe* $m(m\mu+\nu)$ *courbes du système qui coupent* U *sous un angle dont la bissectrice est donnée de direction* (*).

Les points e et f restant quelconques, supposons que le rapport anharmonique considéré précédemment devienne égal à l'unité. En introduisant cette hypothèse dans le théorème VIII, on voit immédiatement que la droite ef devient partie intégrante du lieu, avec un degré de multiplicité égal à $\mu\mu'$. En négligeant cette droite, le théorème VIII donne le suivant :

XIX. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν) *et* (μ',ν') *de courbes algébriques ou transcendantes, le lieu des points de contact de deux courbes de l'un et l'autre système est une courbe de l'ordre* $\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$.

Ce théorème donne, comme cas particulier, le théorème de Bezout sur le nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques, et son corrélatif sur le nombre des tangentes communes à deux pareilles courbes.

En supposant le rapport anharmonique égal à l'unité, le théorème XIV donne le nombre des courbes d'un système (μ,ν) qui touchent la courbe U, en ayant soin de déduire du nombre $m(m\mu+\nu)$ le nombre correspondant aux points d'intersection de U et de ef, qui comptent chacun pour μ points, et ne satisfont pas à la question. On peut dès lors énoncer le théorème suivant :

XX. *Le nombre des courbes d'un système* (μ,ν), *qui touchent une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités, est égal à* $m[(m-1)\mu+\nu]$ (**).

Les théorèmes XIX et XX se déduisent, ainsi que nous venons de le voir, des théorèmes VIII et XIV. Ils se démontrent aussi directement avec la plus grande facilité.

Les théorèmes que nous venons de démontrer peuvent facilement se transformer par voie de dualité. Nous citerons seulement le suivant, qui est le corrélatif du théorème XII.

XXI. *Étant donnés quatre systèmes* (μ,ν), (μ',ν'), (μ'',ν''), (μ''',ν'''), *l'enveloppe des droites qui sont touchées par quatre courbes appartenant chacune à chacun des quatre systèmes, en des points formant un rapport anharmonique donné, est une courbe de la classe*

$$2\nu\nu'\nu''\nu''' + \mu\nu'\nu''\nu''' + \mu'\nu''\nu'''\nu + \mu''\nu'''\nu\nu' + \mu'''\nu\nu'\nu''.$$

(*) Les théorèmes XVI et XVII ont été énoncés par M. de Jonquières dans le cas des systèmes algébriques (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 535.)

(**) Ce théorème, dans le cas des systèmes algébriques, a été donné par M. Chasles *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 297; 1864). Le nombre $m[(m-1)\mu+\nu]$ peut aussi s'écrire $n\mu+m\nu$, n désignant la classe de U. Énoncé sous cette forme, le théorème est plus général.

Ce théorème comprend comme cas particuliers plusieurs théorèmes concernant les systèmes ou les courbes algébriques, dont on formera facilement l'énoncé.

XXII. Exemples de systèmes de courbes transcendantes. — Nous indiquerons en terminant quelques systèmes assez simples, formés de courbes transcendantes auxquelles on appliquera facilement les théorèmes que nous avons démontrés ci-dessus.

1° *Les chaînettes ayant même paramètre et même tangente au sommet forment un système dont les caractéristiques sont* $\mu = 2$, $\nu = 2$.

2° *Les cycloïdes égales et de même base forment un système dont les caractéristiques sont* $\mu = 2$, $\nu = 1$.

Il en résulte que :

Les tangentes d'une cycloïde, issues d'un même point, ont leurs points de contact sur une courbe du 3me ordre, qui a pour point double le point de concours des tangentes.

L'une des asymptotes de cette courbe est parallèle à la base de la cycloïde; les deux autres sont inclinées à 45° sur cette base.

3° *Les spirales d'Archimède de même paramètre et de même pôle forment un système dont les caractéristiques sont* $\mu = 2$, $\nu = 4$.

On en conclut le théorème suivant :

Les tangentes d'une spirale d'Archimède, issues d'un point donné, ont leurs points de contact sur une courbe du 6me ordre, qui a pour points doubles le point de concours des tangentes et le pôle de la spirale. Cette courbe a de plus pour points triples les deux points circulaires à l'infini.

4° *Les spirales logarithmiques de même pôle, de même sens et de même paramètre, forment un système dont les caractéristiques sont* $\mu = 1$, $\nu = 1$.

Remarque. — Le système général ($\mu = 1$, $\nu = 1$) est composé de courbes qui jouissent de propriétés très-remarquables, sur lesquelles nous reviendrons dans un autre travail. L'équation différentielle qui définit ce système est de la forme

$$L(xdy - ydx) + Mdx + Ndy = 0,$$

L, M et N désignant des fonctions linéaires d'x et d'y. L'intégration de cette équation a été donnée pour la première fois par Jacobi.

Les propriétés du système qu'elle définit nous a conduit à faire cette intégration par une autre méthode qui nous paraît présenter certains avantages.

Sur la théorie des roulettes gauches; par M. H. Laurent.

(Séance du 25 février 1874.)

Une des théories le plus étudiées aujourd'hui, une des mieux connues, est certainement la théorie des roulettes planes, mais si l'on en excepte l'épicycloïde sphérique, il semble que l'on n'ait que des connaissances très-imparfaites sur les propriétés des roulettes relatives aux courbes gauches.

Si l'on considère une courbe gauche fixe à laquelle je donnerai le nom de *base*, une courbe mobile que j'appellerai la *roulante* assujettie à rouler sans glisser sur la base, un point quelconque invariablement lié à la roulante engendrera une certaine courbe que j'appellerai une *roulette gauche*, ou simplement la *roulette*.

La roulette relative à des courbes dans l'espace est généralement indéterminée, et deux courbes données ont une infinité de roulettes; en effet, le mouvement de la roulante n'est pas défini quand on se contente de dire qu'elle roule sans glisser sur la base, il faut encore donner à chaque instant l'angle des plans osculateurs des deux courbes, ou toute autre notion équivalente; on pourrait, par exemple, assujettir la roulante à s'appuyer sur une courbe ou sur une surface directrice; dans ce qui va suivre, je préfère me donner l'angle des plans osculateurs à cause de sa liaison intime avec les affections des courbes que l'on étudie.

Nous rapporterons la courbe fixe ou base à trois axes rectangulaires fixes. Soit M le point de contact de la base et de la roulette; par ce point, menons la tangente commune, la normale principale de chacune des deux courbes en question et leurs binormales. Soit

ds l'élément commun à la base et à la roulante, en sorte que s désignant l'arc de roulante ou de roulette compté depuis les points m sur la base, m_0 sur la roulante, le point m_0 coïncide à un certain moment avec m; ainsi $m_0\mathrm{M} = m\mathrm{M} = s$, quel que soit d'ailleurs le point de contact M. Nous prendrons l'arc s pour variable indépendante. Soient, en outre

x, y, z les coordonnés du point de contact M,

R le rayon de courbure de la base, R_0 celui de la roulante,

T le rayon de torsion de la base, T_0 celui de la roulante,

a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente commune,

b, b', b'' ceux de la normale principale de la base,

b_1, b'_1, b''_1 ceux de la normale principale de la roulante,

c, c', c'' ceux de la binormale à la base,

c_1, c'_1, c''_1 ceux de la binormale à la roulante,

X, Y, Z les coordonnées d'un point O invariablement lié à la roulante; ce point décrira la roulette,

X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées du même point O par rapport à des axes invariablement liés à la roulante,

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M par rapport aux mêmes axes,

a_0, a'_0, a''_0 les cosinus directeurs de la tangente en M à la roulante pris par rapport aux mêmes axes,

b_0, b'_0, b''_0 ceux de la normale principale,

c_0, c'_0, c''_0 ceux de la binormale,

ξ, η, ζ les projections de la ligne OM sur la tangente, la normale principale et la binormale de la roulante. Posons enfin $OM = N = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, et désignons par θ l'angle des plans osculateurs de la base et de la roulante au point M.

Les formules ordinaires de la transformation des coordonnées donnent immédiatement les relations

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = a(X - x) + a'(Y - y) + a''(Z - z), \\ \eta = b_1(X - x) + b'_1(Y - y) + b''_1(Z - z), \\ \zeta = c_1(X - x) + c'_1(Y - y) + c''_1(Z - z), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \xi = a_0(X_0 - x_0) + a'_0(Y_0 - y_0) + a''_0(Z_0 - z_0), \\ \eta = b_0(X_0 - x_0) + b'_0(Y_0 - y_0) + b''_0(Z_0 - z_0), \\ \zeta = c_0(X_0 - x_0) + c'_0(Y_0 - y_0) + c''_0(Z_0 - z_0). \end{cases}$$

Or b_1 et c_1 peuvent être considérés comme les projections d'un rayon vecteur égal à l'unité sur la normale principale et sur la binormale de la roulante, et b, c comme les projections du même rayon vecteur sur la normale principale et la binormale de la base. Ces normales et binormales peuvent être considérées comme formant deux systèmes d'axes de coordonnés rectangulaires dans un même plan ; ces axes font alors entre eux l'angle θ et les formules de transformation donnent

$$(3)\quad \begin{cases} b_1 = b\cos\theta - c\sin\theta, & b'_1 = b'\cos\theta - c'\sin\theta, & b''_1 = b''\cos\theta - c''\sin\theta, \\ c_1 = b\sin\theta + c\cos\theta, & c'_1 = b'\sin\theta + c'\cos\theta, & c''_1 = b''\sin\theta + c''\cos\theta, \end{cases}$$

A ces formules, il faut joindre les belles formules de M. Serret relatives aux courbes gauches, à savoir

$$(4)\quad \frac{da}{ds} = \frac{b}{R},\quad \frac{da'}{ds} = \frac{b'}{R},\quad \frac{da''}{ds} = \frac{b''}{R},$$

$$(5)\quad \frac{db}{ds} = -\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{T}\right),\quad \frac{db'}{ds} = -\left(\frac{a'}{R} + \frac{c'}{T}\right),\quad \frac{db''}{ds} = -\left(\frac{a''}{R} + \frac{c''}{T}\right),$$

$$(6)\quad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{T},\quad \frac{dc'}{ds} = \frac{b'}{T},\quad \frac{dc''}{ds} = \frac{b''}{T}.$$

On a aussi

$$(7)\quad \frac{da_0}{ds} = \frac{b_0}{R_0},\quad \frac{da'_0}{ds} = \frac{b'_0}{R_0},\quad \frac{da''_0}{ds} = \frac{b''_0}{R_0},$$

$$(8)\quad \frac{db_0}{ds} = -\left(\frac{a_0}{R_0} + \frac{c_0}{T_0}\right),\quad \frac{db'_0}{ds} = -\left(\frac{a'_0}{R_0} + \frac{c'_0}{T_0}\right),\quad \frac{db''_0}{ds} = -\left(\frac{a''_0}{R_0} + \frac{c''_0}{T_0}\right),$$

$$(9)\quad \frac{dc_0}{ds} = \frac{b_0}{T_0},\quad \frac{dc'_0}{ds} = \frac{b'_0}{T_0},\quad \frac{dc''_0}{ds} = \frac{b''_0}{T_0}.$$

On peut déduire des formules (4), (5), (6) les suivantes, pourvu que l'on ait égard aux relations (3) dans lesquelles on suppose l'angle θ constant :

$$(10)\quad \frac{db_1}{ds} = -\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{T}\right)\cos\theta - \frac{b}{T}\sin\theta = -\left(\frac{a\cos\theta}{R} + \frac{c_1}{T}\right), \ldots,$$

$$(11)\quad \frac{dc_1}{ds} = -\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{T}\right)\sin\theta + \frac{b}{T}\cos\theta = -\left(\frac{a\sin\theta}{R} - \frac{b_1}{T}\right), \ldots,$$

$$(12)\quad \frac{da}{ds} = \frac{b}{R} = \frac{b_1}{R}\cos\theta + \frac{c_1}{R}\sin\theta, \ldots.$$

Différentions par rapport à s les formules (1), en laissant θ constant, nous aurons, en ayant égard aux relations (10), (11), (12), et en observant que $\frac{dx}{ds} = a$, $\frac{dy}{ds} = a'$, $\frac{dz}{ds} = a''$,

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{R}\left[(b_1\cos\theta + c_1\sin\theta)(X - x) + \ldots\right] + a\left(\frac{dX}{ds} - a\right) + \ldots,$$

$$\frac{d\eta}{dx} = -\left(\frac{a\cos\theta}{R} + \frac{c_1}{T}\right)(X - x) + \ldots + b_1\left(\frac{dX}{ds} - a\right) + \ldots,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\left(\frac{a\sin\theta}{R} - \frac{b_1}{T}\right)(X - x) + \ldots + c_1\left(\frac{dX}{ds} - c\right) + \ldots,$$

ou bien, en vertu des relations (1) et des relations qui lient entre eux les neuf cosinus a, a', a'', b_1, b'_1, b''_1, c_1, c'_1, c''_1,

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{R}(\eta\cos\theta + \zeta\sin\theta) + a\frac{dX}{ds} + a'\frac{dY}{ds} + a''\frac{dZ}{ds} - 1, \\ \frac{d\eta}{ds} = -\frac{1}{R}\xi\cos\theta - \frac{\zeta}{T} + b_1\frac{dX}{ds} + b'_1\frac{dY}{ds} + b''_1\frac{dZ}{ds}, \\ \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{R}\xi\sin\theta + \frac{\eta}{T} + c_1\frac{dX}{ds} + c'_1\frac{dY}{ds} + c''_1\frac{dZ}{ds}. \end{cases}$$

En opérant sur les formules (2) comme sur les formules (1), X_0, Y_0, Z_0 ne variant pas, on a

$$(14)\quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{R_0} - 1,\qquad \frac{d\eta}{ds} = -\left(\frac{\xi}{R_0} + \frac{\zeta}{T_0}\right),\qquad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\eta}{T_0}.$$

L'élimination des dérivées $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$, entre les équations (13) et (14), donne des formules qui, résolues par rapport à $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$, sont

$$\frac{dX}{ds} = a\left[\eta\left(\frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R}\right) - \zeta\frac{\sin\theta}{R}\right] - b_1\left[\xi\left(\frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R}\right) + \zeta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] + c_1\left[\eta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) + \xi\frac{\sin\theta}{R}\right],$$

$$\frac{dY}{ds} = a'\left[\eta\left(\frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R}\right) - \zeta\frac{\sin\theta}{R}\right] - b'_1\left[\xi\left(\frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R}\right) + \zeta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] + c'_1\left[\eta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) + \xi\frac{\sin\theta}{R}\right],$$

$$\frac{dZ}{ds} = a''\left[\eta\left(\frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R}\right) - \zeta\frac{\sin\theta}{R}\right] - b''_1\left[\xi\left(\frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R}\right) + \zeta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] + c''_1\left[\eta\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) + \xi\frac{\sin\theta}{R}\right].$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$(15) \qquad \frac{1}{R_0} - \frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} \quad \frac{\sin\theta}{R} = \frac{1}{\sigma};$$

nous aurons alors

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= a\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau}\right) + c_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma}\right), \\ \frac{dY}{ds} &= a'\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b'_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau}\right) + c'_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma}\right), \\ \frac{dZ}{ds} &= a''\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b''_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau}\right) + c''_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par $X - x$, la seconde par $Y - y$, la troisième par $Z - z$, et si on les ajoute, on trouve

$$(17) \qquad (X - x)\,dX + (Y - y)\,dY + (Z - z)\,dZ = 0,$$

en observant que $a(X - x) + a'(Y - y) + a''(Z - z)$ est égal à ξ, etc., en vertu des formules (1). L'équation (17) montre que le plan normal à la trajectoire du point O passe par le point M, ce que l'on pouvait prévoir par la théorie de l'axe instantané. Les équations mêmes de l'axe instantané sont les formules (16), dans lesquelles on remplace les premiers membres par zéro. Ces équations peuvent s'écrire, en multipliant la première par a, la seconde par a', la troisième par a'', et en ajoutant, etc.,

$$\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma} = 0, \quad \frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} = 0, \quad \frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} = 0.$$

Telles sont les équations de l'axe instantané par rapport aux coordonnées ξ, η, ζ. Il est facile de voir d'ailleurs que les équations précédentes se réduisent en réalité à deux; il suffit, pour cela, de les ajouter, après les avoir

multipliées respectivement par ξ, $-\eta$ et ζ. Elles peuvent encore être remplacées par les suivantes

$$\xi\tau = -\eta\sigma = \zeta\rho. \tag{18}$$

τ^{-1}, $-\sigma^{-1}$ et ρ^{-1} sont donc proportionnels aux cosinus directeurs de l'axe instantané. Si $\theta = 0$, σ^{-1} s'annule en vertu de (15), et, par suite, dans le cas où la roulante et la base ont même plan osculateur, l'axe instantané est perpendiculaire à la normale principale commune. Nous avons laissé θ constant; mais, si on le supposait variable, il suffirait d'ajouter aux valeurs trouvées pour $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$ les dérivées de X, Y, Z prises en faisant varier θ seul, et comme l'on a

$$X = x + a\xi + b_1\eta + c_1\zeta,$$

on en conclurait, en faisant varier θ seul,

$$\frac{dX}{ds} = \left(\eta\frac{db_1}{ds} + \zeta\frac{dc_1}{ds}\right)\frac{d\theta}{ds},$$

ou, en vertu des formules (3),

$$\frac{dX}{ds} = \left[\eta(-b\sin\theta - c\cos\theta) + \zeta(b\cos\theta - c\sin\theta)\right]\frac{d\theta}{ds},$$

c'est-à-dire, en posant $\frac{d\theta}{ds} = \theta'$,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= (-c_1\eta + b_1\zeta)\,\theta', \\ \frac{dY}{ds} &= (-c_1'\eta + b_1'\zeta)\,\theta', \\ \frac{dZ}{ds} &= (-c_1''\eta + b_1''\zeta)\,\theta', \end{aligned}\right. \tag{19}$$

en sorte que les formules (16) devraient être remplacées par les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= a\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} - \theta'\zeta\right) + c_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} - \theta'\eta\right), \\ \frac{dY}{ds} &= a'\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b_1'\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} - \theta'\zeta\right) + c_1'\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} - \theta'\eta\right), \\ \frac{dZ}{ds} &= a''\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b_1''\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} - \theta'\zeta\right) + c_1''\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} - \theta'\eta\right), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

et l'on reconnaît encore que

$$(X - x)\,dX + (Y - y)\,dY + (Z - z)\,dZ = 0.$$

Les équations de l'axe instantané s'en déduisent sans difficulté. Elles sont encore données par les formules (18), pourvu que l'on pose $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}-\theta'$, au lieu de poser $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}$; de sorte que, avec cette convention, les formules (16) conviendront encore au cas où l'angle θ serait assujetti à varier en même temps que s. Ce sera donc de ces formules que nous ferons usage, mais nous poserons

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}. \tag{21}$$

Élevons les équations (16) au carré, et ajoutons-les; nous aurons, en désignant par dS l'élément de l'arc de roulette,

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\xi^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right)+\eta^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)+\zeta^2\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)-2\eta\zeta\frac{1}{\rho\sigma}+2\xi\zeta\frac{1}{\rho\tau}+2\eta\xi\frac{1}{\sigma\tau},$$

ou bien encore

$$\frac{dS^2}{ds^2}=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)-\left(\frac{\eta}{\sigma}+\frac{\zeta}{\rho}-\frac{\xi}{\tau}\right)^2.$$

On voit, par cette formule, que le lieu des points qui décrivent des arcs égaux est un cylindre de révolution. On peut considérer, si l'on veut, $-\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\sigma}$ et $\frac{1}{\rho}$ comme les composantes d'une droite fictive $\frac{1}{G}$, et poser

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{G}\cos\alpha,\quad \frac{1}{\sigma}=\frac{1}{G}\cos\beta,\quad \frac{1}{\rho}=\frac{1}{G}\cos\gamma;$$

on peut alors écrire

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\frac{N^2}{G^2}-\frac{N^2}{G^2}\cos^2(N,G),$$

d'où l'on tire

$$dS=ds\frac{N}{G}\sin(N,G).$$

Dans cette hypothèse, les formules (16) pourraient s'écrire

$$\frac{dX}{dx}=\frac{N}{G}(a\cos A+b_1\cos B+c_1\cos C)\sin(N,G),\ \ldots,$$

A, B, C désignant alors les cosinus directeurs de la perpendiculaire aux directions $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et $\frac{\xi}{N}$, $\frac{\eta}{N}$, $\frac{\zeta}{N}$. Or la direction $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ est celle de l'axe instantané, la direction A, B, C est celle d'une droite perpendiculaire à OM et à l'axe instantané. Appelons cette droite MI, nous pourrons écrire

$$\frac{dX}{ds}=\frac{N}{G}\cos u\sin(N,G),\ \frac{dY}{ds}=\frac{N}{G}\cos v\sin(N,G),\ \frac{dZ}{ds}=\frac{N}{G}\cos w\sin(N,G);$$

u, v et w seront alors les angles que MI fait avec les axes fixes. Ajoutons que $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\sigma}$ et $-\frac{1}{\tau}$ ne sont autre chose que les composantes de la rotation instantanée $\frac{1}{G}$.

Occupons-nous maintenant de la recherche du rayon de courbure de la roulette. A cet effet, différentions les équations (16); nous aurons, en ayant égard aux formules de M. Serret, ou aux formules (10), (11), (12), que l'on en déduit en laissant θ constant,

$$\begin{aligned}(21)\quad \frac{d^2X}{ds^2}=&\left(\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{c_1}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)+\left(\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{c_1}{T}\right)\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)\\&+\left(\frac{b_1}{T}-\frac{a}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right)+a\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\eta}{ds}-\frac{1}{\sigma}\frac{d\zeta}{ds}\right)-b_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\xi}{ds}+\frac{1}{\tau}\frac{d\zeta}{ds}\right)\\&+c_1\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\eta}{ds}+\frac{1}{\sigma}\frac{d\xi}{ds}\right)+a\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}\right)-b_1\left(\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}+\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}\right)\\&+c_1\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

Remplaçons les dérivées de ξ, η, ζ par leurs valeurs (14); la seconde partie de $\frac{d^2X}{ds^2}$ prend la forme

$$\begin{aligned}&a\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\rho}\frac{\zeta}{T_0}-\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{T_0}\right)-b_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\eta}{R_0}-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\tau}\frac{\eta}{T_0}\right)\\&\qquad+c_1\left(-\frac{1}{\tau}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\tau}\frac{\zeta}{T_0}+\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{R_0}-\frac{1}{\sigma}\right),\end{aligned}$$

et la formule (21) devient alors

$$\begin{aligned}(22)\quad \frac{d^2X}{ds^2}=&\,a\Big(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\cos\theta}{R}\frac{\xi}{\rho}+\frac{\cos\theta}{R}\frac{\zeta}{\tau}-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\eta}{\tau}-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\xi}{\sigma}-\frac{1}{\rho}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\rho}\frac{\zeta}{T_0}-\frac{1}{\sigma}\\&+b_1\Big(-\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\frac{\cos\theta}{R}\frac{\eta}{\rho}-\frac{\cos\theta}{R}\frac{\zeta}{\sigma}+\frac{1}{T}\frac{\eta}{\tau}+\frac{1}{T}\frac{\xi}{\sigma}-\frac{1}{\rho}\frac{\eta}{R_0}+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\tau}\\&+c_1\Big(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\sin\theta}{R}\frac{\eta}{\rho}-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\zeta}{\sigma}+\frac{1}{T}\frac{\xi}{\rho}+\frac{1}{T}\frac{\zeta}{\tau}-\frac{1}{\tau}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\tau}\frac{\zeta}{T_0}+\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{R_0}-\end{aligned}$$

Cette formule et ses analogues peuvent s'écrire plus simplement; il suffit, pour cela, de poser

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\cos\theta}{R\rho}-\frac{\sin\theta}{R\sigma}-\frac{1}{\rho R_0},\quad \frac{1}{\mu}=-\frac{\sin\theta}{R\tau}-\frac{1}{\sigma\tau},\quad \frac{1}{\nu}=\frac{\cos\theta}{R\tau}-\frac{1}{\rho T_0},$$
$$\frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{T\sigma},\quad \frac{1}{\mu'}=\frac{\cos\theta}{R\rho}+\frac{1}{T\tau}-\frac{1}{\rho R_0}-\frac{1}{\tau T_0},\quad \frac{1}{\nu'}=-\frac{\cos\theta}{R\sigma},$$
$$\frac{1}{\lambda''}=\frac{1}{T\rho}-\frac{1}{\tau R_0},\quad \frac{1}{\mu''}=\frac{\sin\theta}{R\rho}+\frac{1}{\sigma R_0},\quad \frac{1}{\nu''}=-\frac{1}{R\sigma}+\frac{1}{T\tau}-\frac{1}{\tau T_0},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{1}{\lambda}=\frac{1}{R\rho},\quad \frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{\sigma T},\quad \frac{1}{\lambda''}=-\frac{1}{T\rho}, \\ \frac{1}{\mu}=-\frac{2}{T\sigma},\quad \frac{1}{\mu'}=\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\rho^2},\quad \frac{1}{\mu''}=\frac{1}{\sigma\rho}-\frac{1}{\sigma R_0}, \\ \frac{1}{\nu}=-\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{T_0}\right),\quad \frac{1}{\nu'}=-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{\rho}\right),\quad \frac{1}{\nu''}=-\frac{1}{\sigma R}+\frac{1}{T^2}-\frac{1}{T_0^2}. \end{cases}$$

Ces formules sont un peu plus simples que les précédentes; elles permettent la construction par la règle et le compas de λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'', dès que l'on connaît R, R_0, T, T_0, c'est-à-dire les éléments de la figure; en d'autres termes, il n'est pas nécessaire, pour les obtenir, de connaître la nature de la roulante et de la base. Les formules (22) deviennent ainsi

$$(24)\quad \frac{d^2X}{ds^2}=a\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\mu}+\frac{\zeta}{\nu}\right)$$
$$+b_1\left(-\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\frac{\xi}{\lambda'}+\frac{\eta}{\mu'}+\frac{\zeta}{\nu'}+\frac{1}{\rho}\right)$$
$$+c_1\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\xi}{\lambda''}+\frac{\eta}{\mu''}+\frac{\zeta}{\nu''}-\frac{1}{\sigma}\right).$$

On voit par cette formule, sans qu'il soit nécessaire de développer les calculs, que le rayon de courbure de la roulette pourra se construire avec la règle et le compas, si l'on connaît les rayons R, R_0, T et T_0, ainsi que leurs dérivées.

Si, à l'aide des équations (16) et des formules de réduction connues $a=b'c''-c'b''$, ..., on forme les quantités d^2XdY-d^2YdX, ..., qui sont les coefficients de l'équation du plan osculateur, on voit que ces expressions seront du second degré en ξ, η, ζ (et homogènes, si l'on a $\frac{1}{\rho}=0$, $\frac{1}{\sigma}=0$). dS^3 sera du degré $\frac{3}{2}$; en sorte que, si l'on chasse les radicaux et si l'on écrit que la courbure est égale à un nombre donné, on obtiendra une équation qui sera du 6e degré en ξ, η, ζ. Ainsi les points qui décrivent des rou-

lettes de même courbure se trouvent sur une courbe du sixième degré. Les points qui décrivent des roulettes de courbure nulle, c'est-à-dire qui possèdent un point d'inflexion, sont situés sur une courbe obtenue en posant

$$d^2X dY - d^2Y dX = 0, \ldots,$$

ou

$$\frac{d^2X}{dX} = \frac{d^2Y}{dY} = \frac{d^2Z}{dZ}.$$

Cette courbe se trouve évidemment sur deux surfaces du second ordre, qui se réduisent à deux cônes quand $\frac{1}{\rho} = 0$ et $\frac{1}{\sigma} = 0$. $\frac{1}{\sigma}$ est nul pour $\theta = 0$ et pour $\frac{1}{R} = 0$, ce qui entraînerait la condition $\frac{1}{R_0} = 0$, et l'on aurait alors des droites pour base et pour roulante, ce qui est inadmissible quel que soit s. On peut avoir aussi $\frac{1}{\rho} = 0$ et $\frac{1}{\sigma} = 0$ en prenant $\theta = 0$ et $R = R_0$; alors on a des courbes de même courbure et ne différant que par leur torsion. L'axe instantané faisant partie de la courbe, celle-ci est une cubique gauche.

On pourrait calculer $\frac{d^3X}{ds^3}, \ldots$ comme nous avons calculé $\frac{d^2X}{ds^2}, \ldots$, mais il va sans dire que les calculs seraient d'une longueur rebutante; quoi qu'il en soit, on peut observer que $\frac{d^3X}{ds^3}$ se ramènerait à une fonction linéaire de ξ, η, ζ, et il en serait certainement de même de toutes les autres dérivées. Supposons que l'on calcule le rayon de torsion de la roulette et qu'on l'égale à une constante, on obtiendra une équation qui sera seulement du 4e degré. Ainsi les points qui décrivent des roulettes de même torsion sont situés sur une même surface du 4e ordre, et l'on peut voir que ceux qui en particulier décrivent des roulettes de torsion nulle sont situés sur une surface qui n'est que du 3e ordre; dans ce cas, en effet, la surface se décompose en deux parties, dont l'une est l'axe instantané de rotation.

Examinons maintenant quelques cas particuliers de nos formules générales, et, pour commencer, supposons $\theta = 0$. Alors $\frac{1}{\sigma}$ est nul, et l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R\rho}, \quad \frac{1}{\mu} = 0, \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_0}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda'} = 0, \quad \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{T^2} - \frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{1}{\nu'} = 0, \quad \frac{1}{\lambda''} = -\frac{1}{T\rho}, \quad \frac{1}{\mu''} = 0, \quad \frac{1}{\nu''} = \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}.$$

En effectuant les calculs, on trouve que le seul terme contenant les dé-

rivées de ρ et de τ est de la forme de $\eta\,(a''\xi + b''_1\eta + c''_1\zeta)\,\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho\tau}$. De telle sorte que, si le produit $\frac{1}{\rho\tau}$ reste constant, on pourra toujours construire le rayon de courbure de la roulette à l'aide des seuls éléments de la figure, pourvu que l'on connaisse R, R_0, T et T_0.

En particulier, lorsque deux hélices ordinaires roulent l'une sur l'autre sans glisser, de manière à ce que leurs plans osculateurs se confondent, on peut toujours construire, avec la règle et le compas, le rayon de courbure d'une roulette quelconque; on peut s'assurer sur les formules générales que le théorème a encore lieu quand les plans osculateurs font entre eux un angle constant.

Si l'on suppose $T = T_0$, ou $\frac{1}{\tau} = 0$ avec $\theta = 0$, on obtient la formule assez simple que voici, pour expression du rayon de courbure r de la roulette,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\rho^2}{(\xi^2+\eta^2)^3}\left[\frac{\xi^4}{T^3} + \frac{\eta^2\xi^2}{T^2} + \left(\frac{\xi^2}{\rho} + \frac{\eta^2}{\rho} - \eta - \frac{\xi\zeta}{T}\right)^2\right].$$

Cette formule est applicable, par exemple, au cas où les deux courbes que l'on fait rouler l'une sur l'autre sont identiques, et symétriquement placées par rapport à la tangente commune. Si l'on suppose $\frac{1}{T} = 0$ et $\zeta = 0$, on retrouve la formule connue relative aux roulettes planes; en effet, on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\rho^2}{N^6}\left(\frac{N^2}{\rho} - \eta\right)^2,$$

ou bien

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho}{N^3}\left(\frac{N}{\rho} - \eta\right).$$

Si l'on pose alors $\eta = N \sin\varphi$, φ désignant l'angle que fait OM avec la tangente commune, on trouve

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho}{N^3}\left(\frac{N^2}{\rho} - N\sin\varphi\right),$$

ou enfin

$$r = \frac{N^2}{N - \rho\sin\varphi},$$

ce qui est la formule connue.

Signalons encore un cas particulier intéressant : si l'on suppose $T = T_0$, $\zeta = 0$, R et R_0 constants, on obtient des courbes dont le rayon de courbure peut toujours se construire géométriquement, ainsi que le rayon de torsion; ces courbes peuvent être utilisées dans la théorie des engrenages coniques.

Sur un point de la théorie du contact; par M. Halphen.

(Séance du 25 mars 1874)

Quand deux surfaces se touchent le long d'une ligne, il peut se présenter, en certains points de cette ligne, des particularités sur lesquelles je me propose de dire quelques mots. L'étude de ces particularités se fait aisément au moyen des conditions analytiques du contact supposé.

En chaque point de la ligue de contact C, les dérivées partielles des divers ordres d'une coordonnée par rapport à deux autres, prises relativement aux deux surfaces, satisfont à des équations de condition, que l'on peut obtenir directement, ainsi que je vais l'expliquer brièvement pour le cas le plus simple : celui où les deux surfaces S, S′ ont, le long de C, un contact du 1er ordre.

Désignons par z et z' les ordonnées de S et de S′. En chaque point de C, on a, outre $z - z' = 0$,

$$(1) \qquad \frac{d(z-z')}{dx} = 0, \qquad \frac{dz(-z')}{dy} = 0.$$

Les dérivées de tous les ordres des premiers membres de ces deux équations, prises le long de C, sont aussi nulles en chaque point de C. En dérivant une fois, on obtient deux équations contenant $\frac{dy}{dx}$. Éliminant cette quantité, on a une relation entre les dérivées partielles jusqu'au 2me ordre. Dérivant une seconde fois, on introduit $\frac{d^2y}{dx^2}$, et l'élimination conduit à une nouvelle relation entre les dérivées partielles jusqu'au 3me ordre. Continuant ainsi, on obtient, à chaque nouvelle dérivation, une relation nouvelle entre les dérivées partielles relatives aux deux surfaces.

Si les deux surfaces S et S′ avaient, le long de C, un contact d'un ordre plus élevé, on formerait facilement, et d'une manière anologue, les relations nécessaires. On peut aussi, par un autre procédé, parvenir d'un seul coup à ce résultat pour le cas général.

Soient

$$z = \varphi(x,y), \quad z' = \varphi'(x,y)$$

les équations des deux surfaces. Nous en concluons

$$z - z' = \varphi(x,y) - \varphi'(x,y) = F = (x,y).$$

Il est clair que $F(x,y) = 0$ est l'équation de la projection, sur le plan des xy, de la ligne commune aux deux surfaces S, S′. Une portion de cette

projection est la projection de la ligne C. Soit $f(x,y) = 0$ l'équation de cette projection. On a donc

$$(2) \qquad z - z' = F(x,y) = \chi(x,y)\,[f(x,y)]^m,$$

m étant un nombre positif, et $\chi(x,y)$ ne contenant plus le facteur $f(x,y)$. Si l'on prend un point (x,y) à distance infiniment petite du 1er ordre d'un point M arbitraire de la courbe $f(x,y) = 0$, $\chi(x,y)$ a une valeur finie, et $[f(x,y)]^m$ est infiniment petit de l'ordre m. On a donc, sur les surfaces S, S', deux points dont la distance $z - z'$ est infiniment petite d'ordre m. Donc $m - 1$ est l'ordre du contact des deux surfaces le long de la ligne C. Donc :

Si deux surfaces ont un contact d'ordre $m - 1$ le long d'une ligne dont la projection a pour équation $f(x,y) = 0$, leurs ordonnées satisfont à une relation telle que (2).

Je n'ai pas besoin d'insister sur la marche à suivre pour obtenir, au moyen de la relation (2), les équations dont il a été parlé plus haut, et dont je n'ai pas à faire usage.

Je fais observer que l'équation (2) s'applique à tous les cas, sans excepter ceux où m est fractionnaire, cas dans lesquels la ligne C est une ligne singulière sur l'une au moins des deux surfaces. Je déduis maintenant quelques conséquences relatives au cas où m est entier, et où la ligne C est une ligne simple de chacune des deux surfaces.

Soit A un point de la ligne C; je le suppose de multiplicité μ sur cette courbe, et simple sur les deux surfaces. Je suppose de plus que la courbe complémentaire D d'intersection des deux surfaces y passe aussi, et que ν soit la multiplicité de A sur D (je n'exclus pas le cas où $\nu = 0$). Cela étant, l'équation (2) montre immédiatement qu'au point A les deux surfaces ont un contact d'ordre $m\mu + \nu - 1$. Donc :

Théorème. — *Si deux surfaces ont, tout le long d'une ligne, simple sur chacune d'elles, un contact d'ordre $m - 1$, et qu'un point particulier de cette ligne, simple sur les deux surfaces, et multiple d'ordre μ sur la ligne elle-même, soit de multiplicité ν sur la ligne complémentaire d'intersection des deux surfaces, le contact des deux surfaces est, en ce point, d'ordre $m\mu + \nu - 1$.*

La réciproque est vraie; c'est-à-dire que si, en un point A, les surfaces ont un contact d'ordre $M - 1$, supérieur à $m - 1$, on a nécessairement $m\mu + \nu = M$. De là résulte que, sur la courbe D, le point A a une multiplicité au moins égale au reste de la division de M par m, et, sur la ligne C, une multiplicité au plus égale au plus grand entier contenu dans $\frac{M}{m}$.

De notre théorème résulte ce corollaire que :

Si un point de la ligne de contact des surfaces ci-dessus, simple sur les

deux surfaces, est, sur cette ligne, de multiplicité μ, le contact des deux surfaces est, en ce point, au moins d'ordre $m\mu - 1$.

Il est entendu que tout ceci s'applique, quelle que soit la nature des points multiples considérés. Ainsi ce qui résulte du théorème pour le cas d'un point double en résulte également pour le cas d'un point de rebroussement ordinaire, etc.

Un exemple du contact de deux surfaces le long d'une ligne est offert par la considération d'une surface mobile et de son enveloppe. Ces deux surfaces se touchent le long de la *caractéristique*, qui est l'intersection de deux surfaces consécutives. Si la caractéristique a un point multiple d'ordre μ, et d'ailleurs simple sur la surface mobile, c'est que les deux surfaces consécutives ont, en ce point, un contact d'ordre $\mu - 1$. Nous en concluons, conformément à notre corollaire, et en faisant $m = 2$:

Si, dans une série de surfaces, deux surfaces consécutives ont, en un point, un contact d'ordre $\mu - 1$, la surface enveloppée a, en ce point, avec l'enveloppe, un contact d'ordre au moins égal à $2\mu - 1$.

Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ,ν) ; par M. Fouret.

(Séance du 6 mai 1874)

I. Dans un précédent travail (*), nous avons établi l'existence des systèmes de courbes transcendantes, définis par deux caractéristiques μ,ν, qui sont respectivement les nombres des courbes du système qui passent par un point et qui touchent une droite, le point et la droite pouvant d'ailleurs être choisis arbitrairement. Le problème que nous avons pour but de résoudre dans cette note est le suivant :

A quelles conditions une courbe transcendante doit-elle satisfaire pour pouvoir faire partie d'un système? Ces conditions étant remplies, quelles sont les caractéristiques du ou des systèmes auxquels cette courbe peut appartenir?

Supposons un instant qu'une courbe transcendante (C), prise au hasard, puisse faire partie d'un système (μ,ν). On sait que le lieu des points de contact des tangentes aux courbes d'un tel système, issues d'un point o quelconque du plan, est une courbe (A) d'ordre $\mu + \nu$, ayant un point multiple d'ordre μ en o (*Loc. cit.*, art. V). Cette courbe (A) passera en particulier

(*) ***Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques*** **(Même recueil). Voir, sur le même sujet, une note insérée aux *Comptes rendus* (séance du 23 mars 1874).**

par les points de contact des tangentes à (C) issues du point o. De là cette conséquence :

Pour qu'une courbe transcendante donnée puisse faire partie d'un système (μ,ν), *il faut que les points de contact des tangentes, menées d'un point o quelconque à cette courbe, soient situés sur une courbe algébrique d'ordre* $\mu+\nu$, *ayant un point multiple d'ordre* μ *en o.*

II. Je dis, de plus, que cette condition est suffisante. En effet, si elle est remplie d'une manière générale, elle le sera en particulier lorsque nous prendrons le point o à l'infini dans la direction

$$(1) \qquad y = \alpha x.$$

Soit

$$(2) \qquad \varphi(x,y,\alpha) = 0$$

l'équation de la courbe (A) de degré $\mu+\nu$, qui contient les points de contact des tangentes à (C) parallèles à la direction (1). En faisant varier α dans (2), on obtiendrait successivement toutes les courbes (A) correspondant aux diverses directions de tangentes. Par suite, l'équation (2) est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de (C) et le coefficient angulaire de la tangente en ce point, ce qui revient à dire que

$$(3) \qquad \varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

est une équation différentielle à laquelle satisfait (C). Mais cette équation différentielle définit, outre la courbe (C), une infinité de courbes formant un système (μ,ν) [*Loc. cit.*, art. II]. Il existe donc bien un système (μ,ν) dont la courbe (C) fait partie.

On voit facilement qu'il ne saurait y avoir plusieurs systèmes dans ce cas; car, s'il en existait un second défini par l'équation

$$(4) \qquad \psi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

les coordonnées de (C), vérifiant à la fois les équations (3) et (4), devraient par suite satisfaire à l'équation résultant de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre (1) et (2). Or, cette dernière équation nécessairement algébrique ne saurait définir une courbe transcendante; donc, etc. Ainsi :

Lorsqu'une courbe transcendante satisfait à la condition ci-dessus indiquée (art. I), *elle fait partie d'un système* (μ,ν), *et ce système est le seul auquel cette courbe puisse appartenir.*

La démonstration qui précède établit même, en s'aidant de l'homographie, qu'une courbe transcendante fait partie d'un système, quand les points de

contact des tangentes, issues d'un point quelconque d'une même droite choisie arbitrairement, sont sur une courbe algébrique.

III. Soit

$$f(x,y)=0$$

l'équation d'une courbe transcendante (C) ; on a

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}=0.$$

Le lieu des points de contact des tangentes menées à (C) parallèlement à la direction

$$y=\alpha x$$

est par suite

$$\frac{df}{dx}+\alpha\frac{df}{dy}=0.$$

L'équation générale des courbes passant par les points de contact de ces tangentes est évidemment

$$Uf(x,y)+V\left(\frac{df}{dx}+\alpha\frac{df}{dy}\right)=0,$$

U et V désignant deux fonctions de x, de y et de α, assujetties à la seule condition d'être continues et bien déterminées.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour que (C) fasse partie d'un système, est que l'on puisse choisir U et V de manière à rendre algébrique, entier et rationnel, le premier membre de la dernière équation. Telle est la condition analytique à laquelle doit satisfaire l'équation d'une courbe transcendante, pour que cette courbe puisse faire partie d'un système.

Il nous paraît difficile de pousser plus loin la recherche générale des caractères que doit présenter une équation transcendante à deux variables, pour définir une courbe susceptible d'appartenir à un système. Nous donnerons seulement quelques exemples de courbes transcendantes remplissant cette condition.

IV. 1° La logarithmique

$$y=lx$$

fait partie d'un système dans les caractéristiques sont $\mu=1$, $\nu=1$. Cela résulte immédiatement de ce que l'on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Le système auquel appartient la logarithmique donnée est formé de logarithmiques résultant toutes de la translation de cette dernière parallèlement à l'axe des y. Leur équation générale est

$$y = lx + c,$$

dans laquelle c désigne une constante arbitraire.

2° La sinussoïde

$$y = \sin x$$

fait partie d'un système dont les caractéristiques sont $\mu = 2$, $\nu = 2$. En effet, on a

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

et par suite

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1.$$

Cette dernière équation, mise sous la forme

$$\left(\frac{dy}{dx} + \cos x\right)\left(\frac{dy}{dx} - \cos x\right) + (y + \sin x)(y - \sin x) = 0,$$

montre que les fonctions désignées ci-dessus par U et V sont, dans ce cas, respectivement égales à $y + \sin x$, $\frac{dy}{dx} + \cos x$.

Le système auquel appartient la sinussoïde donnée est formé des diverses sinussoïdes résultant du glissement de cette dernière le long de l'axe des x.

Nous avons déjà vu (*Loc. cit.*, art. XXII) que la chaînette, la cycloïde, la spirale d'Archimède, la spirale logarithmique, font partie de systèmes dont nous avons donné les caractéristiques. Nous ajouterons qu'il en est de même des épicycloïdes et de la développante de cercle.

Les épicycloïdes ou les développantes de cercle égales et de même pôle forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = 2$, $\nu = 2$.

V. Nous donnerons, en terminant, un type assez général d'équations de courbes transcendantes susceptibles de faire partie d'un système. C'est le suivant

$$F\left[x, y, \sin\frac{m}{n}u, \sin\frac{m'}{n'}u, \ldots, \cos\frac{p}{q}u, \cos\frac{p'}{q'}u, \ldots, e^{\frac{r}{s}u}, e^{\frac{r'}{s'}u}, \ldots\right] = 0,$$

F désignant une fonction algébrique, entière et rationnelle, des quantités contenues dans la parenthèse, u étant une fonction algébrique rationnelle

de x et de y, $m, n, m', n', \ldots, p, q, p', q', \ldots, r, s, r', s', \ldots$ des nombres entiers quelconques.

En effet, en se servant de formules connues, on pourra exprimer toutes les fonctions trigonométriques et exponentielles contenues dans F au moyen de $\sin\frac{u}{\delta}$, $\cos\frac{u}{\delta}$, δ désignant le plus petit commun dénominateur des fractions $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots, \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \ldots, \frac{r}{s}, \frac{r'}{s'}, \ldots$. L'équation donnée étant ramenée à la forme

$$f\left(x, y, \sin\frac{u}{\delta}, \cos\frac{u}{\delta}\right) = 0,$$

en la différentiant par rapport à x, on obtiendra une équation telle que

$$\varphi\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \sin\frac{u}{\delta}, \cos\frac{u}{\delta}\right] = 0,$$

et, en éliminant $\sin\frac{u}{\delta}$ et $\cos\frac{u}{\delta}$ entre les deux dernières équations et la relation

$$\sin^2\frac{u}{\delta} + \cos^2\frac{u}{\delta} = 1,$$

on arrivera finalement à une équation différentielle algébrique, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe définie par l'équation donnée puisse faire partie d'un système.

Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires; par M. Camille Jordan.

(Séance du 8 avril 1874)

I

1. Soit

$$(1) \qquad P = p\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

une équation linéaire d'ordre n, dont les coefficients soient des fonctions entières de x (ou plus généralement des séries convergentes dans toute l'étendue du plan).

Choisissons à volonté la valeur initiale ξ de la variable imaginaire x, en

ayant soin d'éviter les valeurs $\alpha, \beta, \ldots$, qui annulent p, et donnons-nous arbitrairement les valeurs initiales de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. A chaque système de valeurs de ces quantités correspondra, d'après Cauchy, une intégrale y, qui variera avec x suivant une loi parfaitement définie, pourvu qu'on évite de faire passer x par les valeurs $\alpha, \beta, \ldots$.

Soient d'ailleurs $y_1, \ldots, y_n$ des intégrales particulières choisies de telle sorte que leurs valeurs initiales et celles de leurs $n-1$ premières dérivées, $(y_1), \ldots, (y_n), \left(\frac{dy_1}{dx}\right), \ldots, \left(\frac{dy_n}{dx}\right), \ldots$, aient un déterminant différent de zéro; et soit y une autre intégrale quelconque, correspondant aux valeurs initiales $(y), \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots$. On pourra déterminer des constantes $C_1, \ldots, C_n$ par les relations

$$(y) = C_1(y_1) + \ldots + C_n(y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$
$$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = C_1\left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + C_n\left(\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right).$$

On en déduira, en vertu de l'équation différentielle,

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = C_1\left(\frac{d^n y_1}{dx^n}\right) + \ldots + C_n\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

et par suite on aura, d'une manière générale, dans toute la portion du plan où les intégrales sont développables en série convergente suivant les puissances de $x - \xi$,

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

II. Supposons maintenant que x, après avoir varié suivant une loi déterminée quelconque, revienne à son point de départ, et suivons les variations de l'intégrale y_1 et de ses dérivées. Soient $(y), \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots, \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ leurs valeurs finales. Nous aurons passé, comme on le voit, de l'intégrale y_1 à l'intégrale $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$. On passera de même de l'intégrale y_2 à une nouvelle intégrale, de la forme $D_1 y_1 + \ldots + D_n y_n$; etc. Par suite, l'altération produite sur le système des intégrales $y_1, \ldots, y_n$ pourra être représentée par une substitution linéaire (*)

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \\ y_2 & D_1 y_1 + \ldots + D_n y_n \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

(*) Pour plus de détails sur ce sujet, consulter un mémoire de M. Fuchs (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVI).

Si maintenant nous faisons varier x de toutes les manières possibles, de manière à envelopper successivement les divers points singuliers $\alpha, \beta, \ldots$, nous obtiendrons un certain nombre de substitutions dont la combinaison formera un groupe G. Ce groupe sera susceptible de diverses formes, suivant le choix des intégrales particulières $y_1, \ldots, y_n$. (Il est clair qu'on peut prendre pour intégrales indépendantes un système de n fonctions linéaires quelconques de $y_1, \ldots, y_n$, pourvu que leur déterminant ne soit pas nul.)

III. Le groupe G caractérise dans ce qu'il a d'essentiel le type de l'équation différentielle qui lui donne naissance, et reflète ses principales propriétés.

Ainsi cherchons à quelles conditions toutes les intégrales de l'équation $P = 0$ satisferont à des équations algébriques ayant pour coefficients des fonctions synectiques de x.

Il faut pour cela que les diverses fonctions que les substitutions de G font succéder à chacune des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ soient en nombre limité. Par suite, G ne devra contenir qu'un nombre limité de substitutions. Et cette condition sera évidemment suffisante.

IV. Voyons en second lieu (*) comment on pourra reconnaître si l'équation (1) a une intégrale commune avec une équation analogue d'ordre inférieur

$$Q = q\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}} + \ldots + q_\nu y = 0$$

(en excluant la solution évidente $y = 0$).

La fonction y étant supposée satisfaire à la fois aux équations P et Q, satisfera à l'équation

$$(2) \qquad R = qP - pQ^{n-\nu} - f_1 Q^{n-\nu-1} - \ldots - f_{n-\nu} Q = 0,$$

où $Q^{(\rho)}$ désigne la ρ^{me} dérivée de Q, et où $f_1, \ldots, f_{n-\nu}$ sont des fonctions de x choisies de manière à annuler les coefficients $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{d^\nu y}{dx^\nu}$.

Toutes les intégrales communes à $P = 0$ et à $Q = 0$ satisferont à l'équation $R = 0$, et réciproquement. Donc si R est nul identiquement, toutes les intégrales de $Q = 0$ satisferont à $P = 0$. Dans le cas contraire, opérons sur R et Q comme nous l'avons fait sur P et Q; nous obtiendrons une nouvelle équation $S = 0$, d'ordre moindre que $R = 0$ et à laquelle satisferont les intégrales communes. Si S est nul identiquement, toutes les intégrales de $R = 0$ satisferont à $Q = 0$, et par suite à $P = 0$. Poursuivant ainsi, on arrivera

(*) Frobenius, *Sur l'irréductibilité des équations différentielles linéaires* (*Journal de M. Borchardt*, t. LXXVI).

à une équation dont toutes les intégrales satisferont à $P=0$; car, sans cela, on finirait par obtenir une équation de la forme

$$y\,\varphi(x)=0,$$

laquelle n'a plus que la solution $y=0$.

V. Supposons donc qu'il existe une équation linéaire $T=0$, d'ordre $m<n$, dont toutes les intégrales satisfassent à $P=0$. Soient $X_1, \ldots, X_m$ un système de m intégrales distinctes de l'équation $T=0$; $y_{m+1}, \ldots, y_n$, d'autres intégrales de l'équation $P=0$, qui forment avec les précédentes un système de n intégrales distinctes.

Si l'on fait varier x d'une manière arbitraire, les intégrales $X_1, \ldots, X_m$ de l'équation $T=0$ seront transformées en des fonctions linéaires de $X_1, \ldots, X_m$; par suite, toutes les substitutions du groupe de P seront de la forme

$$\begin{vmatrix} X_1, \ldots, X_m & f_1, \ldots, f_m \\ y_{m+1}, \ldots, y_n & f_{m+1}, \ldots, f_n \end{vmatrix},$$

où $f_1, \ldots, f_m$ ne dépendent que de $X_1, \ldots, X_m$, tandis que $f_{m+1}, \ldots, f_n$ pourront dépendre de toutes les variables $X_1, \ldots, X_m, y_{m+1}, \ldots, y_n$.

Réciproquement, si l'on peut choisir $y_1, \ldots, y_m$, de telle sorte que G n'ait que des substitutions de cette forme, ces m intégrales satisferont à l'équation

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} y & \frac{dy}{dx} & \cdots & \frac{d^m y}{dx^m} \\ y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^m y_1}{dx^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & \frac{dy_m}{dx} & \cdots & \frac{d^m y_m}{dx_m} \end{vmatrix} = 0,$$

où les coefficients de y et de ses dérivées ont pour rapports des fonctions monodromes de x.

En effet, si l'on fait décrire à x un contour fermé quelconque, de telle sorte que $y_1, y_2, \ldots$ soient changés en $C_1 y_1 + \ldots + C_m y_m$, $D_1 y_1 + \ldots + D_m y_m, \ldots$, les coefficients de l'équation (3) seront tous multipliés par un même facteur, à savoir le déterminant de $C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_m, \ldots$. Leurs rapports reprendront donc la même valeur, et seront par suite des fonctions monodromes de x.

VI. On voit par ces exemples que dans la théorie des équations différentielles linéaires, comme dans celle des équations algébriques, on aura trois catégories de problèmes à résoudre :

1° L'équation étant donnée, déterminer son groupe. Cette question est du ressort du calcul intégral ;

2° Déterminer les conditions auxquelles le groupe doit satisfaire pour que l'équation donnée jouisse de telle ou telle propriété;

3° Le groupe étant connu, vérifier s'il satisfait ou non aux conditions requises. Cette dernière question ne dépend plus que de la théorie des substitutions.

VII. A cette dernière catégorie se rapporte la question suivante, qui fait l'objet du mémoire actuel :

Etant donné un groupe G, *dérivé de substitutions linéaires* A, B, ... *entre n variables, reconnaître si l'équation différentielle linéaire qui a pour groupe* G *est satisfaite par les intégrales d'équations analogues d'un ordre inférieur à n, et déterminer les groupes de ces équations réduites.*

D'après ce qu'on a vu plus haut, ce problème revient au suivant :

Déterminer de toutes les manières possibles un système de fonctions linéaires $X_1, \ldots, X_m$ *des variables* $y_1, \ldots, y_n$ *telles que chacune des substitutions* A, B, ... *dont* G *est dérivé les remplace par des fonctions linéaires de* $X_1, \ldots, X_m$.

VIII. On peut d'ailleurs faire subir à cet énoncé une légère modification, que nous allons exposer.

Soit $X_1, \ldots, X_m$ un des systèmes de fonctions qu'il s'agit de déterminer. Il est clair que chaque substitution de G transformera les unes dans les autres les diverses fonctions du faisceau (*) F formé par les fonctions linéaires de $X_1, \ldots, X_m$. Si d'ailleurs on choisit dans ce faisceau m fonctions quelconques, linéairement distinctes, toutes les autres pourront s'exprimer linéairement par celles-là, lesquelles formeront un système, jouissant évidemment de la même propriété fondamentale que $X_1, \ldots, X_m$. En remplaçant la considération du système des fonctions particulières $X_1, \ldots, X_m$ par celle du faisceau F, on aura donc l'avantage d'un certain arbitraire dans le choix des fonctions dont on le considère comme dérivé.

Dans cet ordre d'idées, le problème pourra s'énoncer comme il suit :

Déterminer tous les faisceaux tels que chacune des substitutions A, B, ... *transforme leurs fonctions les unes dans les autres.*

On aura toujours un semblable faisceau, formé par l'ensemble des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_n$. S'il n'y en a pas d'autre, le groupe G sera dit *primaire*, et l'équation différentielle correspondante sera *irréductible*. Dans le cas contraire, à chacun des autres faisceaux, dérivés de fonctions distinctes $X_1, \ldots, X_m$ en nombre $< n$, correspondra une équation différentielle

(*) Nous dirons, suivant un usage assez généralement admis, qu'un système de fonctions linéaires forment un *faisceau*, lorsque toute combinaison linéaire de ces fonctions fait elle-même partie de ce système. Un faisceau quelconque F contiendra un certain nombre de fonctions linéairement distinctes, en fonction linéaire desquelles on pourra exprimer toutes les autres, et dont nous dirons que F est *dérivé*.

On voit que la notion du faisceau dans la théorie des fonctions linéaires est analogue à celle du groupe dans la théorie des substitions.

réduite, dont le groupe sera formé par les altérations que les substitutions de G font subir à $X_1, \ldots, X_m$.

IX. Nous commencerons par indiquer (§ II et III) un moyen de reconnaître avec certitude si G est primaire ou non, et de déterminer dans ce dernier cas un faisceau contenant moins de n fonctions linéairement distinctes. Cette question résolue, il sera facile de déterminer tous les faisceaux possibles; ce qui fera l'objet du § IV.

II

X. Soit

$$(4) \qquad A = \begin{vmatrix} y_1 & C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \\ y_2 & D_1 y_1 + \ldots + D_n y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

l'une quelconque des substitutions A, B, C,... dont G est dérivé. Nous prendrons pour variables indépendantes au lieu de $y_1, y_2, \ldots$ des fonctions linéaires de ces variables, choisies de manière à ramener A à sa forme canonique. Nous avons exposé avec détail dans notre *Traité des substitutions*, livre II, chap. II, les moyens d'atteindre ce résultat. Nous nous bornerons ici à rappeler brièvement les points les plus indispensables à l'intelligence de ce qui va suivre.

La question dépend essentiellement, comme on sait, de la résolution de l'équation *caractéristique*

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} C_1 - s & C_2 & \ldots C_n \\ D_1 & D_2 - s & \ldots D_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Soient a, b, ... les racines distinctes que cette équation comporte. A chacune d'elles, telle que a, correspondra en général une fonction $y'_1 = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$ que A multiplie par a; et les rapports des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seront donnés par les équations

$$(6) \qquad \begin{aligned} &(C_1 - a)\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ldots + C_n\alpha_n = 0, \\ &D_1\alpha_1 + (D_2 - a)\alpha_2 + \ldots + D_n\alpha_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais si a annule non-seulement le déterminant (5), mais ses mineurs d'ordre $1, \ldots, k_1 - 1$, les équations (6) laisseront indéterminés $k_1 - 1$ de ces rapports, et l'on aura k_1 fonctions distinctes $y'_1, \ldots, y'^{k_1}_1$ que A multiplie par a.

Dans le cas le plus général, on pourra choisir les nouvelles variables

$y_1, \ldots, y_1^{k_1}, y_2', \ldots, y_2^{k_2}, \ldots, y_p', \ldots, y_p^{k_p}, z_1', \ldots, z_1^{l_1}, z_2', \ldots, z_2^{l_2}, \ldots$ de manière à ramener A à la forme

$$A = \begin{vmatrix} y_1', \ldots, y_1^{k_1} & ay_1', \ldots, ay_1^{k_1} \\ y_2', \ldots, y_2^{k_2} & a(y_2' + y_1'), \ldots, a(y_2^{k_2} + y_1^{k_2}) \\ \cdots & \cdots \\ y_p', \ldots, y_p^{k_p} & a(y_p' + y_{p-1}'), \ldots, a(y_p^{k_p} + y_{p-1}^{k_p}) \\ z_1', \ldots, z_1^{l_1} & bz_1', \ldots, bz_1^{l_1} \\ z_2', \ldots, z_2^{l_2} & b(z_2' + z_1'), \ldots, b(z_2^{l_2} + z_1^{l_2}) \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

les entiers $k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots$ satisfaisant aux inégalités

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_p, \quad l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots, \ldots,$$

et $k_1 + k_2 + \ldots + k_p$, $l_1 + l_2 + \ldots$, ... étant les degrés de multiplicité respectifs des racines $a, b, \ldots$.

Nous supposerons dans cette section que l'équation (5) a plusieurs racines distinctes $a, b, \ldots$.

Les nouvelles variables pourront se répartir en classes $y_1', \ldots, y_p^{k_p}$; $z_1', \ldots, z_2^{l_2}, \ldots$; respectivement correspondantes aux racines $a, b, \ldots$.

XI. Soit maintenant F un faisceau tel que les substitutions de G transforment ces fonctions les unes dans les autres. Nous allons montrer qu'*on peut considérer* F *comme dérivé d'un certain nombre de fonctions distinctes, ne contenant chacune que les variables d'une seule classe.*

Soit en effet

$$f = Y + Z + \ldots \tag{7}$$

l'une quelconque des fonctions du faisceau F, Y étant une fonction des indices y de la première classe, Z une fonction des indices z de la seconde classe, etc.; et soit Φ le faisceau dérivé de f et de ses transformées $f', f'', \ldots$ par les diverses puissances de A. Chacune de ces transformées, et, par suite, chacune des fonctions de Φ, appartiendra au faisceau F.

Cela posé, admettons, pour fixer les idées, que ρ soit le maximum des indices de celles des variables y qui figurent dans Y; σ le maximum des indices de celles des variables z qui figurent dans Z; etc.; nous établirons le théorème suivant :

Théorème. — *Le faisceau Φ contient chacune des fonctions partielles* Y, Z, ... *Il sera d'ailleurs dérivé de $\rho + \sigma + \ldots$ fonctions distinctes, dont ρ formées exclusivement avec les variables y, σ formées exclusivement avec les variables z, etc.*

XII. Nous allons montrer en premier lieu que *le nombre des fonctions distinctes que contient Φ ne peut dépasser $\rho + \sigma + \ldots$.*

En effet, le faisceau Φ, dérivé des transformées de f par les puissances de A, est évidemment contenu dans le faisceau Φ' dérivé des transformées des fonctions partielles Y,Z, ... Ce dernier s'obtient en combinant ensemble les transformées de Y, lesquelles ne contiennent que les y, celles de Z, qui ne contiennent que les z, etc.

Cherchons donc combien les transformées de Y, par exemple, fourniront de fonctions distinctes. Le faisceau Φ' produit par ces transformées contiendra la fonction

$$Y = \lambda' y'_\rho + \lambda'' y''_\rho + \ldots + Y_{\rho-1},$$

où $Y_{\rho-1}$ ne contient plus que celle des variables y dont l'indice est $\leqslant \rho - 1$. Il contiendra de même la transformée de Y par A, que nous désignerons par Y_A. Il contiendra donc la fonction

$$(8) \qquad Y' = \frac{1}{a} Y_A - Y,$$

laquelle sera, comme on le voit aisément, de la forme

$$Y' = \lambda' y'_{\rho-1} + \lambda'' y''_{\rho-1} + \ldots + Y_{\rho-2},$$

Y_1 ne contenant plus que celle des variables y dont l'indice est $\leqslant \rho - 2$.

On voit de même que Φ'_y contiendra

$$(9) \qquad Y'' = \frac{1}{a} Y'_A - Y' = \lambda' y'_{\rho-2} + \lambda'' y''_{\rho-2} + \ldots + Y_{\rho-3},$$

où Y_2 ne contient plus que les variables dont l'indice $\leqslant \rho - 3$.

Continuant ainsi, on arrivera à une dernière fonction

$$(10) \qquad Y^{\rho-1} = \frac{1}{a} Y_A^{\rho-2} - Y^{\rho-2} = \lambda' y'_1 + \lambda'' y''_1 + \ldots,$$

pour laquelle on aura identiquement

$$(11) \qquad \frac{1}{a} Y_A^{\rho-1} - Y^{\rho-1} = 0.$$

Les ρ fonctions Y,Y', ... sont évidemment distinctes, chacune d'elles contenant des variables qui ne figurent pas dans les suivantes. D'ailleurs les équations (8), (9), (10), (11) peuvent se mettre sous la forme

$$Y_A = a(Y + Y'),\ Y'_A = a(Y' + Y''),\ \ldots,\ Y_A^{\rho-1} = aY^{\rho-1}.$$

Donc la substitution A transform echacune de ces fonctions en une fonction linéaire de ces mêmes fonctions. Cela aura lieu évidemment quelque nombre de fois que l'on répète cette substitution. Donc le nombre des fonctions distinctes dont Φ' est dérivé est précisément égal à ρ.

Le faisceau Φ'_z formé par les transformées de Z contiendra de même σ fonctions distinctes; etc. Donc le faisceau Φ' dépendra de $\rho+\sigma+\ldots$ fonctions distinctes; et le faisceau Φ, qui y est contenu, dépendra tout au plus de ce nombre de fonctions.

XIII. Nous allons prouver d'autre part que Φ contient au moins $\rho+\sigma+\ldots$ *fonctions distinctes*.

Pour démontrer cette seconde partie de notre proposition, nous remarquerons que Φ contient la fonction

$$(12)\qquad f=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+Y_{\rho-1}+Z+\ldots.$$

Il contiendra sa transformée f_A par A, et, par suite, la fonction

$$(13)\qquad f'=\frac{1}{a-b}\left(f_A-bf\right),$$

laquelle est de la forme

$$(14)\qquad f'=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+Y'_{\rho-1}+\ldots+Z'+\ldots,$$

Y' étant une fonction analogue à Y, et Z' une fonction analogue à Z, mais de laquelle ont disparu celles des variables z dont l'indice est égal au maximum σ.

De même Φ contiendra la fonction

$$(15)\qquad f''=\frac{1}{a-b}\left(f'_A-bf'\right)=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+Y''_{\rho-1}+Z''+\ldots,$$

où Z'' ne contient plus celles des variables z dont l'indice dépasse $\sigma-2$. Poursuivant ainsi, on voit que Φ contient une fonction d'où tous les indices z ont disparu; s'il y a d'autres séries de variables $u,\ldots$, correspondant à d'autres racines $c,\ldots$ de l'équation caractéristique de A, on les fera disparaître de même. Donc Φ contient une fonction où ne figurent plus que les indices y et qui sera de la forme

$$(16)\qquad \varphi=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+\mathcal{Y}_{\rho-1}.$$

Ses transformées par les puissances de A, combinées entre elles, donneront ρ fonctions distinctes des seules variables y, appartenant à Φ (voir la première partie de la démonstration).

On verrait de même que Φ contient σ fonctions distinctes des variables z; etc.; soit en tout $\rho+\sigma+\ldots$ fonctions distinctes.

XIV. Le faisceau Φ, étant contenu dans Φ' et dépendant comme ce dernier de $\rho+\sigma+\ldots$ fonctions distinctes, se confondra avec lui. Donc il contiendra les fonctions Y,Z,.... *A fortiori*, ces fonctions appartiendront au faisceau F, qui contient Φ. Nous obtenons donc ce résultat :

Si le faisceau F *contient la fonction* $f = Y + Z + \ldots$, *il contiendra les fonctions partielles* Y,Z, ...

Cela posé, soient $Y_1, Y_2, \ldots$ les fonctions linéairement distinctes et ne dépendant que des variables y que contient le faisceau F ; $Z_1, Z_2, \ldots$ les fonctions distinctes contenues dans ce faisceau et ne dépendant que des indices z ; etc. Le faisceau F sera dérivé des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots, \ldots$. En effet, soit $f = Y + Z + \ldots$ une quelconque des fonctions de F. Ce faisceau contient Y, qui ne dépend que des variables y, et par suite sera une fonction linéaire de $Y_1, Y_2, \ldots$. De même Z sera une fonction linéaire de $Z_1, Z_2, \ldots$, etc.

La propriété du faisceau F, énoncée au n° XI, se trouve ainsi démontrée.

XV. Nous venons de voir que les fonctions distinctes dont F est dérivé peuvent être choisies de manière à ne contenir chacune qu'une classe de variables. Il peut se faire que certaines classes ne se trouvent représentées par aucune fonction. Mais, dans tous les cas, F contiendra, soit une fonction Y des variables de la première classe, soit une fonction Z des variables de la seconde classe, etc.

XVI. *Premier cas.* — Supposons que F contienne une fonction

$$f = \lambda y_1' + \mu y_1'' + \ldots = Y \tag{17}$$

des seules variables y. Il contiendra ses transformées $f_B, f_C, \ldots$ par les substitutions B,C, ...; ces nouvelles fonctions sont linéaires, d'une part, relativement aux variables $y, z, \ldots$, d'autre part relativement aux coefficients $\lambda, \mu, \ldots$. On aura d'ailleurs

$$f_B = Y^B + Z^B + \ldots, \quad f_C = Y^C + Z^C + \ldots, \quad \ldots, \tag{18}$$

$Y^B, Y^C, \ldots$ étant des fonctions des variables y, $Z^B, Z^C, \ldots$ des fonctions des variables z, etc. Enfin F contiendra les faisceaux dérivés des transformées de $f_B, f_C, \ldots$ par les puissances de A, lesquels sont, comme nous l'avons vu (n°s XII à XIV), dérivés des fonctions

$$\left\{\begin{array}{l}
Y^B,\ Y'^B = \frac{1}{a} Y_A^B - Y^B,\ Y''^B = \frac{1}{a} Y_A'^B - Y'^B, \ldots \\
Y^C,\ Y'^C = \frac{1}{a} Y_A^C - Y^C, \qquad \ldots \qquad \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z^B,\ Z'^B = \frac{1}{b} Z_A^B - Z^B, \qquad \ldots \qquad \ldots \\
Z^C,\ Z'^C = \frac{1}{b} Z_A^C - Z^C, \qquad \ldots \qquad \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{19}$$

qui ne contiennent chacune que des variables d'une seule classe.

XVII. Les fonctions $Y^B, Y'^B, \ldots, Y^C, Y'^C, \ldots, Z^B, Z'^B, \ldots, Z^C, Z'^C, \ldots$ sont, ainsi que f, des fonctions linéaires des produits $P_1, P_2, \ldots$ obtenus en multipliant successivement les divers coefficients $\lambda, \mu, \ldots$ par les n variables $y, z, \ldots$. Si quelques-unes de ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement en fonction des autres et de f (ce qu'on vérifiera aisément), nous les effacerons. Cette simplification faite, il nous restera un certain nombre de fonctions distinctes $f, f', \ldots, f^r$.

XVIII. Transformons maintenant la fonction f' successivement par B, C, ... Les transformées $f'_B, f'_C, \ldots$ seront de la forme

$$(20) \qquad f'_B = \mathcal{Y}^B + \mathcal{Z}^B + \ldots, \quad f'_C = \mathcal{Y}^C + \mathcal{Z}^C + \ldots, \quad \ldots,$$

où $\mathcal{Y}^B, \mathcal{Y}^C, \ldots$ sont des fonctions des variables y, $\mathcal{Z}^B, \mathcal{Z}^C, \ldots$ des fonctions des variables z, etc.; et F contiendra les fonctions

$$(21) \quad \mathcal{Y}^B, \mathcal{Y}'^B = \frac{1}{a}\mathcal{Y}^B_A - \mathcal{Y}^B, \ldots, \mathcal{Y}^C, \mathcal{Y}'^C, \ldots, \mathcal{Z}^B, \mathcal{Z}'^B, \ldots, \mathcal{Z}^C, \ldots$$

On déduira de même de chacune des fonctions $f'', \ldots, f^r$ une série de fonctions analogues à celles-ci, et toutes contenues dans F.

Les nouvelles fonctions ainsi obtenues sont encore linéaires, par rapport aux produits $P_1, P_2, \ldots$. Si quelques-unes d'entre elles peuvent s'exprimer linéairement en fonction des autres et de $f, f', \ldots, f^r$, nous les effacerons. Soient $f^{r+1}, \ldots, f^s$ les fonctions restantes après cette simplification. Opérons sur elles comme nous l'avons fait d'abord sur f, puis sur $f', \ldots f^r$; nous obtiendrons encore de nouvelles fonctions de $P_1, P_2, \ldots$ contenues dans F. Nous effacerons celles de ces nouvelles fonctions qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de $f, f', \ldots, f^s$. Si, cette simplification faite, il en subsiste quelques-unes, telles que $f^{s+1}, \ldots, f^t$, on opérera de même sur elles, etc. On ne s'arrêtera que lorsque l'on n'obtiendra plus de fonctions nouvelles distinctes de celles déjà trouvées, ce qui arrivera nécessairement, le nombre total des fonctions linéaires distinctes que l'on peut former avec les variables $P_1, P_2, \ldots$ étant limité.

XIX. Les fonctions $f, f', \ldots, f^t$, obtenues comme il vient d'être indiqué, jouiront de la propriété que chacune des substitutions de G les transforme en fonctions linéaires de $f, f', \ldots, f^t$. Il suffit évidemment de prouver la chose pour les substitutions A, B, C, ... dont G est dérivé.

Soit, pour fixer les idées, $f' = Y'^B$ l'une de ces fonctions. En vertu des équations (19), sa transformée Y'^B_A par A sera égale à $a(Y'^B + Y'^B)$; d'autre part, ses transformées par B, C, ... sont respectivement $\mathcal{Y}^B + \mathcal{Z}^B + \ldots$, $\mathcal{Y}^C + \mathcal{Z}^C + \ldots, \ldots$. Or chacune des fonctions partielles qui entrent dans ces expressions est une fonction linéaire de $f, f', \ldots, f^t$.

Le faisceau Ψ, dérivé des fonctions $f, f', \ldots, f^{t}$ jouira donc de la propriété que ses diverses fonctions sont transformées les unes dans les autres par les substitutions de G.

XX. On doit d'ailleurs remarquer que, d'après la manière dont les fonctions $f, f', \ldots, f^{t}$ ont été obtenues, chacune d'elles ne contient que les variables d'une seule classe.

Soient en particulier $f, f_1, f_2, \ldots$ celles de ces fonctions qui ne contiennent que les indices y de la première classe.

Le faisceau Ψ_y, formé par celles des fonctions de Ψ qui dépendent des indices y, sera dérivé des fonctions $f, f_1, f_2, \ldots$, ou, ce qui revient au même, des fonctions $f, \varphi_1 = f_1 + \omega_1 f, \varphi_2 = f_2 + \omega_2 f, \ldots$, où $\omega_1, \omega_2, \ldots$ sont des constantes arbitraires, que nous allons déterminer comme il suit.

XXI. La fonction f_1 est de la forme

$$(22)\quad (ay'_1 + by''_1 + \ldots + dy'_2 + \ldots)\lambda + (a'y'_1 + b'y''_1 + \ldots + d'y''_2 + \ldots)\mu + \ldots$$

et φ_1 sera de la forme

$$(23)\quad [(a+\omega_1)y'_1 + by''_1 + \ldots + dy'_2 + \ldots]\lambda + [a'y'_1 + (b'+\omega_1)y''_1 + \ldots + d'y''_2 + \ldots]\mu + \ldots.$$

Cela posé, nous déterminerons ω_1 de telle sorte que le déterminant

$$(24)\quad \begin{vmatrix} a+\omega_1 & b & d & \ldots \\ a' & b'+\omega_1 & d' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

soit différent de 0, ce qui sera évidemment possible, car ce déterminant égalé à zéro donne une équation en ω_1 dont le premier terme a l'unité pour coefficient. Il suffira d'éviter les racines de cette équation.

Les autres constantes $\omega_2, \ldots$ se détermineront d'une manière analogue.

XXII. Cela posé, la fonction φ_1 s'obtient en opérant sur la fonction

$$(25)\quad f = \lambda y'_1 + \mu y''_1 + \ldots$$

la substitution

$$(26)\quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} y'_1 & (a+\omega_1)y'_1 + by''_1 + \ldots \\ y''_1 & a'y'_1 + (b'+\omega_1)y''_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

De même les fonctions $\varphi_2, \ldots$ s'obtiendront en opérant sur f des substitution $\mathcal{B}, \ldots$.

Par suite, il est clair que le faisceau Ψ_y sera identique au faisceau dérivé des fonctions transformées de f par les substitutions du groupe Γ dérivé des substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$.

Nous supposerons que l'on sache reconnaître si Γ est primaire ou non, et que, dans ce dernier cas, l'on sache y déterminer un faisceau $\mathfrak{F}$ dérivé d'un nombre de fonctions distinctes inférieur à celui des indices y (et tel, que chacune des substitutions $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ remplace ses fonctions les unes par les autres).

XXIII. 1° Si Γ n'est pas primaire, soit ξ l'une quelconque des fonctions de $\mathfrak{F}$; nous disposerons des coefficients indéterminés $\lambda, \mu, \ldots$ de manière à poser

$$\lambda y'_1 + \mu y'_2 + \ldots = \xi.$$

Les transformées $\xi, \xi', \ldots$ de cette fonction par les substitutions dérivées de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ combinées ensemble, formeront un faisceau contenu dans $\mathfrak{F}$ et dépendant par suite d'un nombre ρ de fonctions distinctes au plus égal à celui des fonctions distinctes que contenait $\mathfrak{F}$. Cela posé, parmi les fonctions distinctes dont Ψ est dérivé, et qui ne contiennent chacune qu'une classe de variables, il y en aura ρ seulement qui contiennent les variables y, dont le nombre surpasse ρ, par hypothèse. Dans chacune des autres classes, il ne pourra y avoir plus de fonctions distinctes dans Ψ qu'il n'y a de variables dont elles dépendent. Donc Ψ dépendra de moins de n fonctions distinctes, que l'on obtiendra sans peine en substituant dans $f, f', \ldots, f^{l}$ les valeurs particulières de $\lambda, \mu, \ldots$ et effaçant celles des fonctions de la suite qui peuvent s'exprimer linéairement par les autres, une fois la substitution effectuée.

Ainsi, dans ce cas, G ne sera pas primaire, et nous aurons déterminé, comme on le demandait, un faisceau Ψ contenant moins de n fonctions distinctes.

XXIV. 2° Si Γ est primaire, quelque système de valeurs que l'on donne aux coefficients $\lambda, \mu, \ldots$, le faisceau Ψ_y, obtenu en transformant $\lambda y'_1 + \mu y'_2 + \ldots$ par les substitutions de Γ, dépendra d'un nombre de fonctions distinctes égal à celui des variables y. Donc il contiendra au nombre de ses fonctions toutes celles que l'on peut former avec ces variables, et notamment y'_1.

Donc, dans ce cas, F contiendra nécessairement la fonction y'_1. On pourra donc, sans nuire à la généralité de la question, poser $\lambda = 1, \mu = \ldots = 0$, et vérifier si le faisceau Ψ, formé dans cette hypothèse, dépend de n fonctions distinctes, ou d'un moindre nombre. Dans le premier cas, F, qui contient Ψ, dépendra nécessairement de n fonctions distinctes. Dans le second cas, G ne sera pas primaire, et les fonctions distinctes dont Ψ dépend formeront un système de fonctions tel qu'on demandait de le déterminer.

XXV. *Second cas.* — Supposons que F ne contienne aucune fonction des variables y.

Si F contient une fonction Z des variables z de la seconde classe, on opérera absolument de même que dans l'examen du premier cas, et l'on déter-

minera, s'il y a lieu, un faisceau Ψ contenu dans F et dépendant de moins de n fonctions distinctes.

De même si F ne contient aucune fonction des variables y, ni des variables z, mais une fonction U des variables de la troisième classe.

Continuant ainsi, on voit qu'on pourra toujours déterminer un faisceau Ψ dépendant de n fonctions distinctes, à moins que F ne contienne nécessairement et dans toute hypothèse n fonctions distinctes, auquel cas G sera primaire par définition.

XXVI. La solution précédente suppose que l'on sache résoudre pour le groupe Γ (et ses analogues) la question posée pour le groupe G. Mais le nombre des variables est moindre dans Γ que dans G, puisque Γ ne contient que les variables d'une seule classe. Le problème est donc réduit, et pourra être considéré comme résolu, lorsque nous aurons examiné le cas que nous avons négligé jusqu'à présent, à savoir celui où l'équation caractéristique de la substitution A n'a qu'une seule racine.

III

XXVII. Admettons maintenant que l'équation caractéristique de A n'ait qu'une seule racine a. Si, parmi les substitutions de G, on peut en déterminer une S dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes, on pourra évidemment considérer G comme dérivé des substitutions S,A,B, ...; et raisonnant sur S comme nous l'avons fait précédemment sur A, on obtiendra la même réduction que tout à l'heure.

XXVIII. Nous supposerons d'abord que G ne contient aucune substitution telle que S. En suivant les conséquences de cette hypothèse, nous montrerons que G n'est pas primaire, et nous mettrons ses substitutions sous une forme-type qui mette cette propriété en évidence.

Cette étude préliminaire achevée, nous montrerons comment on peut vérifier immédiatement si l'hypothèse admise est satisfaite, et, dans ce cas, ramener les substitutions de G à leur forme-type.

Dans le cas contraire, nous ferons voir par quelle série d'opérations on pourra obtenir, soit la détermination directe d'un faisceau Ψ contenant moins de n fonctions distinctes, soit une substitution S dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes; ce qui fournira par suite la solution, ou tout au moins la réduction du problème proposé.

XXIX. Admettons que G ne contienne aucune substitution dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes, et voyons ce qui résulte de cette hypothèse.

Soient a la racine unique de l'équation caractéristique de A, b la racine unique de l'équation caractéristique de B, etc. On pourra poser

$$(27) \qquad A = a\mathfrak{A}, \quad B = b\mathfrak{B}, \ldots,$$

a, b, ... représentant des substitutions qui multiplient toutes les variables par a, par b, etc., et $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ des substitutions de déterminant 1 et dont l'équation caractéristique se réduira à $(s-1)^n = 0$.

Soit $T = A^\alpha B^\beta \ldots = a^\alpha b^\beta \ldots \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^\beta \ldots$ une substitution quelconque de G; et considérons la substitution $\mathfrak{T} = \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^\beta \ldots$. Soit

$$(28) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda - s & \mu & \ldots \\ \lambda_1 & \mu_1 - s & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

son équation caractéristique ; l'équation caractéristique de T aura évidemment pour racines celles de l'équation $\Delta = 0$ respectivement multipliées par le facteur constant $(a^\alpha b^\beta \ldots)^n$. Mais, par hypothèse, elle n'a qu'une racine distincte; donc il en est de même de l'équation $\Delta = 0$.

XXX. *La racine unique de l'équation $\Delta = 0$ se réduit à l'unité.*

Nous allons démontrer que si cela est vrai pour deux substitutions S et $\mathfrak{T}$ du groupe $\mathcal{G}$, cela sera vrai pour leur produit $S\mathfrak{T}$. Comme cela est vrai pour $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, cela sera vrai pour leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., et par suite pour toutes les substitutions de $\mathcal{G}$.

XXXI. Supposons les variables indépendantes choisies de manière à ramener S à sa forme canonique

$$(29) \qquad S = \begin{vmatrix} y_1, \ldots, y_r & y_1, \ldots, y_r \\ z_1, \ldots, z_s & z_1 + y_1, \ldots, z_s + y_s \\ u_1, \ldots, u_t & u_1 + z_1, \ldots, u_t + z_t \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

et soit

$$(30) \qquad \mathfrak{T} = \begin{vmatrix} y_1 & a_1 y_1 + \ldots + b_1 z_1 + \ldots + c_1 u_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots \\ u_t & d_1 y_1 + \ldots + e_1 z_1 + \ldots + f_1 u_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

on aura

$$(31) \quad S^\lambda \mathfrak{T} = \begin{vmatrix} y_1 & \left(a_1 + b_1\lambda + c_1 \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \ldots\right) y_1 + \ldots \\ & \quad + (b_1 + c_1\lambda + \ldots) z_1 + \ldots + (c_1 + \ldots) u_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots \\ u_t & \left(d_1 + e_1\lambda + f_1 \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \ldots\right) y_1 + \ldots \\ & \quad + (e_1 + f_1\lambda + \ldots) z_1 + \ldots + (f_1 + \ldots) u_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

et son équation caractéristique sera de la forme

$$(32) \qquad \Delta = s^n + \varphi s^{n-1} + \varphi_1 s^{n-2} + \ldots = 0,$$

$\varphi, \varphi_1, \ldots$ désignant des fonctions entières de λ.

La racine (unique par hypothèse) de cette équation sera une racine n^{me} de l'unité. En effet, cette racine a pour puissance n^{me} (au signe près, si n est impair) le dernier terme de l'équation (32) lequel est égal à $(-1)^n D$, D étant le déterminant de $\mathcal{S}^\lambda \mathcal{T}$; lequel est égal à l'unité, car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des produits formés avec les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, qui toutes ont l'unité pour déterminant. On aura donc

$$(33) \qquad \Delta = (s - \theta)^n = 0,$$

θ étant une racine de l'unité.

On devra avoir

$$(34) \qquad \varphi = -n\theta^{n-1}, \quad \varphi_1 = \frac{n(n-1)}{1.2}\theta^{n-2}, \ldots,$$

et, par suite,

$$(35) \qquad \varphi^n = (-n)^n, \quad \varphi_1^n = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^n, \ldots.$$

Ces équations sont satisfaites, par hypothèse, pour toute valeur de λ; comme elles sont d'ailleurs un degré fini en λ, elles doivent se réduire à des identités. Donc $\varphi, \varphi_1, \ldots$ sont des constantes, et Δ sera indépendant de λ. Or, en posant $\lambda = 0$, on a, par hypothèse, $\Delta = (s-1)^n$. Donc les substitutions $\mathcal{S}\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{S}^\lambda\mathcal{T}, \ldots$ auront toutes la même équation caractéristique $(s-1)^n = 0$.

XXXII. Cela posé, choisissons les variables de manière à ramener $\mathcal{A}$ à sa forme canonique; et, pour rendre le raisonnement plus facile à suivre, faisons une hypothèse particulière. Soit

$$(36) \qquad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3 & & z_1 + y_1, & z_2 + y_2, & z_3 + y_3 & \end{vmatrix}.$$

Soit d'autre part

$$(37) \qquad \mathcal{T} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_\rho & a_{\rho 1} y_1 + \ldots + a_{\rho 4} y_4 & & & + b_{\rho 1} z_1 + \ldots + b_{\rho 3} z_3 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_\rho & c_{\rho 1} y_1 + \ldots + c_{\rho 4} y_4 & & & + d_{\rho 1} z_1 + \ldots + d_{\rho 3} z_3 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

une substitution quelconque de $\mathcal{G}$. On aura

$$(38)\quad \mathcal{A}^{\lambda}\mathfrak{T}=\left|\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{\varrho}\quad (a_{\varrho 1}+b_{\varrho 1}\lambda)y_1+\ldots+(a_{\varrho 3}+b_{\varrho 3}\lambda)y_3+a_{\varrho 4}y_4+b_{\varrho 1}z_1+\ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{\varrho}\quad (c_{\varrho 1}+d_{\varrho 1}\lambda)y_1+\ldots+(c_{\varrho 3}+d_{\varrho 3}\lambda)y_3+c_{\varrho 4}y_4+d_{\varrho 1}z_1+\ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right|,$$

et son équation caractéristique

$$(39)\qquad \Delta=\left|\begin{array}{lll} a_{11}+b_{11}\lambda-s & a_{12}+b_{12}\lambda & \ldots \\ a_{21}+b_{21}\lambda & a_{22}+b_{22}\lambda-s & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|=0$$

aura, comme on vient de le voir, ses coefficients indépendants de λ. Mais il est aisé de voir que cette équation contient les termes

$$(40)\qquad \left|\begin{array}{lll} b_{11}\lambda-s & b_{12}\lambda & b_{13}\lambda \\ b_{21}\lambda & b_{22}\lambda-s & b_{23}\lambda \\ b_{31}\lambda & b_{32}\lambda & b_{33}\lambda-s \end{array}\right| s^4$$

lesquels ne se réduiront avec aucun autre, et par suite devront s'annuler identiquement, quels que soient s et λ.

Égalant séparément à zéro les termes en λs^6, $\lambda^2 s^5$, $\lambda^3 s^4$, il viendra

$$(41)\qquad b_{11}+b_{22}+b_{33}=0,$$

$$(42)\qquad \left|\begin{array}{ll} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array}\right|+\left|\begin{array}{ll} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{array}\right|+\left|\begin{array}{ll} b_{33} & b_{31} \\ b_{13} & b_{11} \end{array}\right|=0,$$

$$(43)\qquad \left|\begin{array}{lll} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right|=0.$$

XXXIII. Nous remarquerons maintenant que l'on peut, sans altérer l'expression de la substitution $\mathcal{A}$, prendre pour variables indépendantes, au lieu de y_1, y_2, y_3, des fonctions linéaires quelconques de ces variables, pourvu qu'on opère un changement analogue sur les variables z_1, z_2, z_3. Nous allons profiter de cette latitude pour simplifier l'expression de $\mathfrak{T}$.

XXXIV. L'équation (43) nous montre qu'on peut déterminer des nombres l_1, l_2, l_3 satisfaisant à l'équation

$$(44)\quad l_1(b_{11}z_1+b_{12}z_2+b_{13}z_3)+l_2(b_{21}z_1+b_{22}z_2+b_{23}z_3) \\ +l_3(b_{31}z_1+b_{32}z_2+b_{33}z_3)=0.$$

Si donc on prend pour l'une des nouvelles variables l'expression $l_1y_1+l_2y_2+l_3y_3$, l'expression que $\mathfrak{T}$ lui fait succéder ne contiendra plus les variables z. On aura donc, par cette transformation, fait disparaître de l'expression de $\mathfrak{T}$ les coefficients b_{31}, b_{32}, b_{33}.

Supposons cette opération faite; l'équation (42) prendra la forme plus simple

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

On pourra déterminer deux constantes m_1, m_2, telles que l'on ait

$$(46) \qquad m_1(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + m_2(b_{21}z_1 + b_{22})z_2 = 0,$$

et si l'on prend pour nouvelle variable $m_1y_1 + m_2y_2$, on fera disparaître de $\mathfrak{T}$ les coefficients b_{21}, b_{22}. Cela fait, l'équation (41) se réduira à $b_{11} = 0$. On voit donc qu'on peut supposer

$$(47) \qquad b_{11} = b_{21} = b_{22} = b_{31} = b_{32} = b_{33} = 0.$$

XXXV. Nous allons montrer en outre que si l'un des coefficients b_{12}, b_{23} est nul, on peut admettre que l'autre l'est également.

Soit d'abord $b_{12} = 0$. On pourra déterminer deux entiers l_1, l_2 tels qu'on ait $l_1b_{13} + l_2b_{23} = 0$. Si $b_{13} >$ ou < 0, l_2 ne sera pas nul, et l'on pourra prendre pour variables indépendantes, au lieu de y_2, z_2, les suivantes $l_1y_1 + l_2y_2$, $l_1z_1 + l_2z_2$, ce qui n'altérera pas l'expression de $\mathfrak{A}$, et transformera $\mathfrak{T}$ en une expression analogue, mais où le coefficient analogue à b_{23} aura disparu. Si $b_{23} = 0$, on arrivera au même résultat en permutant les variables y_1, z_1 avec les variables y_2, z_2.

Soit en second lieu $b_{23} = 0$. Si $b_{13} >$ ou < 0, on fera disparaître le coefficient analogue à b_{12} en prenant pour nouvelles variables $b_{12}y_2 + b_{13}y_3$, $b_{12}z_2 + b_{13}z_3$ à la place de y_3, z_3. Si b_{13} était nul, on obtiendrait le même résultat en permutant y_2, z_2 avec y_3, z_3.

XXXVI. Soit maintenant

$$(48) \qquad \mathfrak{U} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\rho \quad a'_{\rho 1}y_1 + \ldots + a'_{\rho 4}y_4 + b'_{\rho 1}z_1 + \ldots + b'_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\rho \quad c'_{\rho 1}y_1 + \ldots + c'_{\rho 4}y_4 + d'_{\rho 1}z_1 + \ldots + d'_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

une substitution quelconque du groupe $\mathfrak{G}$.

La substitution $\mathfrak{T}\mathfrak{A}^\mu\mathfrak{U}$, où μ est un entier indéterminé, sera de la forme

$$(49) \qquad \mathfrak{V} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\rho \quad a''_{\rho 1}y_1 + \ldots + a''_{\rho 4}y_4 + b''_{\rho 1}z_1 + \ldots + b''_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\rho \quad c''_{\rho 1}y_1 + \ldots + c''_{\rho 1}y_1 + d''_{\rho 4}z_4 + \ldots + d''_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix},$$

en posant pour abréger

$$(50)\qquad b''_{\rho\sigma} = (a'_{\rho 1} + b'_{\rho 1}\mu)b_{1\sigma} + (a'_{\rho 2} + b'_{\rho 2}\mu)b_{2\sigma} + (a'_{\rho 3} + b_{\rho 3}\mu)b_{3\sigma} + a'_{\rho 4}b_{4\sigma} + b'_{\rho 1}d_{1\sigma} + b'_{\rho 2}d_{2\sigma} + b'_{\rho 3}d_{3\sigma},$$

et de même pour les autres coefficients.

Les coefficients $b''_{11}, \ldots, b''_{33}$ doivent satisfaire, quel que soit μ, aux équations (41), (42), (43). On aura donc en particulier

$$(51)\qquad b''_{11} + b''_{22} + b''_{33} = 0.$$

Substituons dans cette équation les valeurs de $b''_{11}, b''_{22}, b''_{33}$, et égalons séparément à zéro les termes qui multiplient μ; il viendra, en tenant compte des équations (47),

$$(52)\qquad b'_{21}b_{12} + b'_{31}b_{13} + b'_{32}b_{23} = 0.$$

XXXVII. Cette équation doit être satisfaite quelle que soit la substitution $\mathfrak{U}$ que l'on considère dans le groupe $\mathfrak{G}$. Donc elle aura encore lieu en remplaçant les coefficients $b'_{21}, b'_{31}, b'_{32}$ de $\mathfrak{U}$ par les coefficients correspondants de $\mathfrak{V}$. On aura donc, quel que soit μ,

$$(53)\qquad b''_{21}b_{12} + b''_{31}b_{13} + b''_{32}b_{23} = 0.$$

Remplaçons dans cette équation $b''_{21}, b''_{31}, b''_{32}$ par leurs valeurs, et égalons séparément à zéro les termes multipliés par μ. Il viendra, en tenant compte des équations (47),

$$(54)\qquad b_{12}b_{23}b'_{31} = 0.$$

XXXVIII. On peut satisfaire à cette équation: 1° en posant

$$(55)\qquad b'_{31} = 0;$$

2° en posant $b_{12}\,b_{23} = 0$, d'où l'on déduira (35)

$$(56)\qquad b_{12} = 0,\ b_{23} = 0,$$

puis, en vertu de l'équation (52),

$$(57)\qquad b_{13} = 0.$$

XXXIX. Il est maintenant aisé de voir que $\mathfrak{G}$ *ne peut être primaire.*

En effet, supposons d'abord qu'on puisse choisir $\mathfrak{U}$ de telle sorte que l'on ait $b'_{31} >$ ou < 0. On aura les équations (47), (56) et (57), desquelles il résulte que $\mathfrak{T}$ remplace y_1, y_2, y_3 par des fonctions de y_1, y_2, y_3, y_4 seulement; $\mathfrak{T}$ désignant d'ailleurs une substitution *quelconque* du groupe $\mathfrak{G}$.

Cela posé, soient $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \ldots$ les diverses substitutions de ce groupe; $Y, Y', \ldots$

les fonctions qu'elles font succéder à y_1. Chacune de ces fonctions ne dépendra que des variables y_1, y_2, y_3, y_4. Donc, le faisceau formé par les fonctions linéaires de la forme $\alpha Y + \alpha' Y' + \ldots$ contiendra un nombre de fonctions linéairement distinctes au plus égal à 4. Soient $Y_1, \ldots, Y_k$ ces fonctions.

D'autre part, chacune des substitutions de $\mathcal{G}$ transforme les unes dans les autres les fonctions $Y, Y', \ldots$; car supposons que l'une d'elles $\mathfrak{S}_1$ transforme Y en Y_1; soit $\mathfrak{S}$ la substitution qui transforme y_1 en Y; Y_1 étant la transformée de y_1 par $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}_1$ appartiendra à la suite $Y, Y', \ldots$.

Donc les substitutions de $\mathcal{G}$ transformeront les unes dans les autres les fonctions du faisceau $\alpha Y + \alpha' Y' + \ldots$. Le nombre des fonctions distinctes $Y_1, \ldots, Y_k$ contenues dans ce faisceau, étant inférieur à celui des variables, $\mathcal{G}$ ne sera pas primaire; et si l'on prend pour variables indépendantes les fonctions $Y_1, \ldots, Y_k$, avec d'autres fonctions quelconques $Y_{k+1}, \ldots$, les substitutions de $\mathcal{G}$ seront de la forme générale

$$(58) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_k & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_k Y_k, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_k Y_k \\ Y_{k+1}, \ldots & Y_1 Y_1 + \ldots + Y_k Y_k + Y_{k+1} Y_{k+1} + \ldots, \ldots \end{matrix} \right|.$$

Supposons maintenant que l'on ait $b'_{31} = 0$ quel que soit $\mathfrak{U}$; on arrivera à la même conséquence. En effet, soient $Y, Y', \ldots$ les fonctions que les substitutions de $\mathcal{G}$ font succéder à y_3; aucune d'elles ne contiendra z_3. Donc le faisceau formé par les fonctions $Y, Y', \ldots$ contiendra un nombre de fonctions distinctes $Y_1, \ldots, Y_k$ inférieur d'une unité au moins au nombre total des variables $y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_3$. Cela posé, on achèvera le raisonnement comme dans l'autre hypothèse.

XL. Supposons donc les substitutions de $\mathcal{G}$ ramenées à la forme (58). Le premier membre de l'équation caractéristique d'une substitution de cette forme est évidemment divisible par celui de l'équation caractéristique de la substitution à k variables

$$(59) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_k & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_k Y_k, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_k Y_k \end{matrix} \right|.$$

Mais, par hypothèse, toutes les substitutions de $\mathcal{G}$ ont pour premier membre de leur équation caractéristique une puissance de $s - 1$. Donc il en doit être de même des substitutions partielles (59); donc le groupe $\mathcal{G}_k$ formé par ces substitutions ne sera pas primaire si $k > 1$; et ses substitutions pourront se mettre par un choix convenable des variables indépendantes sous la forme

$$(60) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_l & \varphi_1(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \varphi_l(Y_1, \ldots, Y_l) \\ Y_{l+1}, \ldots, Y_k & \varphi_{l+1}(Y_1, \ldots, Y_k), \ldots, \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \end{matrix} \right|,$$

l étant $< k$.

Si $l > 1$, on pourra de même choisir les variables $Y_1, \ldots, Y_l$, de manière à mettre les substitutions partielles

$$(61) \qquad | Y_1, \ldots, Y_l \; \varphi_1(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \varphi_l(Y_1, \ldots, Y_l) |$$

sous la forme plus simple

$$(62) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_m & \psi_1(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, \psi_m(Y_1, \ldots, Y_m) \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_l & \psi_{m+1}(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \psi_l(Y_1, \ldots, Y_l) \end{matrix} \right|$$

Continuant ainsi, on voit que l'on pourra choisir les variables indépendantes de telle sorte que la première de ces variables, Y_1, soit multipliée par un simple facteur constant dans chacune des substitutions de $\mathcal{G}$. D'ailleurs, ce facteur constant doit se réduire à l'unité; car, s'il était égal à α dans une des substitutions de $\mathcal{G}$, le premier membre de l'équation caractéristique de cette substitution serait divisible par $s - \alpha$; or, il se réduit à une puissance de $s - 1$, par hypothèse. Donc $\alpha = 1$.

Nous avons donc ce théorème :

Si toutes les substitutions de $\mathcal{G}$ ont pour équation caractéristique $(s-1)^n = 0$, il existe une fonction au moins des variables $y_1, \ldots, y_n$ qui n'est altérée par aucune substitution de $\mathcal{G}$.

XLI. Il peut d'ailleurs exister plusieurs semblables fonctions. Supposons qu'il en existe p distinctes. On pourra, en les prenant pour variables indépendantes, mettre les substitutions de $\mathcal{G}$ sous la forme

$$(63) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_p & Y_1, \ldots, Y_p \\ Y_{p+1}, \ldots, Y_n & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_n Y_n \end{matrix} \right|.$$

Or, le premier membre de l'équation caractéristique d'une semblable substitution est égal au produit de $(s-1)^p$ par le premier membre de l'équation caractéristique de la substitution

$$(64) \quad | Y_{p+1}, \ldots, Y_n \quad \alpha_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + \alpha_n Y_n, \ldots, \beta_{p+1} Y_1 + \ldots + \beta_n Y_n |.$$

Donc les substitutions de cette forme, correspondantes aux diverses substitutions de $\mathcal{G}$, auront toutes pour équation caractéristique $(s-1)^{n-p} = 0$.

On en conclut qu'on pourra choisir les variables de manière à les mettre sous la forme

$$(65) \quad \left| \begin{matrix} Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q} & Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q} \\ Y_{p+q+1}, \ldots, Y_n & \alpha'_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + \alpha'_n Y_n, \ldots, \beta'_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + \beta'_n Y_n \end{matrix} \right|.$$

Continuant ainsi, on voit que *les substitutions de $\mathcal{G}$ pourront se mettre sous la forme générale*

$$(66)\qquad \left|\begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_p & Y_1, \ldots, Y_p \\ Y_{p+1}, \ldots, Y_q & Y_{p+1}+f_{p+1}, \ldots, Y_q+f_q \\ Y_{q+1}, \ldots, Y_r & Y_{q+1}+f_{q+1}, \ldots Y_r+f_r \\ \ldots & \ldots \end{matrix}\right|,$$

où $f_{p+1}, \ldots, f_q$ sont des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_p$; $f_{q+1}, \ldots, f_r$ des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_q$, etc.

En particulier, les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ dont $\mathcal{G}$ est dérivé, seront de cette forme. Cela est d'ailleurs suffisant, car le produit de deux substitutions de la forme (66) est évidemment de cette même forme.

XLII. Rien n'est maintenant plus simple que de vérifier si les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ sont ou non susceptibles d'être réduites à la forme (66). On cherchera, par la méthode des coefficients indéterminés, s'il existe ou non des fonctions des variables initiales $y_1, \ldots, y_n$ qui ne soient altérées par aucunes des substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. On aura, pour déterminer les coefficients d'une semblable fonction, des équations linéaires homogènes, en nombre surabondant. Si ces équations peuvent néanmoins être satisfaites, soit p le nombre des coefficients inconnus qui restent arbitraires; on aura p fonctions distinctes $Y_1, \ldots, Y_p$ jouissant de la propriété cherchée. On cherchera ensuite s'il existe des fonctions $Y_1, \ldots, Y_q$ que $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ accroissent simplement de fonctions linéaires $Y_1, \ldots, Y_p$: ce qui conduira à résoudre un autre système d'équations du premier degré, et ainsi de suite. Si l'on ne se heurte chemin faisant à aucun système d'équations incompatible, il suffira de prendre pour variables $Y_1, \ldots, Y_p, Y_{p+1}, \ldots, Y_q, \ldots$ pour ramener $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ et par suite les autres substitutions de $\mathcal{G}$ à la forme (66). Quant aux substitutions correspondantes $A = a\mathcal{A}$, $B = b\mathcal{B}, \ldots$ du groupe G, elles se déduiront de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ en multipliant toutes les fonctions qui forment le second nombre de leurs expressions par a, par $b, \ldots$.

Chacune des substitutions de G multipliera donc par un simple facteur constant chacune des variables $Y_1, \ldots, Y_p$. On aura déterminé, par suite, de p manières différentes, un système d'une seule fonction que les substitutions de G remplacent par des fonctions linéaires de cette même fonction; ce qui résout le problème que nous nous étions proposé.

XLIII. Supposons maintenant qu'en suivant la marche indiquée au n° XLII nous ayons abouti à une impossibilité; ce qui indiquera que $\mathcal{G}$ contient une substitution, dont l'équation caractéristique a plusieurs racines distinctes. Pour résoudre le problème dans ce dernier cas, on opérera comme il suit:

Prenons, comme précédemment, pour variables indépendantes, celles qui ramènent $\mathcal{A}$ à sa forme canonique, et supposons, pour fixer les idées, que

cette forme canonique soit celle que donne la formule (36). Nous déterminerons ensuite les transformées de la fonction y_1 par les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. Si, parmi ces transformées, il en existe qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de y_1, on les effacera : soient $y'_1, \ldots, y^r_1$ celles qui restent. En les transformant par $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, on obtiendra de nouvelles fonctions, parmi lesquelles on effacera toutes celles qui s'expriment linéairement en fonction des autres et des fonctions $y_1, y'_1, \ldots, y^r_1$. S'il en reste encore quelques-unes $y^{r+1}_1, \ldots, y^s_1$, on les transformera par $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'obtienne plus de fonctions nouvelles, ce qui arrivera nécessairement, car le nombre total des fonctions distinctes que l'on peut obtenir ne saurait dépasser le nombre des variables $y_1, \ldots, y_4$.

Les fonctions $y_1, y'_1, \ldots$ ainsi obtenues jouiront évidemment de la propriété que les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ (et par suite toutes les substitutions de $\mathcal{G}$) remplacent chacune d'elles par une fonction linéaire de $y_1, y'_1, \ldots$. Cela posé, deux cas pourront se présenter.

XLIV. 1° Si aucune de ces fonctions ne contient les variables z_1, z_2, z_3, leur nombre sera au plus égal à celui des variables y_1, y_2, y_3, y_4; et, sans aller plus loin, on aura obtenu un système de moins de n fonctions tel, que les substitutions de $\mathcal{G}$, et par suite celles de G qui n'en diffèrent que par des facteurs constants, les remplacent par des fonctions linéaires les unes des autres. Le faisceau Ψ dérivé de ces fonctions satisfera à notre problème.

XLV. 2° Si, parmi les fonctions $y_1, y'_1, \ldots$ il en est une y^0_1 qui contienne z_1, z_2, z_3, on arrêtera la série des opérations précédentes au moment où l'on arrivera à y^0_1 ; et, en repassant la suite des transformations par laquelle on a passé de y_1 à y^0_1, on déterminera aisément la substitution $\mathcal{T}$ qui transforme y_1 en y^0_1. Cette substitution sera de la forme (37), et les coefficients $b_{11}, \ldots, b_{55}$ satisferont ou non aux équations (41), (42), (43).

S'ils n'y satisfont pas, on pourra déterminer une substitution de la forme $\mathcal{A}^\lambda\mathcal{T}$ dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes. Pour cela, on développera le déterminant (39), qui forme le premier membre de l'équation caractéristique de $\mathcal{A}^\lambda\mathcal{T}$; soit

$$\Delta = s^n + \varphi s^{n-1} + \varphi_1 s^{n-} + \ldots = 0$$

ce déterminant. On n'aura qu'à assigner à λ une valeur qui ne satisfasse pas aux équations (35). On y arrivera par une suite d'essais en nombre au plus égal à $n\tau$, τ étant le degré en λ de l'un des coefficients $\varphi, \varphi_1, \ldots$. On pourra alors traiter le problème comme il est indiqué au n° XXVII.

XLVI. Si les équations (41), (42), (43) sont satisfaites, on pourra choisir les variables indépendantes de telle sorte que les équations (47) le soient (XXXIII-XXXIV). Si en outre on a $b_{12}b_{23} = 0$, on pourra faire en sorte que b_{12} et b_{23} soient nuls séparément (XXXV). Mais b_{13} sera différent de 0.

XLVII. Cela posé, déterminons les transformées de y_s par les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. Effaçons celles de ces transformées, s'il y en a, qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de y_s. Transformons de nouveau celles qui restent par $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, et ainsi de suite. Nous obtiendrons une suite nécessairement limitée de fonctions distinctes $y_s, y'_s, \ldots$, que les substitutions de G transformeront en fonctions linéaires de $y_s, y'_s, \ldots$.

Si aucune des fonctions $y_s, y'_s, \ldots$ ne contient la variable z_1, leur nombre sera au plus égal à $n-1$, puisqu'elles ne dépendent que des $n-1$ variables autres que z_1; et l'on aura ainsi un système de moins de n fonctions, que les substitutions de G remplacent par des fonctions linéaires de ces mêmes fonctions. Le problème se trouve ainsi résolu.

XLVIII. Supposons au contraire que l'une de ces fonctions, y^{σ}_s, contienne la variable z_1. La substitution $\mathcal{U}$, qui remplace y_s par y^{σ}_s, sera de la forme (48), et le coefficient b'_{s1} y sera différent de 0. Par suite, les équations (52) et (54) ne pourrront être satisfaites à la fois (XXXVIII).

Si $\mathcal{U}$ ne satisfait pas à l'équation (52), la substitution $\mathcal{V} = \mathcal{T}\mathcal{A}^{\mu}\mathcal{U}$ aura la forme (49), et l'on pourra déterminer μ de telle sorte que l'équation (51) ne soit pas satisfaite (XXXVI). On pourra ensuite déterminer λ de telle sorte que la substitution $\mathcal{A}^{\lambda}\mathcal{V}$ ait une équation caractéristique autre que $(s-1)^n = 0$.

Si c'est l'équation (54) qui n'est pas satisfaite, on déterminera μ de telle sorte que $\mathcal{V}$ ne satisfasse pas à l'équation (53), analogue à (52). On raisonnera ensuite sur $\mathcal{V}$ comme on vient de le faire sur $\mathcal{U}$ dans le cas précédent.

IV

XLIX. Nous avons vu, dans ce qui précède, comment on peut reconnaître si le groupe G est primaire; et, s'il ne l'est pas, comment on peut choisir ses variables de manière à mettre ses subsitutions sous la forme

$$(67) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_k & \varphi_1(Y_1, \ldots, Y_k), & \ldots, \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \\ Y_{k+1}, \ldots, Y_n & \varphi_{\rho+1}(Y_1, \ldots, Y_n), & \ldots, \varphi_n(Y_1, \ldots, Y_n) \end{matrix} \right|.$$

Si le groupe formé par ces substitutions partielles

$$(68) \qquad \left| Y_1, \ldots, Y_k \quad \varphi_1(Y_1, \ldots, Y_k), \ldots, \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \right|$$

n'est pas primaire, on pourra choisir les variables de manière à mettre ces substitutions sous la forme

$$(69) \qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_l & \psi_1(Y_1, \ldots, Y_l), & \ldots, \psi_l(Y_1, \ldots, Y_l) \\ Y_{l+1}, \ldots, Y_k & \psi_{l+1}(Y_1, \ldots, Y_k), & \ldots, \psi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \end{matrix} \right|.$$

Si le groupe formé par les substitutions partielles

$$(70)\qquad \left| Y_1, \ldots, Y_l \quad \psi_1(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \psi_l(Y_1, \ldots, Y_l) \right|.$$

n'était pas primaire, on pourrait simplifier d'une manière analogue l'expression de ces substitutions. Continuant ainsi, on voit qu'on pourra mettre les substitutions de G sous la forme

$$(71)\qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_m & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_n & \gamma_1 Y_1 + \ldots + \gamma_n Y_n, \ldots, \delta_1 Y_1 + \ldots + \delta_n Y_n \end{matrix} \right|,$$

le groupe formé par les substitutions partielles

$$(72)\qquad \left| Y_1, \ldots, Y_m \quad \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \right|$$

étant primaire.

L. Cela posé, si le groupe formé par les substitutions

$$(73)\qquad \left| Y_{m+1}, \ldots, Y_n \quad \gamma_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \gamma_n Y_n, \ldots, \delta_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \delta_n Y_n \right|$$

n'est pas primaire, on pourra choisir les variables $Y_{m+1}, \ldots, Y_n$ de manière à mettre ces substitutions sous la forme

$$(74)\qquad \left| \begin{matrix} Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} & \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'}, \ldots, \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} \\ Y_{m'+1}, \ldots, Y_n & \gamma'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \gamma'_n Y_n, \ldots, \delta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \delta'_n Y_n \end{matrix} \right|,$$

les substitutions partielles

$$(75)\qquad \left| Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} \quad \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'}, \ldots, \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} \right|$$

formant un groupe primaire.

Les substitutions de G prendront alors la forme

$$\left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_m & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} & \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'} + f_{m+1}(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, \\ & \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} + f_{m'}(Y_1, \ldots, Y_m) \\ Y_{m'+1}, \ldots, Y_n & \varphi_{m'+1}(Y_1, \ldots, Y_n), \ldots, \varphi_n(Y_1, \ldots, Y_n) \end{matrix} \right|.$$

Continuant ainsi, on voit qu'on pourra mettre les substitutions de G sous la forme

$$(76)\qquad \left| \begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_m & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} & \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'} + f_{m+1}(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, \\ & \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} + f_{m'}(Y_1, \ldots, Y_m) \\ Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''} & \alpha''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \alpha''_{m''} Y_{m''} + f_{m'+1}(Y_1, \ldots, Y_{m'}), \ldots, \\ & \beta''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \beta''_{m''} Y_{m''} + f_{m''}(Y_1, \ldots, Y_{m'}) \\ \ldots & \ldots \end{matrix} \right|,$$

les substitutions partielles

$$(77) \qquad | Y_1, \ldots, Y_m \quad \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m |$$

$$(78) \quad | Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} \quad \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'}, \ldots, \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} |$$

formant autant de groupes primitifs.

LI. Voyons maintenant comment on pourra déterminer tous les faisceaux tels, que les substitutions de G transforment leurs fonctions les unes dans les autres.

Soit F un semblable faisceau. Nous dirons qu'il est de la première classe, si les fonctions qui le composent ne dépendent que des variables $Y_1, \ldots, Y_m$; de la seconde classe, si quelques-unes de ces fonctions dépendent des variables $Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'}$, sans qu'aucune d'elles dépende des variables suivantes; et ainsi de suite.

Le groupe formé par les substitutions (77) étant primaire, par hypothèse, il n'existera évidemment qu'un seul faisceau de première classe, lequel sera formé de toutes les combinaisons linéaires des variables $Y_1, \ldots, Y_m$.

Nous allons donner d'autre part un moyen de déterminer les faisceaux de la classe k, lorsqu'on connaîtra les faisceaux des classes inférieures à k. Connaissant le seul faisceau qui entre dans la première classe, on pourra s'élever ainsi progressivement à la connaissance de tous les faisceaux possibles.

LII. Soit pour fixer les idées $k = 3$. Désignons par $F, F', \ldots$ les divers faisceaux de première et de seconde classe, par Φ l'un des faisceaux inconnus de la troisième classe. Les diverses fonctions de Φ seront de la forme $P + Q$, $P_1 + Q_1, \ldots$, en désignant par $P, P_1, \ldots$ des fonctions de $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ et par $Q, Q_1, \ldots$ des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. D'ailleurs les substitutions de G, que nous avons mises sous la forme (76), transforment les unes dans les autres les fonctions $P + Q, P_1 + Q_1, \ldots$. Il faudra évidemment pour cela que les substitutions

$$| Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''} \quad \alpha''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \alpha''_{m''} Y_{m''}, \ldots, \beta''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \beta''_{m''} Y_{m''} |$$

transforment les unes dans les autres les fonctions partielles $P, P_1, \ldots$. Mais, par hypothèse, ces substitutions forment un groupe primaire Γ; donc le faisceau formé par les fonctions $P, P_1, \ldots$ contiendra toutes les fonctions linéaires des variables $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$. En particulier, il contiendra $Y_{m'+1}$. Par suite, Φ contiendra une fonction de la forme

$$f = Y_{m'+1} + Q = Y_{m'+1} + \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_{m'} Y_{m'}.$$

LIII. Formons les transformées $f', \ldots$ de la fonction f par les substitutions $A, B, \ldots$, en considérant $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}$ comme des indéterminées. Si, parmi ces transformées, il en est qui s'expriment linéairement en fonction des au-

tres et de f, nous les supprimerons. Soient $f', \ldots, f^r$ celles qui restent. Transformons-les par A,B,... et supprimons encore celles de ces transformées qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de $f, f', \ldots, f^r$. Soient $f^{r+1}, \ldots, f^s$ celles qui restent; nous les transformerons encore par A,B,... et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'obtienne plus de nouvelles transformées, linéairement distinctes des précédentes. Cela arrivera forcément, car les transformées successivement obtenues, dépendant linéairement de $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ et des m'^2 produits $\lambda_1 Y_1, \lambda_1 Y_2, \ldots, \lambda_{m'} Y_{m'}$, il ne peut y en avoir plus de $m'' - m' + m'^2$ qui soient linéairement distinctes.

Soient $f, \ldots, f^t$ les fonctions ainsi obtenues. En les combinant linéairement, on obtiendra un faisceau de fonctions, que les substitutions de G transforment les unes dans les autres. Ces fonctions sont respectivement de la forme $P + Q, P' + Q', \ldots, P^t + Q^t, P, P', \ldots, P^t$ étant des fonctions de $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ et $Q, Q', \ldots, Q^t$ des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. D'ailleurs les substitutions de Γ permuteront évidemment les unes dans les autres les fonctions du faisceau formé par la combinaison linéaire des fonctions partielles $P, P', \ldots, P^t$. Mais Γ est primaire, par hypothèse; donc, parmi les fonctions $P, P', \ldots, P^t$, toutes formées avec les $m'' - m'$ variables $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$, il y en aura $m'' - m'$ de distinctes.

LIV. Supposons, par exemple, que $P, P', \ldots, P^{m''-m'-1}$ soient distinctes. Soit $\varphi = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ une quelconque des fonctions du faisceau Φ. La fonction $\mathfrak{P}$ des indices $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ pourra s'exprimer linéairement en fonction des $m'' - m'$ fonctions distinctes $P, \ldots, P^{m''-m'-1}$. Soit, par exemple,

$$\mathfrak{P} = dP + \ldots + d^{m''-m'-1} P^{m''-m'-1}.$$

On aura évidemment

$$\varphi = df + \ldots + d^{m''-m'-1} f^{m''-m'-1} + \mathfrak{Q}_1,$$

$\mathfrak{Q}_1$ ne dépendant plus que des variables $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. Donc Φ s'obtiendra en combinant les $m'' - m'$ fonctions $P, \ldots, P^{m''-m'-1}$ avec des fonctions $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ des seuls indices $Y_1, \ldots, Y_{m'}$.

LV. Il peut se faire que $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ se réduisent toutes à zéro. Dans le cas contraire, elles formeront un faisceau de fonctions que les substitutions de G permuteront évidemment les unes dans les autres. Ce sera donc un des faisceaux $F, F', \ldots$ déjà déterminés.

LVI. Parmi ces fonctions $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$, il en est qu'il est aisé de déterminer. Ce sont celles qui appartiennent au faisceau dérivé de $f, \ldots, f^t$, lequel est évidemment contenu dans Φ. Pour les obtenir, on remarquera que les fonctions $f^{m''-m'}, \ldots, f^t$ se réduiront respectivement, par la soustraction de fonctions linéaires convenables de $f, \ldots, f^{m''-m-1}$, à des fonctions $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t$ des

seules variables $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. D'ailleurs les coefficients des variables dans ces fonctions seront évidemment linéaires par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}$.

LVII. Si l'on veut que $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ se réduisent à zéro, il faudra *a fortiori* que les fonctions $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t$ qui font partie de cette suite s'annulent. Il faudra pour cela que les coefficients de $Y_1, \ldots, Y_m$ s'annulent tous dans chacune de ces fonctions, ce qui donnera pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}$ un système d'équations linéaires, en général surabondant. Si ces équations ne sont pas incompatibles, à chaque système de valeurs qui y satisfait, correspondra un faisceau Φ, dérivé des seules fonctions $f, \ldots, f^{m''-m'-1}$.

LVIII. Si l'on veut que $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ forment par leur réunion l'un des faisceaux F, F', ... déjà trouvés, par exemple le faisceau F, il faudra que $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t$ appartiennent à ce faisceau. Or, soient $\chi, \chi', \ldots$ les fonctions distinctes que contient le faisceau F ; les diverses fonctions de F seront de la forme $\mu\chi + \mu'\chi' + \ldots$; et l'on aura à satisfaire aux conditions

$$\mathfrak{Q}^{m''-m'} = \mu\chi + \mu'\chi' + \ldots, \quad \mathfrak{Q}^{m''-m'+1} = \mu_1\chi + \mu_1'\chi' + \ldots, \ldots$$

Remplaçant dans ces équations $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t, \chi, \chi', \ldots$ par leurs valeurs en $Y_1, \ldots, Y_m$ et égalant séparément à zéro les coefficients de chaque variable, on aura pour déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}, \mu, \mu', \ldots, \mu_1, \mu_1', \ldots, \ldots$ un système d'équations linéaires. Si ces équations sont incompatibles, il n'existera aucun faisceau Φ de troisième classe et contenant F. Sinon, à chaque système de solutions correspondra un faisceau Φ.

On remarquera cependant que si, dans l'expression

$$f = Y_{m'+1} + \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_{m'} Y_{m'},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ont reçu un système de valeurs permettant de déterminer un faisceau Φ qui contienne F, on obtiendra une infinité de systèmes de valeurs qui engendrent le même faisceau, en considérant les fonctions de la forme

$$f + \nu\chi + \nu'\chi' + \ldots,$$

où ν, ν' sont des constantes quelconques.

Détermination du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues; par M. Fouret.

(Séance du 28 janvier 1874)

I. D'après un théorème bien connu, dû à Bezout, *le nombre des solutions d'un système de n équations algébriques de degrés quelconques à n inconnues est, en général et au plus, égal au produit des degrés de ces équations.*

Ce nombre de solutions est rigoureusement atteint, lorsque les équations

sont complètes et que leurs divers coefficients sont indépendants les uns des autres; mais, en dehors de ce cas général, le nombre des solutions est fréquemment au-dessous de la limite donnée par le théorème de Bezout.

Je me propose, dans cette note, premièrement de donner une démonstration nouvelle et fort simple de ce théorème; secondement de le compléter, en faisant voir comment les particularités présentées par les équations peuvent amener, dans certains cas, une diminution dans le nombre des solutions.

Ces recherches m'ont été inspirées par deux intéressantes communications faites, il y a quelques mois, à l'Académie, par M. Chasles, touchant la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques, situés à distance finie (*Comptes-rendus*, t. LXXV, p. 736, et t. LXXVI, p. 126). En me basant sur les mêmes considérations, j'ai traité, dans une première note présentée à la Société mathématique, le cas de trois surfaces ou autrement dit de trois équations (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 122) (*). Enfin, en généralisant le même mode de démonstration et lui donnant une forme analytique, je suis parvenu à l'appliquer au cas général d'un nombre quelconque d'équations. C'est ce résultat que je me propose de développer ici.

II. Soit

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(x,y,z,\ldots,s,t)=0,\\ f_2(x,y,z,\ldots,s,t)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f_{n-1}(x,y,z,\ldots,s,t)=0,\\ f_n(x,y,z,\ldots,s,t)=0, \end{array}\right.$$

un système de n équations algébriques à n inconnues, et de degrés respectivement égaux à $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$.

Nous supposerons que ces équations ne manquent d'aucun terme et que leurs coefficients soient indépendants les uns des autres. Je dis que le nombre des solutions de ce système d'équations est égal à $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$.

Pour démontrer ce théorème dans toute sa généralité, il nous suffira d'établir que, supposé vrai dans le cas de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, il l'est également dans le cas de n équations à n inconnues; car, de la propriété dont jouit toute équation algébrique à une inconnue d'admettre un nombre de racines égal à son degré, on pourra dès lors conclure qu'un système de deux équations à deux inconnues admet un nombre de solutions égal au produit de leurs degrés, et ainsi de suite, de proche en proche,

(*) J'ai communiqué le 9 juillet dernier, à la Société mathématique, une seconde démonstration du théorème relatif à l'intersection de trois surfaces, dont l'analogue en géométrie à deux dimensions comprend, comme cas particuliers, les diverses démonstrations données par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 736, et t. LXXVI, p. 126).

jusqu'au cas d'un système formé d'un nombre quelconque d'équations à pareil nombre d'inconnues.

III. Cela posé, considérons le système formé par les $n-1$ premières équations (1) et les suivantes :

$$f_n(\xi,\eta,\zeta,\ldots,\sigma,\tau)=0, \tag{2}$$

qui n'est autre que la dernière des équations (1) dans laquelle $\xi,\eta,\zeta,\ldots,\sigma,\tau$ sont substitués respectivement à $x, y, z, \ldots, s, t$,

$$\frac{\xi+a}{x+a}=\frac{\eta+b}{y+b}=\frac{\zeta+c}{z+c}=\ldots=\frac{\sigma+g}{s+g}=\frac{\tau+h}{t+h}=\rho. \tag{3}$$

$$Ax+By+Cz+\ldots+Gs+Ht=l, \tag{4}$$

$$A\xi+B\eta+C\zeta+\ldots+G\sigma+H\tau=\lambda, \tag{5}$$

$a, b, c, \ldots, g, h$, A, B, C, ..., G, H étant des coefficients quelconques, $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau, \rho, l$ et λ étant des variables qui, jointes à $x, y, z, \ldots, s, t$, forment un nombre total de $2n+3$ variables liées entre elles par $2n+2$ équations.

En éliminant entre ces équations les $2n+1$ variables autres que l et λ, on obtiendrait une certaine équation

$$\varphi(l,\lambda)=0. \tag{6}$$

Cherchons quel serait le degré de λ dans cette équation. Pour cela, supposons donnée à l une certaine valeur prise d'ailleurs arbitrairement. En vertu du théorème de Bezout, admis provisoirement dans le cas de $n-1$ équations, le système formé des $n-1$ premières équations (1) et de l'équation (4) déterminera $p_1 p_2 \ldots p_{n-1}$ systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$. D'un autre côté, en tirant des équations (3)

$$\xi=\rho x+a(\rho-1),\ \eta=\rho y+b(\rho-1),\ \ldots,\ \tau=\rho t+h(\rho-1),$$

et substituant ces expressions dans (2), on formera une équation en $x, y, z, \ldots, s, t$ et ρ, de degré p_n en ρ, qui, pour chaque système de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, fournira p_n valeurs de ρ, dont on déduira, en vertu des équations (3) et (5), p_n systèmes de valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$ et λ. D'où il résulte qu'à une valeur de l choisie arbitrairement correspondra un nombre de valeurs de λ égal à $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$. Autrement dit, le degré de λ dans l'équation (6) sera égal à $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$.

En donnant à λ une valeur quelconque, on tirerait du système d'équations ci-dessus défini un certain nombre π de solutions de $x, y, z, \ldots, s, t$, et, par suite, π valeurs de l. Par suite, en faisant dans (6) $l=\lambda$, on aurait une équation en l ou λ, d'un degré égal à $p_1 p_2 \ldots p_n+\pi$ (*).

(*) Nous démontrons plus loin que le terme en $\lambda^{p_1 p_2 \ldots p_n} l^{\pi}$ existe dans l'équation (6), ce qui est nécessaire pour compléter notre raisonnement.

IV. Pour $\rho = 1$, le système formé des $n-1$ premières équations (1) et des équations (2), (3), (4) et (5), est satisfait par tout système de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, déterminé par le système des n équations (1). D'autre part, à chacune de ces solutions correspond une valeur de $l = \lambda$. Par suite, les solutions du système (1) sont comprises parmi les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, qui dérivent de la condition $l = \lambda$ introduite dans le système formé des $n-1$ premières équations (1) et des équations (2), (3), (4) et (5). Or, il est facile de trouver quels sont les divers systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, qui dérivent de cette condition. En effet, en ayant égard aux relations (3), on peut écrire l'équation (5) sous la forme suivante :

$$(7) \qquad Ax + By + Cz + \ldots + Gs + Ht = \frac{\lambda - (\rho - 1)k}{\rho},$$

en posant

$$Aa + Bb + Cc + \ldots + Gg + Hh = k.$$

En comparant cette équation avec l'équation (4), on voit qu'elles ne sont compatibles qu'autant que l'on a, soit $\rho = 1$, soit $\lambda = -k$.

Or, à la valeur $\lambda = -k$, comme à toute valeur de λ, correspondent π systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, qui, dans le cas général où nous nous plaçons ici, ne sauraient être identiques respectivement à des systèmes correspondants de valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$. Donc, parmi les $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n + \pi$ valeurs de $l = \lambda$, il n'y en a que $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$ qui correspondent à $\rho = 1$; et les $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$ systèmes de valeurs correspondantes de $x, y, z, \ldots, s, t$ étant, comme nous l'avons vu, les solutions du système (1), le théorème de Bezout se trouve démontré.

V. Dans la démonstration précédente, nous avons admis que l'équation (6) était de degré $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n + \pi$, c'est-à-dire qu'elle contenait un terme en $\lambda^{p_1 p_2 \ldots p_n} l^{\pi}$. Cherchons dans quels cas le degré de l'équation (6) pourra s'abaisser, et quelles conséquences il en résultera pour le nombre des solutions du système des équations (1).

Il est facile de voir que le degré de l'équation (6) s'abaissera si, à une valeur de l infiniment grande, correspond un nombre de valeurs de λ inférieur à $p_1 p_2 \ldots p_n$. Or, pour que l soit infiniment grand, il faut, d'après l'équation (4), qu'une ou plusieurs des variables $x, y, z, \ldots, s, t$ prennent des valeurs infiniment grandes. En les supposant toutes dans ce cas, les $n-1$ premières équations (1) qui déterminent ces valeurs peuvent être réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, et deviennent par ce fait homogènes. Elles sont, en conséquence, satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$; mais les rapports de $n-1$ de ces variables à la $n^{\text{ème}}$ sont déterminés et doivent satisfaire à un système de $n-1$ équations, dont les degrés respectifs sont $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Soit $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, ..., $s = s'$, $t = t'$ un système de valeurs des variables qui satisfasse à l'ensemble de ces équations. En désignant par r un paramètre quelconque, les valeurs

$$(8) \qquad x = \frac{x'}{r},\ y = \frac{y'}{r},\ z = \frac{z'}{r}, \ldots, s = \frac{s'}{r},\ t = \frac{t'}{r}$$

satisferont également au système des $n-1$ équations, et, en faisant r infiniment petit, on aura une solution correspondant à une valeur infiniment grande de l. Il y aura ainsi, d'après le théorème de Bezout, admis dans le cas de $n-1$ équations, $p_1, p_2 \ldots, p_{n-1}$ systèmes distincts de valeurs infiniment grandes des variables qui satisferont au système des $n-1$ premières équations (1).

En substituant dans (2) les valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, déduites de (8), au moyen des équations (3), c'est-à-dire

$$\xi = \frac{\rho}{r} x' + a(\rho - 1),\ \eta = \frac{\rho}{r} y' + b(\rho - 1),\ \zeta = \frac{\rho}{r} z' + c(\rho - 1), \ldots,$$
$$\sigma = \frac{\rho}{r} s' + g(\rho - 1),\ \tau = \frac{\rho}{r} t' + h(\rho - 1),$$

nous formerons une équation en ρ, qui sera du degré p_n, et fournira pour $\frac{\rho}{r}$ p_n valeurs finies, lorsque l'on supposera que r et ρ deviennent ensemble infiniment petits.

Chacune de ces racines fournissant une solution en $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, on aura au total un nombre de solutions en $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$ égal à $p_1 p_2 \ldots p_n$, donnant un pareil nombre de valeurs de λ.

Le nombre des valeurs de λ correspondant à une valeur infiniment grande est donc, en général, égal à $p_1 p_2 \ldots p_n$: ce qui complète la démonstration du théorème de Bezout, tel que nous l'avons énoncé en commençant.

VI. Il en serait autrement dans le cas où le degré de l'équation en ρ, ou en $\frac{\rho}{r}$ (ρ et r étant supposés infiniment petits), viendrait à s'abaisser. Or, il faudrait pour cela que le coefficient du terme en $\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p_n}$ fût nul, c'est-à-dire que les valeurs

$$\xi = x',\ \eta = y',\ \zeta = z',\ \ldots,\ \sigma = s',\ \tau = t'$$

annulassent le polynôme formé par l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans l'équation (2); ou autrement dit que le système des équations (1), réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, eussent une ou plusieurs solutions communes (en dehors, bien entendu, de la solution $x = 0$, $y = 0, \ldots, s = 0, t = 0$).

Cette circonstance exige qu'un certain déterminant, qui n'est autre que le résultant des équations (1) réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, soit nul.

On peut donc dire que *le nombre des solutions d'un système d'équations algébriques à pareil nombre d'inconnues est égal au produit des degrés de ces équations, toutes les fois que ces équations sont complètes et qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients des termes du plus haut degré dans chaque équation. Le nombre des solutions est moindre, lorsque le résultant des équations, réduites chacune à leurs termes du plus haut degré, est nul.*

VII. En outre, dans ce dernier cas, si ω désigne le nombre des systèmes de valeurs de $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{s}{x}, \frac{t}{x}$, qui satisfont à l'ensemble des équations (1) réduites chacune à leurs termes du plus haut degré, chaque solution étant d'ailleurs comptée dans ω avec son degré de multiplicité, il est facile de voir que le nombre des solutions (en valeurs finies) du système des équations (1) sera égal à

$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n - \omega.$$

Il suffit, pour cela, de considérer ω solutions du système des équations (1) supposées générales, c'est-à-dire exemptes de toute particularité, et d'imaginer que les coefficients de ces équations varient de telle sorte que les valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, composant chacune des ω solutions, deviennent infinies.

Ces ω solutions se trouveront perdues pour le système (1), mais elles donneront lieu en même temps à ω solutions en $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{s}{x}, \frac{t}{x}$, qui seront communes aux équations (1) réduites chacune à leurs termes du plus haut degré.

VIII. Il est un cas où, au seul aspect des équations, on reconnaît immédiatement des réductions à faire au nombre de solutions indiqué par le théorème de Bezout. C'est lorsque, dans les diverses équations, les degrés d'une des inconnues sont respectivement inférieurs aux degrés de ces équations. Dans ce cas, les équations en $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{s}{x}, \frac{t}{x}$, résultant des équations (1) réduites respectivement à leurs termes du plus haut degré, admettent la solution commune $\frac{y}{x} = 0, \frac{z}{x} = 0, \ldots, \frac{s}{x} = 0, \frac{t}{x} = 0$.

Supposons par exemple que x entre aux degrés $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n$ dans les équations (1), $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n$ étant d'ailleurs respectivement moindres que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Il est facile de démontrer que le nombre des solutions en valeurs finies du système (1) sera au plus égal à

$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n - (p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \cdots (p_{n-1} - m_{n-1})(p_n - m_n)$$

Nous y parviendrons en établissant tout d'abord la proposition suivante :

IX. Supposons que les équations (1) n'aient respectivement aucun terme d'un degré inférieur à q_1 pour la première, à q_2 pour la seconde, etc., à q_n pour la $n^{\text{ème}}$, et qu'elles soient d'ailleurs exemptes de toute autre particularité. Nous allons démontrer que la solution

$$x=0,\ y=0,\ z=0, \ldots, s=0,\ t=0$$

qui satisfait à ces équations doit être comptée avec un degré de multiplicité égal à $q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_n$.

Pour cela, considérons le système formé par l'ensemble des $n-1$ premières équations (1) jointes à l'équation (4), et éliminons une des variables, t par exemple, entre ces n équations. Nous formerons ainsi un système de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, de degrés respectivement égaux à $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$,

$$(9)\qquad \begin{cases} \Psi_1(x,y,z,\ldots,s)=0, \\ \Psi_2(x,y,z,\ldots,s)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Psi_{n-1}(x,y,z,\ldots,s)=0. \end{cases}$$

En faisant $l=0$, les termes de degrés supérieurs à $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ disparaîtront respectivement de ces équations, et l'on obtiendra par suite un système remplissant les mêmes conditions que le système (1), mais contenant une équation et une inconnue de moins.

Admettons provisoirement comme vraie, pour le cas de $n-1$ équations, la proposition à établir, c'est-à-dire admettons que la solution

$$x=0,\ y=0,\ z=0, \ldots, s=0,\ t=0$$

doive être comptée avec un degré de multiplicité égal à $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$. Il nous suffira d'en déduire que le même fait sera encore vrai dans le cas d'un système de n équations, tel que le système (1), remplissant les mêmes conditions.

En effet, si, au lieu de supposer $l=0$ dans le système (9), nous le supposons infiniment petit, il résulte de notre hypothèse que ce système admet un nombre de solutions en valeurs infiniment petites, qui est égal à $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$. Si l'on considère l'équation en ρ résultant de la substitution, dans l'équation (2), des valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, tirées des équations (3), il est facile de voir que, pour tout système de valeurs infiniment petites de $x, y, z, \ldots, s, t$, cette équation en ρ admet q_n racines infiniment peu différentes de l'unité. Par suite, aux $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$ groupes de valeurs infiniment petites de $x, y, z, \ldots, s, t$, donnés par l'ensemble des équations (4) et (9), correspondent $q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_n$ valeurs de ρ infiniment peu différentes de l'unité, et, en

vertu des relations (3) et (5), $q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n$ groupes de valeurs infiniment petites de $\xi, \eta, \zeta, \dots, \sigma, \tau$ et λ.

En outre, dans l'hypothèse où nous raisonnons, d'équations ne présentant pas d'autres particularités que de manquer respectivement des termes de degrés inférieurs à $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, il est facile de voir que les valeurs correspondantes de l et λ sont du même ordre infinitésimal.

En effet, des équations (3), (4) et (5), on tire immédiatement

$$\lambda = \rho l + k(\rho - 1),$$

d'où

$$\frac{\lambda}{l} = \rho + k\frac{\rho - 1}{l}.$$

Le rapport $\frac{\lambda}{l}$ aura une valeur finie, et, par suite, λ et l seront du même ordre infinitésimal, si le rapport $\frac{\rho - 1}{l}$ est infiniment petit, ou bien s'il a une valeur finie, mais différente de $-\frac{1}{k}$.

Or, en vertu de l'équation (4), $x, y, z, \dots, s, t$ ne peuvent être toutes ensemble d'un ordre infinitésimal inférieur ou supérieur à celui de l, et, comme aucune particularité ne distingue ces variables les unes des autres dans les $n-1$ premières équations (1), nous sommes certains qu'elles seront toutes du même ordre infinitésimal que l.

Cela posé, après avoir substitué dans (2) les valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \dots, \sigma, \tau$ résultant des équations (3), divisons par l^{q_n} : nous obtenons une équation de degré q_n en $\frac{\rho - 1}{l}$ dans laquelle le coefficient de $\left(\frac{\rho - 1}{l}\right)^{q_n}$ est, à un infiniment petit près, égal au résultat de la substitution de a à x, b à y, etc., g à s, h à t, dans l'ensemble des termes de degré q_n de la $n^{\text{ème}}$ équation (1).

Comme $a, b, c, \dots, g, h$ peuvent être choisis arbitrairement, on pourra toujours faire en sorte que ce coefficient ne soit pas nul : l'équation en $\frac{\rho - 1}{l}$ aura, par suite, q_n racines finies. De plus, k pouvant être quelconque et n'avoir aucune relation avec les coefficients de l'équation en $\frac{\rho - 1}{l}$, il est évident qu'aucune des racines de cette équation ne sera égale à $-\frac{1}{k}$.

Nous pouvons donc affirmer que, dans l'hypothèse admise au début de cette démonstration, à une valeur infiniment petite de l correspondent $q_1 q_2 \dots q_n$ valeurs finies de $\frac{\lambda}{l}$, et, par suite, que les valeurs correspondantes de λ et l sont du même ordre infinitésimal.

Cela posé, en considérant respectivement l et λ comme l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe définie par l'équation (6), on déduit immédiatement de ce qui précède que cette courbe a un point multiple d'ordre $q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_n$ à l'origine des coordonnées. D'où il suit que la droite $l = \lambda$, rencontrant la courbe à l'origine en un nombre de points au moins égal à $q_1 q_2 \ldots q_n$, ne la rencontre plus en dehors de l'origine qu'en un nombre de points au plus égal à

$$p_1 p_2 \cdots p_n - q_1 q_2 \cdots q_n + \pi,$$

π ayant d'ailleurs la signification donnée précédemment (art. III). En déduisant de ce nombre le nombre π des valeurs égales de l et λ auxquelles ne correspondent pas des valeurs égales de x et ξ, y et η, z et ζ, etc., s et σ, t et τ, c'est-à-dire des solutions du système (1), on voit finalement que le nombre de ces solutions, abstraction faite de la solution ($x = 0, y = 0, \ldots, s = 0, t = 0$), est au plus égal à

$$p_1 p_2 \cdots p_n - q_1 q_2 \cdots q_n \quad (*).$$

X. Revenons maintenant au théorème que nous avons énoncé ci-dessus (art. IX), et supposons que x entre dans les équations (1) à des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivement moindres que $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ces équations n'offrant d'ailleurs aucune autre particularité. Prenons n nouvelles variables $x', y', z', \ldots, s', t'$ liées à $x, y, z, \ldots, s, t$, par les relations

$$(10) \qquad x = \frac{1}{x'},\ y = \frac{y'}{x'},\ z = \frac{z'}{x'},\ \ldots,\ s = \frac{s'}{x'},\ t = \frac{t'}{x'}.$$

Par la substitution de ces expressions dans les équations (1), on obtiendra un nouveau système d'équations à n inconnues, dont les degrés seront respectivement égaux à ceux des équations dont elles dérivent, c'est-à-dire à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et dans lesquelles manqueront les termes de degré inférieur à $p_1 - m_1$ pour la première, $p_2 - m_2$ pour la seconde, etc., $p_n - m_n$ pour la $n^{\text{ème}}$ (**). D'après ce que nous avons vu ci-dessus (art. IX), ce système d'équations admettra la solution

$$x' = 0,\ y' = 0,\ \ldots,\ s' = 0,\ t' = 0$$

à un degré de multiplicité au moins égal à

$$(p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \cdots (p_{n-1} - m_{n-1})(p_n - m_n).$$

Or, d'après la première des relations (10), à chaque valeur infiniment petite de x' correspond une valeur infiniment grande de x et réciproque-

(*) Voir la note I à la fin du mémoire.
(**) Voir la démonstration de ce fait à la note II, à la fin du mémoire.

ment. Il y aura donc une solution du système (1) d'un degré de multiplicité au moins égal à

$$(p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \dots (p_{n-1} - m_{n-1})(p_n - m_n)$$

qui correspondra à une valeur infiniment grande de x; et le nombre indiquant ce degré de multiplicité devra être déduit de $p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n$, si l'on veut avoir le nombre des solutions, en valeurs finies, du système (1).

XI. Les propositions que nous avons démontrées ci-dessus peuvent se résumer de la manière suivante :

Si l'on désigne par $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ les degrés respectifs de n équations algébriques à pareil nombre d'inconnues, par $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$ les degrés les plus élevés auxquels l'une quelconque de ces inconnues entre dans ces diverses équations, par ω le nombre des solutions en valeurs finies communes à ces équations réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, et dans lesquelles l'une de ces inconnues est remplacée par l'unité, le nombre des solutions, en valeurs finies, du système des équations ainsi définies est égal à

$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n - \sum \Big[(p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \dots (p_{n-1} - m_{n-1})(p_n - m_n) \Big] - \omega,$$

$\sum$ désignant la somme des produits analogues à $(p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \dots$ qui se rapportent aux diverses inconnues $x, y, z, \dots, s, t$.

L'expression ci-dessus est en même temps une limite supérieure du degré de l'équation finale que l'on obtiendrait, en éliminant, entre les équations données, toutes les inconnues moins une.

Si l'on suppose de plus que les n équations données manquent respectivement des termes de degré inférieurs à $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$, le degré de l'équation finale est susceptible de s'abaisser à

$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n - \sum \Big[(p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \dots (p_{n-1} - m_{n-1})(p_n - m_n) \Big] - q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n - \omega.$$

NOTE I

Au sujet du point multiple de la courbe

$$\varphi(l, \lambda) = 0$$

qui coïncide avec l'origine des coordonnées, on peut remarquer que le nombre des points d'intersection de cette courbe et de la droite

$$l = \lambda,$$

qui sont réunis à l'origine, pourra, dans certains cas, être supérieur à à $q_1 q_2 \ldots q_n$. Ce fait se présentera lorsqu'une ou plusieurs branches de la courbe auront avec la droite, à l'origine, un contact d'un ordre plus ou moins élevé; ou, autrement dit, lorsqu'une ou plusieurs valeurs de $\frac{\lambda - l}{l}$ seront infiniment petites en même temps que l.

En s'appuyant sur un théorème dû à M. Halphen (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 132), on peut même voir immédiatement que *le nombre des points d'intersection de la courbe et de la droite $l = \lambda$, et par suite le nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, du système* (1), *sera égal à la somme des ordres des valeurs de $\lambda - l$, correspondant à une valeur infiniment petite de l considéré comme infiniment petit principal.*

Cela posé, de la relation

$$\lambda = \rho l + k(\rho - 1)$$

on déduit

$$\frac{\lambda - l}{l} = \rho - 1 + k\frac{\rho - 1}{l}.$$

Cette dernière équation nous montre que $\frac{\lambda - l}{l}$ et $\frac{\rho - 1}{l}$ ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à eux, ou, autrement dit, sont du même ordre infinitésimal.

Par suite, on peut dire que *le nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, du système* (1), *est égal à la somme des ordres des valeurs de $\rho - 1$, correspondant à une valeur infiniment petite de l, pris pour infiniment petit principal.*

L'équation en $\rho - 1$ peut s'écrire

$$f_n[\rho x + a(\rho - 1), \rho y + b(\rho - 1), \ldots, \rho t + h(\rho - 1)] = 0.$$

Du développement par la formule de Taylor, il résulte que le produit des racines de cette équation en $\rho - 1$, qui correspondent à un système quelconque de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, est, à un facteur constant près,

$$f_n(\rho x, \rho y, \rho z, \ldots, \rho s, \rho t),$$

ou, plus simplement,

$$f_n(x, y, z, \ldots, s, t),$$

en remarquant que ρ tend vers 1, lorsque l tend vers 0.

Le produit V des valeurs de $\rho - 1$, correspondant aux diverses solutions

en $x, y, z, \ldots, s, t$, du système formé des $n-1$ premières équations (1) et de l'équation (4), sera

$$V = \Pi_{i=1}^{i=P} \left[f_n(x_i, y_i, z_i, \ldots, s_i, t_i) \right],$$

P désignant le nombre des solutions de ce système d'équations.

Or, cette dernière expression est, à un facteur constant près, égal au premier membre de la résultante du système formé des équations (1) et de l'équation (4).

Cette résultante, une fois formée, donnera la valeur de V en fonction de l; et, en considérant ce paramètre comme infiniment petit principal, le degré le moins élevé de l dans V sera égal à l'ordre infinitésimal de V, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, au nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, du système (1).

A la vérité, le problème ayant pour objet la recherche de l'ordre infinitésimal de V semble, au premier aspect, aussi compliqué que celui qui consisterait à former l'équation finale du système (1). Mais il est facile de voir qu'il se simplifie notablement par suite de la faculté que l'on a de négliger, dans les équations (1), un certain nombre de termes.

En effet, soit $(x_i, y_i, z_i, \ldots, s_i, t_i)$ une solution du système formé des $n-1$ premières équations (1) et de l'équation (4), pour une valeur infiniment petite de l. Il est bien clair que, quels que soient les ordres infinitésimaux respectifs de $x_i, y_i, z_i, \ldots, s_i, t_i$, un terme tel que

$$Rx_i^{\alpha} y_i^{\beta} z_i^{\gamma} \ldots s_i^{\mu} t_i^{\nu},$$

appartenant à l'une quelconque des équations (1), sera d'un ordre infinitésimal moindre que le terme

$$R'x_i^{\alpha'} y_i^{\beta'} z_i^{\gamma'} \ldots s_i^{\mu'} t_i^{\nu'}$$

appartenant à la même équation, et pour lequel on aurait

$$\alpha' > \alpha, \beta' > \beta, \gamma' > \gamma, \ldots, \mu' > \mu, \nu' > \nu,$$

un ou plusieurs de ces exposants pouvant d'ailleurs être nuls.

Pour le but que l'on se propose, on pourra négliger ce dernier terme et tous ceux d'une même équation qui se trouveront dans le même cas.

Cette simple remarque permettra de supprimer un assez grand nombre de termes dans les équations proposées et d'arriver assez fréquemment dans la pratique à la détermination exacte et complète du nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, d'un système d'équations données.

NOTE II

Considérons une équation de degré p à n variables $x, y, z, \ldots, s, t$, dans laquelle x n'entre qu'au degré $m < p$, et supposons-la ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x. Elle sera de la forme

$$(10) \qquad \chi_p(y, z, \ldots, s, t) + x\chi_{p-1} + x^2\chi_{p-2} + \ldots + x^m\chi_{p-m} = 0,$$

$\chi_p, \chi_{p-1}, \ldots, \chi_{p-m}$ désignant des polynômes en $y, z, \ldots, s, t$, de degrés respectivement égaux à $p, p-1, \ldots, p-m$.

Remplaçons dans (10) les variables $x, y, z, \ldots, s, t$, par d'autres $x', y', z', \ldots, s', t'$, liées aux premières par les relations

$$x = \frac{1}{x'}, \; y = \frac{y'}{x'}, \; \ldots, \; t = \frac{t'}{x'},$$

et multiplions par x'^p.

Il est facile de voir qu'un groupe quelconque de l'équation (10), le groupe $x^q \chi_{p-q}$ par exemple, donnera lieu à un polynôme de degré $p-q$, homogène par rapport à $x, y, z, \ldots, s, t$; car

$$x^p \chi_{p-q}(y, z, \ldots, s, t)$$

deviendra, par suite de la substitution des nouvelles variables,

$$\frac{1}{x'^q} \chi_{p-q}\left(\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \ldots, \frac{s'}{x'}, \frac{t'}{x'}\right),$$

ou bien, en multipliant par x'^p,

$$x'^{p-q} \chi_{p-q}\left(\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \ldots, \frac{s'}{x'}, \frac{t'}{x'}\right),$$

polynôme homogène de degré $p-q$ en $x', y', z', \ldots, s', t'$, et complet comme celui dont il dérive.

On voit donc qu'au moyen de la transformation employée, l'équation (10) sera devenue une nouvelle équation de degré p en $x', y', z', \ldots, s', t'$, dont la seule particularité consistera à n'avoir aucun terme d'un degré inférieur à $p-m$.

Construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données ; par M. A. Mannheim.

(Séance du 6 mai 1874)

En faisant usage du théorème de Meusnier, on arrive, comme l'on sait, à déterminer très-simplement le plan osculateur en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données. De même, pour répondre à la question que nous venons de poser, nous allons employer une généralisation du théorème de Meusnier.

Voici cette généralisation telle que je l'ai énoncée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (séance du 5 fév. 1872).

Lorsque, par le cercle osculateur en a d'une courbe E *tracée sur une surface* (S), *on fait passer des sphères, celles-ci coupent* (S) *suivant des courbes dont on obtient les centres de courbure de leurs développées sphériques en projetant un point fixe* β *sur ces sphères.*

Parmi toutes ces sphères, celle dont le rayon est infini se réduit au plan osculateur de la courbe E. Si l'on élève à ce plan une perpendiculaire du centre de courbure de la développée de cette courbe, on a une droite qui contient le point β; ce point est, du reste, dans le plan normal à (S) qui est tangent en a à la courbe E : il est donc immédiatement déterminé.

Supposons maintenant que la courbe E résulte de l'intersection de (S) et d'une surface (S'); nous pourrons déterminer pour (S') un point β' analogue à β. Prenons la sphère osculatrice en a à la courbe E, et appliquons le théorème précédent. Il faut joindre le centre de cette sphère soit à β, soit à β', pour avoir le centre de courbure de la développée sphérique de la courbe E : donc le centre de la sphère osculatrice est sur la droite $\beta\,\beta'$. Comme ce centre est aussi dans le plan normal en a à la courbe E, il se trouve déterminé à l'intersection d'une droite et d'un plan.

Cette solution exige, comme l'on voit, que l'on sache construire les centres de courbure des développées des sections faites dans (S) et (S') par le plan osculateur en a de la courbe E.

Le problème qui consiste à construire le centre de courbure de la développée de la section faite dans une surface par un plan quelconque se résout comme je l'ai fait voir à la *Société philomathique* dans la séance du 27 juin 1874.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 6 MAI 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. de Reinach, banquier, à Paris; R. Lefébure de Fourcy, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur l'adpulsion universelle.*

M. Fouret communique à la Société une note *Sur les caractéristiques des courbes transcendantes.*

M. R. Lefébure de Fourcy fait à la Société une communication *Sur divers problèmes concernant les coniques.*

M. de la Gournerie présente à ce sujet quelques observations.

M. Mannheim fait à la Société une communication *Sur la construction directe des rayons de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan.*

SÉANCE DU MERCREDI 20 MAI 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Laurent, ayant donné sa démission de vice-secrétaire, la Société procède, par la voie du scrutin, à son remplacement. M. Fouret, ayant obtenu la majorité des suffrages, est nommé vice-secrétaire.

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur le choc des corps.*

M. le comte Léopold Hugo fait hommage à la Société de son *Introduction à la géométrie descriptive des cristalloïdes.*

SÉANCE DU MERCREDI 3 JUIN 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Bienaymé communique à la Société une note *Sur une question de probabilités*, et lui fait hommage de son opuscule intitulé : *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés.*

M. Darboux fait à la Société une communication *Sur la surface lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde.*

M. Resal communique à la Société, de la part de M. Poincaré, élève à l'École polytechnique, une note *Sur la théorie du pendule conique.*

M. Darboux présente à ce sujet quelques observations.

M. Halphen communique à la Société *Quelques conséquences d'un théorème de M. Broch sur la sommation de certaines intégrales.*

M. Fouret communique à la Société un théorème *Sur une propriété anharmonique du triangle.*

SÉANCE DU MERCREDI 17 JUIN 1874

PRÉSIDÉE PAR M. ANDRÉ

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. Brioschi, professeur à l'Université de Pavie.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. de Polignac fait hommage à la Société, de la part de M. Sylvester, du résumé d'une conférence qu'il a faite récemment à Londres, sur les systèmes articulés de M. Peaucellier.

M. Mannheim présente à la Société quelques développements sur cette question.

M. Halphen expose à la Société un théorème de M. Weyr *Sur les lignes de courbure des surfaces gauches.*

M. Fouret communique à la Société la *Démonstration d'un théorème sur les systèmes* ($\mu = 1$).

M. Mannheim communique à la Société une note *Sur le déplacement d'un faisceau de plans.*

SÉANCE DU MERCREDI 1er JUILLET 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Madame Poncelet fait hommage à la Société des numéros de septembre 1873 à mars 1874 des *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin. La Société charge M. le Président de vouloir bien offrir ses remerciements à madame Poncelet.

M. Fouret communique à la Société *Une méthode géométrique pour intégrer un certain type d'équation différentielle.*

M. Darboux présente à ce sujet quelques observations.

M. Darboux communique à la Société un mémoire *Sur des propriétés métriques nouvelles des surfaces du second degré.*

M. Jordan fait à la Société une communication *Sur la transformation des polynômes bilinéaires.*

M. Darboux présente à ce sujet quelques observations.

M. Halphen communique à la Société, de la part de M. Mannheim, une note *Sur la construction de la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces.*

M. Halphen communique à la Société *Quelques résultats relatifs au genre des courbes et aux fonctions abéliennes.*

SÉANCE DU MERCREDI 29 JUILLET 1874

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE

Le secrétaire annonce que l'Académie royale des sciences d'Amsterdam accepte le *Bulletin* en échange de ses *Publications.*

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

M. Adolphe Benoist, docteur en droit, à Châlon-sur-Saône.

La Société décide que l'élection aura lieu immédiatement, cette séance étant la dernière avant les vacances.

M. Adolphe Benoist est élu.

M. Fouret communique à la Société une note *Sur certains groupes de surfaces définies par deux caractéristiques.*

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur les*

figures systématiques des dix chiffres usités en Angleterre dans la typographie en relief, et dépose sur le Bureau un exemplaire de la *Statistique des chemins de fer*, dont il fait hommage à la Société.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré; par M. G. Darboux.

(Séance du 1er juillet 1874)

I. On sait qu'étant donnée une conique sphérique, il existe trois séries de petits cercles doublement tangents à la conique. Les cercles d'une même série ont leurs centres sur le même axe de la conique. Un calcul facile conduit aux propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour tout point de la conique, il existe un rapport constant entre le sinus de l'arc tangent mené de ce point à un petit cercle fixe doublement tangent à la conique et le sinus de l'arc perpendiculaire abaissé de ce point sur l'arc de contact du petit cercle et de la conique.*

Théorème II. — *La somme ou la différence des arcs tangents qu'on peut mener d'un point d'une conique sphérique à deux petits cercles doublement tangents d'une même série est constante.*

Ces propositions transformées par la théorie des figures supplémentaires conduisent aux deux suivantes :

Théorème III. — *Étant donnés une conique sphérique et un cercle doublement tangent, il existe un rapport constant entre le sinus de l'angle sous lequel un arc de grand cercle tangent à la conique est coupé par le petit cercle, et le sinus de l'arc perpendiculaire, abaissé du pôle de l'arc de contact par rapport à la conique, sur l'arc tangent.*

Théorème IV. — *La somme ou la différence des angles sous lesquels un arc de grand cercle tangent à la conique sphérique coupe deux petits cercles doublement tangents d'une même série est constante.*

Ces propositions, qui comprennent comme cas particulier les propriétés des arcs cycliques, s'étendent sans difficulté aux coniques planes, et l'on obtient alors les théorèmes suivants :

Théorème V. — *Étant donnés une conique plane et un cercle doublement tangent, il existe un rapport constant entre la perpendiculaire abaissée du pôle*

de la corde de contact de ce cercle et de la conique sur une tangente quelconque et le sinus de l'angle sous lequel cette tangente coupe le cercle.

Théorème VI. — *La somme ou la différence des angles sous lesquels une tangente à la conique coupe deux cercles doublement tangents d'une même série a une valeur constante.*

Nous nous proposons de démontrer des propositions analogues relatives aux surfaces du second ordre.

II. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

'équation d'une quadrique. Une sphère doublement tangente à la surface et ayant son centre dans le plan des zy aura pour équation

$$x^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2, \tag{2}$$

où

$$R^2=a^2\left(1-\frac{y'^2}{b^2-a^2}-\frac{z'^2}{c^2-a^2}\right),$$

et l'équation de la surface pourra s'écrire

$$x^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}\left(y-\frac{b^2y'}{b'-a^2}\right)^2+\frac{c^2-a^2}{c^2}\left(z-\frac{c^2z'}{c^2-a^2}\right)^2+R^2.$$

Prenons sur la surface un point quelconque (x_1,y_1,z_1) et cherchons l'angle sous lequel le plan tangent en ce point coupe la sphère représentée par l'équation (2). Cet angle, que nous appellerons V, sera donné par la formule

$$\cos V=\frac{\dfrac{y'y_1}{b^2}+\dfrac{z'z_1}{c^2}-1}{\sqrt{\dfrac{x_1^2}{a^4}+\dfrac{y_1^2}{b^4}+\dfrac{z_1^2}{c^4}}\sqrt{a^2\left(1-\dfrac{y'^2}{b^2-a^2}-\dfrac{z'^2}{c^2-a^2}\right)}},$$

qui exprime que cos V est le quotient de la distance du centre de la sphère au plan par le rayon de la sphère. Cela posé, exprimons x_1, y_1, z_1 en fonction des coordonnées y, z du point où la normale en (x_1,y_1,z_1) rencontre le plan des yz. On a

$$y_1=\frac{b^2y}{b^2-a^2},\quad z_1=\frac{c^2z}{c^2-a^2},\quad \frac{x_1^2}{a^2}=1-\frac{b^2y^2}{(b^2-a^2)^2}-\frac{c^2z^2}{(c^2-a^2)^2}.$$

En substituant ces valeurs dans cos V, on trouve

$$\cos V=\frac{\dfrac{yy'}{b^2-a^2}+\dfrac{zz'}{c^2-a^2}-1}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2-a^2}-\dfrac{z^2}{c^2-a^2}}\sqrt{1-\dfrac{y'^2}{b^2-a^2}-\dfrac{z'^2}{c^2-a^2}}}. \tag{3}$$

La symétrie de cette formule conduit à la remarque suivante : Étant donnés deux points M,M′ de la quadrique, et les sphères tangentes en M, M′, ayant leurs centres dans le même plan principal, l'angle sous lequel le plan tangent en M coupe la sphère tangente en M′ est égal à celui sous lequel le plan tangent en M′ coupe la sphère tangente en M. Mais la forme de l'expression précédente nous conduit à un théorème plus important.

Faisons correspondre à un point quelconque M de l'ellipsoïde un plan variable,

$$mX + nY + pZ = 0,$$

de la manière suivante. Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par y, z les coordonnées du point où la normale en M vient couper le plan principal, et posons

$$m = 1, \quad n = \frac{y}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad p = \frac{z}{\sqrt{a^2 - c^2}};$$

alors à un autre point M′, pour lequel y, z seront remplacés par y', z', correspondra un nouveau plan tel que l'on ait

$$m' = 1, \quad n' = \frac{y'}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad p' = \frac{z'}{\sqrt{a^2 - c^2}},$$

et la formule (3) deviendra

$$\cos V = \frac{mm' + nn' + pp'}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}}.$$

Donc V sera égal à l'angle des deux plans correspondants aux deux points M,M′. Nous avons donc le résultat suivant :

Soient M, A, B, C quatre points de la quadrique ; (M), (A), (B), (C) les quatre plans correspondants tels que nous venons de les définir ; S_M, S_A, S_B, S_C les quatre sphères tangentes en M,A,B,C à la quadrique et ayant leurs centres dans le plan des yz. Les angles du plan tangent en M à la quadrique avec les trois sphères S_A, S_B, S_C sont égaux aux angles que fait le plan variable (M) avec les trois plans (A), (B), (C). Donc :

Théorème VII. — *Étant données une quadrique et trois sphères doublement tangentes d'une même série, il y a entre les angles que fait un plan tangent variable avec ces trois sphères la même relation qu'entre les angles d'un plan variable avec les trois faces d'un trièdre fixe.*

Autrement : les angles que fait le plan tangent avec les trois sphères sont égaux aux angles que fait un plan variable avec les trois faces d'un trièdre fixe convenablement choisi.

III. La relation entre les angles que fait un plan variable (M) avec trois plans fixes (A), (B), (C) est bien connue. Elle se met sous la forme suivante :

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos AM & \cos BM & \cos CM \\ \cos MA & 1 & \cos BA & \cos CA \\ \cos MB & \cos AB & 1 & \cos CB \\ \cos MC & \cos AC & \cos BC & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut déduire de cette relation une équation entre les distances de trois points d'un plan principal d'une quadrique à un plan tangent quelconque. Soient (β_1, γ_1), (β_2, γ_2), (β_3, γ_3) les coordonnées des centres des sphères S_A, S_B, S_C. Appelons d_1, d_2, d_3 les distances de ces centres au plan tangent en M, et posons

$$\beta_{ij} = 1 - \frac{\beta_i \beta_j}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma_i \gamma_j}{c^2 - a^2}.$$

Soient en outre R_1, R_2, R_3 les rayons des sphères S_A, S_B, S_C. D'après les formules déjà données, on aura

$$R_1^2 = a^2 \beta_{11}, \quad R_2^2 = a^2 \beta_{22}, \quad R_3^2 = a^2 \beta_{33},$$

$$\cos AB = \frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}}, \quad \cos AC = \frac{\beta_{13}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{33}}}, \quad \cos BC = \frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{22}\beta_{33}}}.$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\cos AM = \frac{d_1}{R_1}, \quad \cos BM = \frac{d_2}{R_2}, \quad \cos CM = \frac{d_3}{R_3}.$$

L'équation (4) prendra donc la forme

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a^2 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ d_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ d_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la relation entre les distances de trois points fixes du plan des yz à un plan tangent variable.

Examinons quelques cas particuliers.

Supposons d'abord que les centres des trois sphères S_A, S_B, S_C forment un triangle conjugué par rapport à la focale F_x de la surface, qui se trouve dans le plan des yz. On aura

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0,$$

et l'équation (5) deviendra

$$1 = \frac{d_1^2}{R_1^2} + \frac{d_2^2}{R_2^2} + \frac{d_3^2}{R_3^2},$$

c'est-à-dire, la somme des carrés des cosinus des angles que fait le plan tangent variable avec les trois sphères fixes ainsi choisies est constante.

Supposons maintenant que les trois points soient pris sur la focale F_x. On aura

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 0,$$

et, en faisant

$$\beta_{23} = B, \quad \beta_{13} = B', \quad \beta_{12} = B'',$$

l'équation (5) devient alors

$$(6) \quad BB'B''a^2 = -B^2d^2 - B'^2d'^2 - B''^2d''^2 + 2B'B''d'd'' + 2BB''dd'' + 2BB'dd';$$

c'est la relation qui existe entre les distances de trois foyers fixes à un plan tangent. Soit

$$\alpha = \sqrt{Bd}, \quad \alpha' = \sqrt{B'd'}, \quad \alpha'' = \sqrt{B''d''},$$

l'équation (6) exprime que la surface du triangle ayant pour côtés α, α', α'' est constante. D'où cette proposition :

Théorème VIII. — *Si, de trois foyers pris sur une même focale, on abaisse des perpendiculaires sur un plan tangent quelconque, la surface du triangle construit avec les moyennes proportionnelles à ces trois distances et à trois nombres fixes est constante.*

Cette propriété des foyers est caractéristique. Elle peut être considérée comme la généralisation de l'équation

$$dd' = b^2,$$

qui exprime que le produit des distances des deux foyers d'une conique à une tangente est constant.

Pour que les éléments de l'énoncé soient réels, il faut que les foyers soient pris sur la focale elliptique.

Quant au théorème VII, il est clair qu'il est la généralisation du théorème VI relatif aux coniques, qu'on peut énoncer ainsi :

Il y a la même relation entre les angles que fait une tangente variable à la conique avec deux cercles doublement tangents d'une même série, qu'entre les angles d'une droite variable avec deux droites fixes.

IV. Le théorème VII constitue un nouveau mode de génération des surfaces du second degré. On peut en indiquer plusieurs autres. Citons les propositions suivantes :

Théorème IX. — *Etant donnés deux cercles fixes* (C), (C′) *sur une sphère, si un petit cercle variable se meut sur cette sphère de telle manière que le sinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C) *soit proportionnel au cosinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C′), *son plan enveloppe une quadrique.*

Réciproquement : *Étant donnés une surface quelconque du second ordre et une sphère doublement tangente, soit* (C) *un cercle d'intersection de la sphère et de la quadrique, soit* (C′) *le cercle de la sphère qui se trouve dans le plan polaire par rapport à la sphère du pôle du plan du cercle* (C) *par rapport à la quadrique ; le plan tangent à la quadrique coupe la sphère suivant un cercle tel que le sinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C) *soit proportionnel au cosinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C′).

Voilà un premier exemple d'une relation à deux éléments seulement, propre à définir toute quadrique. En voici un autre plus élégant :

Théorème X. — *L'enveloppe du plan d'un cercle* (U), *coupant deux cercles fixes* (C), (C′) *d'une même sphère sous des angles dont la somme soit constante, est une quadrique doublement tangente à la sphère.*

Soit en effet

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

l'équation de la sphère, et soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les pôles des deux cercles (C), (C′). Soient x, y, z les coordonnées du pôle du cercle variable (U). L'angle θ des deux cercles (U), (C) sera donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - R^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}} = \frac{P}{\sqrt{S}},$$

où l'on a posé

$$P = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - R^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2}}, \quad S = x^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

De même, en posant

$$Q = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - R^2}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - R^2}},$$

on aura, pour l'angle θ' de (U) et de (C′), la formule

$$\cos\theta' = \frac{Q}{\sqrt{S}}.$$

L'équation

$$\theta + \theta' = c^{te} = \psi,$$

qui prend la forme

$$\cos^2\theta + \cos^2\theta' - 2\cos\theta\cos\theta'\cos\psi = \sin^2\psi,$$

nous donnera donc

$$P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\psi = S\sin^2\psi.$$

Cette équation, qui contient x, y, z, représente par conséquent le lieu du pôle du cercle variable (U). Comme elle est du second degré, on voit que le plan du cercle variable enveloppera une quadrique, ce qui démontre notre proposition. On établira sans difficulté la réciproque suivante :

Théorème XI. — *Étant données une quadrique quelconque et une sphère doublement tangente coupant la quadrique suivant deux cercles* (C), (C′), *un plan variable tangent à la quadrique coupera la sphère suivant un cercle qui fera avec les cercles fixes* (C), (C′) *des angles dont la somme sera constante.*

Malheureusement les éléments qui figurent dans cette proposition ne sont tous réels que si la quadrique est réglée et si l'on prend une quelconque des sphères la coupant suivant deux cercles réels.

V. On peut généraliser la proposition précédente en considérant au lieu d'une sphère doublement tangente à la quadrique une sphère quelconque.

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

l'équation d'une quadrique (Q) passant par l'intersection d'une sphère (S)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

et du cône

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Soit M (x,y,z) un point de la surface, A (x',y',z') un point quelconque. L'angle V suivant lequel se coupent les cercles situés dans les plans polaires de A et de M par rapport à la sphère est donné par la formule

$$\cos V = \frac{x(x'-\alpha) + y(y'-\beta) + z(z'-\gamma) + \delta - \alpha x' - \beta y' - \gamma z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2-2\alpha x'-2\beta y'-2\gamma z'+\delta}}.$$

Assujettissons le point A (x', y', z') aux conditions suivantes :

$$\delta - \alpha x' - \beta y' - \gamma z' = 0,$$

$$\frac{(x'-\alpha)^2}{A} + \frac{(y'-\beta)^2}{B} + \frac{(z'-\gamma)^2}{C} = S' = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\alpha x' - 2\beta y' - 2\gamma z' + \delta.$$

Alors le point A pourra occuper toutes les positions sur une conique fixe représentée par les deux équations précédentes, et qu'on reconnaîtra facilement être la ligne double de la développable circonscrite à (S) et à (Q) située dans le plan polaire de l'origne qui est le même par rapport à ces deux surfaces. En tenant compte des relations précédentes, on pourra poser

$$\frac{x'-\alpha}{\sqrt{A}} = m'\sqrt{S'}, \quad \frac{y'-\beta}{\sqrt{B}} = n'\sqrt{S'}, \quad \frac{z'-\gamma}{\sqrt{C}} = p'\sqrt{S'},$$

et cos V prendra la forme

$$\cos V = \frac{m' x\sqrt{A} + n' y\sqrt{B} + p' z\sqrt{C}}{\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\ \sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2}}.$$

Si, au point (x, y, z) M de la surface, on fait correspondre le plan

$$uX + vY + wZ = 0,$$

par les relations

$$u = x\sqrt{A},\quad v = y\sqrt{B},\quad w = z\sqrt{C},$$

la formule précédente prendra la forme

$$\cos V = \frac{m'u + n'v + p'w}{\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\ \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}};$$

V sera donc l'angle des deux plans

$$m'X + n'Y + p'Z = 0,$$
$$uX + vY + wZ = 0,$$

définis par ce qui précède. On a donc la proposition suivante :

Étant données une quadrique (Q) et une sphère (S), si l'on prend trois points quelconques A, B, C sur une des lignes doubles de la développable circonscrite à (S) et à (Q), et que l'on considère les cercles (A), (B), (C), (M) situés dans les plans polaires des points A, B, C, M par rapport à la sphère, quand le point M décrira la quadrique (Q) le cercle correspondant (M) fera avec les trois cercles fixes (A), (B), (C) les mêmes angles qu'un plan variable avec les trois faces d'un trièdre.

En transformant par la méthode des polaires réciproques, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème XII. — *Étant données une quadrique et une sphère, un plan tangent à la quadrique coupe la sphère suivant un cercle variable* (U). *Adjoignons à ce cercle variable trois cercles fixes, intersections de la sphère et de trois plans tangents quelconques à l'un des cônes qui passent par l'intersection de la sphère et de la quadrique. Le cercle variable* (U) *fera avec ces trois cercles fixes les mêmes angles qu'un plan variable avec les trois faces d'un trièdre.*

VI. Nous terminerons en indiquant une dernière propriété générale des quadriques.

Proposons-nous de trouver le lieu des centres des sphères coupant trois

sphères données sous des angles dont les différences soient connues. Soient

$$S = d^2 - R^2 = 0, \quad S' = d'^2 - R'^2 = 0, \quad S'' = d''^2 - R''^2 = 0$$

les équations des trois sphères, d, d', d'' désignant les distances à leurs centres, R, R', R'', leurs rayons. Soit ρ le rayon de l'une des sphères cherchées; elle coupera d'après les conditions du problème les trois sphères (S), (S'), (S'') sous des angles qu'on pourra représenter par $\alpha + \omega$, $\alpha' + \omega$, $\alpha'' + \omega$, $\alpha, \alpha', \alpha''$ étant des nombres fixes, ω une inconnue. Appelons d, d', d'' les distances du centre de cette sphère à ceux des trois sphères (S), (S'), (S''). On devra avoir les équations

$$\frac{d^2 - R^2 - \rho^2}{2R\rho} = \cos(\alpha + \omega), \quad \frac{d'^2 - R'^2 - \rho^2}{2R'\rho} = \cos(\alpha' + \omega),$$
$$\frac{d''^2 - R''^2 - \rho^2}{2R''\rho} = \cos(\alpha'' + \omega),$$

entre lesquelles il faudra éliminer ρ et ω. Posons

$$-\rho\cos\omega = u, \quad \rho\sin\omega = v,$$

elles prendront la forme

$$d^2 = (u - R\cos\alpha)^2 + (v - R\sin\alpha)^2,$$
$$d'^2 = (u - R'\cos\alpha')^2 + (v - R'\sin\alpha')^2,$$
$$d''^2 = (u - R''\cos\alpha'')^2 + (v - R''\sin\alpha'')^2,$$

équations entre lesquelles il faudrait éliminer u, v. Or cette élimination est inutile, car ces équations expriment que les distances d'un point variable du lieu aux centres des sphères (S), (S'), (S'') sont respectivement égales aux distances d'un point variable d'un certain plan (u, v) à trois points fixes $(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$, $(R'\cos\alpha', R'\sin\alpha')$, $(R''\cos\alpha'', R''\sin\alpha'')$ de ce plan. Donc, d'après le théorème de Jacobi, le lieu décrit par le centre sera une quadrique ayant pour foyers situés sur la même focale les centres des sphères (S), (S'), (S'').

On démontrera sans peine la réciproque suivante, remarquable par sa généralité :

Théorème XIII. — *Étant données une quadrique quelconque et une sphère* (S) *doublement tangente à cette surface, construisons toutes les sphères* (S'), (S''),... *ayant pour centres les foyers situés dans le même plan principal que le centre de la sphère* (S) *et passant par les deux points de contact de cette sphère et de la quadrique. Une sphère variable ayant son centre sur la surface et coupant à angle droit la sphère* (S) *coupera les sphères* (S'), (S''), ... *sous des angles dont les différences seront constantes.*

Corollaire. — La quadrique peut être considérée comme le lieu des centres des sphères coupant sous des angles dont les différences soient constantes, trois sphères ayant pour centres trois foyers quelconques pris sur la même focale et se coupant en un point de la surface.

On peut aussi la définir comme le lieu des centres des sphères coupant à angle droit une sphère fixe et coupant deux des sphères précédentes sous des angles dont la différence soit constante.

Je terminerai en énonçant la proposition suivante, qui se rattache à ce sujet d'études :

Théorème XIV. — *Étant donnée une quadrique, il existe trois couples de deux sphères fixes telles que les plans tangents en tous les points d'une ligne de courbure fassent avec deux sphères de l'un des couples des angles dont la somme soit constante.*

Ces sphères sont celles qui coupent la surface suivant quatre droites et qui ont déjà été considérées dans d'autres relations métriques. Ainsi, dans le cas de l'ellipsoïde, deux couples de sphères sont réels.

Il y a d'abord les deux sphères ayant leurs centres sur le grand axe et intérieures à l'ellipsoïde. La somme ou la différence des tangentes menées d'un point d'une ligne de courbure à ces deux sphères est constante.

Il y a ensuite les deux sphères conjuguées ayant leurs centres sur le petit axe ; les deux sphères étant extérieures à l'ellipsoïde seront coupées par les plans tangents en tous les points d'une ligne de courbure sous des angles dont la somme ou la différence sera constante.

Sur une question de probabilités; par M. Bienaymé.

(Séance du 3 juin 1874)

Soit n observations consécutives données en grandeur numérique ; si on les représente par des droites placées à côté les unes des autres, et qu'on joigne les extrémités de ces droites par une ligne brisée, le nombre des *maxima* et des *minima* sera probablement égal à

$$\frac{2n-1}{3} \pm t\sqrt{\frac{16n-29}{45}},$$

a probabilité correspondant à t étant donnée approximativement par l'intégrale bien connue

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx.$$

Il est bien entendu que ce résultat se rapporte au cas très-général qui ne comprend que des valeurs possibles à probabilité infiniment petite, ou des valeurs à probabilité finie, non susceptibles de répétition. Le nombre des maxima serait différent dans le cas de répétition. Ainsi, pour deux valeurs reproduites indéfiniment, le résultat moyen serait seulement $\frac{n+1}{2}$.

FIN DU TOME DEUXIÈME

TABLE DES MATIÈRES

État de la Société au 31 janvier 1874 5

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

Séance du mercredi 5 novembre 1873 9
Séance du mercredi 19 novembre 1873 9
Séance du mercredi 3 décembre 1873 10
Séance du mercredi 17 décembre 1873 10
Séance du mercredi 14 janvier 1874 64
Séance du mercredi 28 janvier 1874 66
Séance du mercredi 11 février 1874 66
Séance du mercredi 25 février 1874 67
Séance du mercredi 11 mars 1874 67
Séance du mercredi 25 mars 1874 67
Séance du mercredi 8 avril 1874 68
Séance du mercredi 22 avril 1874 68
Séance du mercredi 6 mai 1874 141
Séance du mercredi 20 mai 1874 141
Séance du mercredi 3 juin 1874 142
Séance du mercredi 17 juin 1874 142
Séance du mercredi 1er juillet 1874 143
Séance du mercredi 29 juillet 1874 143

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. Halphen 11
Recherches de géométrie à n dimensions; par M. Halphen 34
Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur; par M. Saltel 52
Sur la durée des oscillations du pendule composé; par M. de Saint-Germain 54
Sur le déplacement d'un solide invariable; par M. Halphen 56
Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ en produit illimité; par M. de Saint-Germain 62
Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice; par M. Saltel 64
Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques; par M. Halphen 6

Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques; par M. Fouret 72
Sur la théorie des roulettes gauches; par M. H. Laurent. 84
Sur un point de la théorie du contact; par M. Halphen. 94
Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ,ν); par M. Fouret. 96
Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires; par M. Camille Jordan.. 100
Détermination du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues; par M. Fouret.. 127
Construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données; par M. A. Mannheim. 140
Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré; par M. G. Darboux. 144
Sur une question de probabilités; par M. Bienaymé. 153

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

COMITÉ DE RÉDACTION

BRISSE (Ch.)
JORDAN (Camille)
LAGUERRE
LEVY (Maurice)
MANNHEIM
SARRAU

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES

TOME TROISIÈME — ANNÉE 1874-75

PARIS

AU SIÉGE DE LA SOCIÉTÉ

RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1875

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 JANVIER 1875

(Les initiales S. P. désignent les sociétaires perpétuels)

ACHARD (Marc), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
ALLÉGRET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont.
ANDRÉ (Désiré), agrégé de l'Université, à Paris.
ANTOINE (Ch.), ingénieur de la Marine, à Brest.
AOUST (L'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, à Paris.
BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BAILLAUD, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
BAILLOUD, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, à Paris.
BARBIN (H.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Lillers (Pas-de-Calais).
BENOIST, docteur en droit, à Châlon-sur-Saône.
BERDELLÉ, ancien garde-général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, à Paris.
BEYNAC, professeur de mathématiques, à Paris.
BIENAYMÉ (Alexis), capitaine du Génie, à Versailles.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, à Brest.
BIENAYMÉ (J.), membre de l'Institut, à Paris.
BLEYNIE (Martial), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à Paris.
BOUCHÉ (A.), ancien élève de l'École Normale, directeur de l'École préparatoire d'Angers.
BOUFFET (M.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne.
BOURGET, agrégé de l'Université, à Paris.
BRÉMARD, architecte, à Paris.
BRIOSCHI, professeur à l'Université de Pavie (Italie).
BRISSE (A.), ingénieur en chef du desséchement du lac Fucino (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
BROCARD, capitaine du Génie, à Alger. S. P.
BRUNET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
CAHEN, sous-lieutenant du Génie, à l'École de Fontainebleau.
CATALAN, professeur à l'Université de Liége (Belgique).
CHARLON, directeur de *la Confiance*, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, à Paris. S. P.
CHEVALLIER, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
CIVIALE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
CLAYEUX, sous-intendant de 1re classe, à Versailles.

COLLET, professeur au lycée de Troyes.
COLLIGNON (Éd.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
COMBETTE, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
CONINCK (Gustave de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Dinan.
CORNU (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
COURCELLES (C.), professeur de mathématiques spéciales au lycée de Douai.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
CUVINOT, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Mantes.
DARBOUX, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.
DESBOVES, professeur au lycée Fontanes, à Paris.
DESCHAMPS, capitaine d'Artillerie, à Paris.
DESQ (L.), capitaine d'Artillerie, à Bourges.
DEWULF (Ed.), commandant du Génie, aux îles d'Hyères.
DOSTOR (G.), docteur ès sciences, à Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).
DURRANDE (H.), professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Nîmes.
FITREMANN, ancien élève de l'École Polytechnique, à Évreux.
FLORENTIN, capitaine d'Artillerie, à Paris.
FLYE SAINTE-MARIE (C.), capitaine d'Artillerie, à Paris.
FONTÈS (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Condom.
FOURET (G.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
GARIEL (M.-C.), professeur à l'École de Médecine, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire, à Paris. S. P.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, professeur de mathématiques, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à la Havane (Cuba).
GOFFART (M.), professeur de mathématiques, à Paris.
GONZALÈS (José), directeur de l'observatoire de Bogota (Colombie).
GOURNERIE (de la), membre de l'Institut, à Paris.
GRAINDORGE (J.), docteur ès sciences, à Liége (Belgique).
HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
HALPHEN (G.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
HATT (Ph.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HENRY (P.), lieutenant au 10e régiment d'Artillerie, à Rennes.
HENRY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
HÉRAUD (G.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HERMARY, capitaine au 25e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris. S. P.
HILAIRE, professeur au lycée de Douai.
HOUBIGANT (J.), chef de bataillon du Génie en retraite, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, à Paris.
HUYOT (E.), ingénieur des Mines, à Paris.
JACQUIER (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Amiens.
JANIN, capitaine au 13e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, à Paris.
JORDAN (C.), ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau
JULLY, chef d'institution, à Paris.
KŒHLER, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
KRETZ, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
LAGUERRE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAISANT, capitaine du Génie, à Bastia.
LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LAX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.

LEFÉBURE DE FOURCY (R.), à Paris.
LEFFLER (Dr Mittag), professeur à l'Université d'Upsal (Suède).
LEHR, professeur au lycée de Marseille.
LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, à Paris.
LEMOINE (E.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LÉVY (Albert), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LEVY (Maurice), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LIGUINE, professeur à l'Université d'Odessa (Russie).
LUCAS (F.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LUCAS (E.), professeur au lycée de Moulins.
MALEYX (L.), professeur au collége Stanislas, à Paris.
MANNHEIM (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
MAREL, colonel d'État-major en retraite, à Alger.
MARGERIE, sous-directeur de l'institution Monge, à Paris.
MARIE (Maximilien), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
MARIN, ingénieur, à Paris.
MARSILLY (Général de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Auxerre.
MATHIEU, professeur à la Faculté des Sciences, à Nancy.
MICHELET, ingénieur civil, à Paris.
MIGNON (A.), capitaine au 6e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (G. de), lieutenant du Génie, à Paris.
MOREL (A.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
MOUTARD (Th.), ingénieur des Mines, à Paris.
NICOLAÏDÈS, professeur à l'Université d'Athènes (Grèce).
OVIDIO (Enrico d'), professeur à l'Université de Turin (Italie).
PAINVIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, à Paris
PARMENTIER (Th.), colonel du Génie, à Lyon.
PARRAN (A.), ingénieur des Mines, à Paris.
PERCIN (A.), capitaine au 21e régiment d'Artillerie, à La Rochelle.
PERRIER, capitaine d'État-Major, membre du Bureau des Longitudes, à Paris.
PERRIN, ingénieur des Mines, à Paris.
PHILIPPE, ingénieur, à Corbeil.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à Paris.
PICART (A.), député à l'Assemblée nationale, à Versailles.
PICQUET (H.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
PISTOYE (L. de), capitaine d'Artillerie, à Tarbes.
PLOCQ (A.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Dunkerque.
PLOIX (Edmond), ingénieur hydrographe, à Paris.
POIREL (V.), inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, à Rosières-aux-Salines (Meurthe-et-Moselle).
POLIGNAC (Camille de), à Paris. S. P.
POUILLOT (J.), professeur à l'École normale de Cluny.
PUTZ (H.), chef d'escadrons d'Artillerie, à Paris.
RADAU (R.), à Paris.
RANCY (de), sous-directeur de *l'Aigle*, à Paris.
REINACH (de), banquier, à Paris.
RENAN, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
RESAL, membre de l'Institut, à Paris.
REY, professeur à l'École du génie, à Arras.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RITTER (F.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Niort.
RODET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, à Paris.
ROUCHÉ (E.), professeur à l'École Centrale, à Paris.
ROUSSELIN (A.), professeur au lycée de Douai.

ROUX (François), architecte, à Paris.
SAINTE-CLAIRE-DEVILLE (Charles), membre de l'Institut, à Paris.
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, à Paris.
SAINT-GERMAIN (A. de), docteur ès sciences, à Paris.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon.
SALTEL, professeur au collége de Fontenay-le-Comte.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Senlis.
SCHÖNDORFFER, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
SCRIVANOFF (Grégoire), étudiant à l'Université de Saint-Pétersbourg (Russie).
SERRET (J.-A.), membre de l'Institut, à Paris.
SERRET (Paul), docteur ès sciences, à Paris.
SIVERING, ingénieur en chef des Travaux publics, à Luxembourg (grand-duché de Luxembourg).
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STUDNICKA, professeur à l'Université de Prague (Bohême).
TANNERY, ingénieur à la Manufacture des Tabacs, à Bordeaux.
TARATTE (E.), agrégé de l'Université, à Évreux.
TARBOURIECH, agrégé de l'Université, à Paris.
TERRIER, professeur de mathématiques, à Paris.
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
TISSERAND, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
TOURNEUR (Paul), ingénieur, à Marnaval (Haute-Marne).
TRESCA (É.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Pontivy.
TURPAULT, à Paris.
TURQUAN, docteur ès sciences, à la Chapelle Saint-Mesmin (Loiret).
VACOSSIN, capitaine d'État-Major, à Paris.
VACQUANT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
VINTÉJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur au lycée d'Alger.
WELSCH, lieutenant d'Artillerie, à Saint-Omer.
WEYR (Edouard), étudiant à l'Université de Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague (Bohême).
WICKERSHEIM, élève-ingénieur des Mines, à Paris.

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

STATUTS DE LA SOCIÉTÉ

Article premier. La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siége est à Paris.

Art. 2. Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux mathématiques.

Art. 3. La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Art. 4. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

Art. 5. Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Art. 6. L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

Art. 7. Le conseil est présidé par le président de la Société.

Art. 8. Le bureau est composé de :

1 président;
4 vice-présidents;
2 secrétaires;
2 vice-secrétaires;
1 trésorier;
1 archiviste.

Art. 9. Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

Art. 10. Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

Art. 11. Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

Art. 12. Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

Art. 13. Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

Art. 14. Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

Art. 15. La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé de recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société ; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF

CHAPITRE PREMIER

CONDITIONS D'ADMISSION

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission montant à dix francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortant du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du Bulletin devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, des œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraitre dans le Bulletin.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le Bulletin, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du Bulletin et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur

un registre coté et parafé par le secrétaire; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du Bulletin et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au Bulletin des séances avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du Bulletin. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{9}{10}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V

RÉVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF

47. Toute proposition de révision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de révision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 11 NOVEMBRE 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Fouret communique à la Société une note *Sur une propriété métrique des courbes algébriques.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur le contact des surfaces algébriques.*

M. Resal fait à la Société une communication *Sur la propriété dont jouit le pendule conique de révolution, dont un point de l'axe est fixe, de se mouvoir suivant la même loi que le pendule synchrone.*

M. Lemonnier communique à la Société une note *Sur la transformation des formes quadratiques.*

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur le rôle des polyèdres réguliers et de la sphère dans la numération décimale.*

SÉANCE DU MERCREDI 25 NOVEMBRE 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Halphen analyse un mémoire de M. Sturm *Sur les caractéristiques des systèmes de courbes gauches en général, et des cubiques gauches en particulier.*

M. Darboux présente quelques observations au sujet de cette communication.

M. Jordan fait à la Société une communication *Sur le nombre de figures différentes que l'on peut construire avec un nombre donné de droites.*

M. Mannheim communique à la Société *Une construction, due à M. Hart, d'un appareil plus simple que celui de M. Peaucellier, pour obtenir le mouvement rectiligne d'un point, au moyen de tiges articulées.*

M. Mannheim indique, d'après M. Sylvester, la *Construction de deux systèmes articulés décrivant une conique au moyen de sept tiges.*

SÉANCE DU MERCREDI 9 DÉCEMBRE 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Jordan communique à la Société une *Solution générale de la détermination du minimum d'une somme de carrés de polynômes linéaires.*

M. Halphen fait à la Société une communication *Sur le contact maximum des surfaces d'un degré donné avec une surface quelconque.*

M. Mannheim communique à la Société un *Procédé pour décrire une anallagmatique du 4me ordre, à l'aide d'un appareil à tiges articulées semblable à celui de M. Peaucellier, en remplaçant le losange par un quadrilatère à côtés inégaux, mais à diagonales rectangulaires.*

SÉANCE DU MERCREDI 23 DÉCEMBRE 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Turpault (Claude), propriétaire, à Paris; Vacossin, capitaine d'état-major, professeur suppléant de topographie à l'École d'état-major, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

SÉANCE DU MERCREDI 6 JANVIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Rey (Casimir), professeur à l'École régimentaire du génie, à Arras ; Berdellé, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La Société procède, par la voie du scrutin, au remplacement des membres sortants du Bureau et du Conseil, qui se trouvent ainsi constitués :

Président honoraire	M. CHASLES.
Président	M. BIENAYMÉ.
Vice-Présidents	M. DE LA GOURNERIE. M. JORDAN. M. MANNHEIM. M. RESAL.
Secrétaires	M. BRISSE. M. LAGUERRE.
Vice-Secrétaires	M. FOURET. M. DE SAINT-GERMAIN.
Trésorier	M. ANDRÉ (Désiré).
Archiviste	M. HOUBIGANT.
Membres du Conseil	M. BERTRAND. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. CHASLES. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LEMONNIER. M. LEVY (Maurice). M. PAINVIN. M. SERRET (J.-A.).
Membres du Conseil non résidents	M. AOUST (L'abbé). M. CLAYEUX. M. PARMENTIER. M. WEYR (Émile).

M. Fouret, au nom de la Commission des comptes, donne lecture de son rapport sur la gestion du trésorier.

La Société, adoptant les conclusions du rapporteur, vote des remerciements à M. Désiré André.

SÉANCE DU MERCREDI 20 JANVIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Halphen communique à la Société une *Démonstration analytique de*

deux relations, dues à M. Mannheim, entre les rayons de courbure en deux points correspondants des nappes de la développée d'une surface.

M. Fouret communique à la Société *Quelques considérations relatives aux systèmes de surfaces.*

M. de Saint-Germain communique à la Société une note *Sur la courbure des surfaces de carène.*

SÉANCE DU MERCREDI 3 FÉVRIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Saltel, de deux *Notes relatives aux courbes cycliques.*

M. Laguerre fait à la Société une communication *Sur les courbes du 3me ordre.*

M. Halphen fait à la Société une communication *Sur un point de la théorie des surfaces.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur une propriété du polynôme $(x^2-1)^n$; par M. C. DE POLIGNAC.

(Séance du 17 juin 1874)

Dans ce qui va suivre, il sera fait appel à une propriété connue du polynôme $(x^2-1)^n$ que je commence par rappeler.

Elle consiste dans la relation identique suivante

$$(1)\qquad n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}=(x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}.$$

On la vérifiera aisément en la ramenant à une autre propriété bien connue du même polynôme à savoir que la $n^{\text{ème}}$ dérivée

$$y=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(2)\qquad (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)y=0.$$

En effet, en différentiant la relation (1), on tombera sur l'équation (2), dans laquelle on aurait fait $y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, c'est-à-dire sur un résultat identiquement nul. La dérivée de (1) est donc identiquement nulle et comme les deux membres s'annulent pour $x = 1$ l'identité est démontrée.

J'aborde maintenant l'objet de cette étude. Posant, pour abréger,

$$x^2 - 1 = X,$$

je partirai de la relation identique

$$X^n \log \frac{x+1}{x-1} = 2(x^2-1)^n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right).$$

Supposant le second membre développé et mettant en évidence la partie entière $f(x)$, on aura

$$X^n \log \frac{x+1}{x-1} = f(x) + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \ldots.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres, observant que

$$\frac{d \log \frac{x+1}{x-1}}{dx} = -\frac{2}{x^2-1} = -\frac{2}{X},$$

on sera conduit à l'égalité

$$(X^n)' \log \frac{x+1}{x-1} - 2X^{n-1} = f'(x) - \frac{\alpha}{x^2} - \ldots;$$

et en continuant à prendre successivement les dérivées des deux membres, il est aisé de voir qu'on aura toujours une équation de la forme

$$(X^n)^{(h)} \log \frac{x+1}{x-1} + \varphi(x) = f^{(h)}(x) + \ldots,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ désigne un polynôme entier, si $h < n$. Cela tient à ce que la dérivée de $\log \frac{x+1}{x-1}$ est $-\frac{2}{X}$ et que les dérivées de X^n contiennent X en facteur jusqu'à la $n-1^{\text{ème}}$ incluse.

Je poserai en général

$$\varphi(x) = e_{n,h};$$

la nécessité du double indice apparaîtra plus loin. De même, remplaçant $f^{(h)}(x)$ par $f_n^{(h)}$, je formerai le tableau suivant

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
(X^n)\log\dfrac{x+1}{x-1}=f_n+\sigma,\\
(X^n)'\log\dfrac{x+1}{x-1}+e_{n,1}=f'_n+\sigma',\\
(X^n)''\log\dfrac{x+1}{x-1}+e_{n,2}=f''_n+\sigma'',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(X^n)^{(h)}\log\dfrac{x+1}{x-1}+e_{n,h}=f_n^{(h)}+\sigma^{(h)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(X^n)^{(n)}\log\dfrac{x+1}{x-1}+E_n=F_n+\sigma^{(n)},
\end{array}\right.$$

écrivant pour abréger dans la dernière équation

$$e_{n,n}=E_n,\quad f_n^{(n)}=F_n.$$

Remarquons que si, dans le premier membre de chaque équation du tableau (3), on développait en série $\log\dfrac{x+1}{x-1}$, on devrait retrouver identiquement le second membre. En particulier, désignant par $\varepsilon_{n,h}$ la partie entière du produit $(X^n)^{(h)}\log\dfrac{x+1}{x-1}$, on aurait

$$(4)\qquad \varepsilon_{n,h}+e_{n,h}=f_n^{(h)}$$

et pour la dernière, écrivant encore $\varepsilon_{n,n}=\mathcal{E}_n$,

$$\mathcal{E}_n+E_n=F_n.$$

Or, je dis que l'on aura identiquement

$$-E_n=F_n;$$

si cela est, il en résultera

$$\mathcal{E}_n=2F_n,$$

particularité qui pourra s'énoncer ainsi :

La partie entière du produit de la n^e dérivée de $(x^2-1)^n$ par la série logarithmique $\log\dfrac{x+1}{x-1}$ *est le double de la n^e dérivée de la partie entière du produit de $(x^2-1)^n$ par la même série.*

Pour démontrer ce fait, il sera commode d'introduire une nouvelle quantité v définie par la relation générale

$$v_{n,h}=e_{n,h}+f_n^{(h)},$$

d'où, conservant la même notation abrégée,

$$V_n = E_n + F_n.$$

La relation à démontrer s'exprimera donc par l'identité

$$V_n = 0.$$

Cette dernière résultera de l'examen de deux formes différentes qu'on peut donner à la quantité $v_{n,h}$. Remarquons d'abord qu'il résulte immédiatement du mode de formation du tableau (3) que

$$(5) \qquad e_{n,h+1} = e'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X};$$

d'ailleurs on peut écrire

$$f_n^{(h+1)} = \left(f_n^{(h)}\right)';$$

ajoutant, il vient

$$(6) \qquad v_{n,h+1} = v'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X}.$$

Il est important d'observer que les relations (5) et (6) subsistent pour $h > n$, bien que les polynômes e et v cessent d'être entiers.

Après avoir fait varier h, je ferai varier n, et je chercherai d'abord ce que devient $f_n^{(h)}$ quand n se change en $n+1$. On a par définition

$$X^n \log\frac{x+1}{x-1} = f_n + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^3} + \ldots,$$

d'où

$$X^{n+1}\log\frac{x+1}{x-1} = Xf_n + \frac{\alpha X}{x} + \frac{\alpha' X}{x^3} + \ldots = Xf_n + \alpha x + \frac{a}{x} + \ldots.$$

Donc

$$f_{n+1} = Xf_n + \alpha x,$$

et par suite

$$f_{n+1}^{(h)} = (Xf_n)^{(h)} \quad \text{pour } h \geqslant 2.$$

Développant et observant que $X'' = 2$, il vient

$$(7) \qquad f_{n+1}^{(h)} = Xf_n^{(h)} + hX'f_n^{(h-1)} + h(h-1)f_n^{(h-2)}.$$

On aura une formule toute semblable pour $e_{n+1,h}$. En effet, on a par définition

$$\left(X^n \log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h)} = (X^n)^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1} + e_{n,h};$$

d'ailleurs

$$X^{n+1}\log\frac{x+1}{x-1}=XX^n\log\frac{x+1}{x-1};$$

d'où

$$\left(X^{n+1}\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h)}=X\left(X^n\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h)}+hX'\left(X^n\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h-1)}$$
$$+h(h-1)\left(X^n\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h-2)}$$

ou bien

$$(X^{n+1})^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n+1,h}=X\left[(X^n)^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n,h}\right]$$
$$+hX'\left[(X^n)^{(h-1)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n,h-1}\right]$$
$$+h(h-1)\left[(X^n)^{(h-2)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n,h-2}\right];$$

d'où

$$(8)\qquad e_{n+1,h}=Xe_{n,h}+hX'e_{n,h-1}+h(h-1)e_{n,h-2}.$$

Ajoutant les relations (7) et (8), on obtient

$$(9)\qquad v_{n+1,h}=Xv_{n,h}+hX'v_{n,h-1}+h(h-1)v_{n,h-2}.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que les quantités f sont toujours entières. Les quantités e ne le sont que tant que le second indice ne dépasse pas le premier. Mais, d'après le développement même du calcul, la formule (8) subsiste sans restriction. La formule (7) n'a d'autre restriction que $h>1$. Il en est donc de même de la formule (9). En y faisant $h=n+1$, on obtient

$$V_{n+1}=Xv_{n,n+1}+(n+1)X'V_n+n(n+1)v_{n,n-1}.$$

Mais de la formule (6) on tire, pour $h=n$,

$$v_{n,n+1}=V'_n-\frac{2(X^n)^n}{X}.$$

On aura donc

$$(10)\qquad V_{n+1}=XV'_n+(n+1)X'V_n+n(n+1)v_{n,n-1}-2(X^n)^{(n)}.$$

Prenant la dérivée

$$V'_{n+1}=XV''_n+(n+2)X'V'_n+2(n+1)V_n+n(n+1)v'_{n,n-1}-2(X^n)^{(n+1)}.$$

Mais la relation (6) donne, pour $h=n-1$,

$$V_n=v'_{n,n-1}-\frac{2(X^n)^{(n-1)}}{X};$$

par conséquent

$$V'_{n+1} = XV''_n + (n+2)X'V'_n + (n+1)(n+2)V_n + 2\left[n(n+1)\frac{(X^n)^{(n-1)}}{X} - (X^n)^{(n+1)}\right].$$

Les deux derniers termes disparaissent en vertu de la relation fondamentale (1), qui dans la notation actuelle serait

$$n(n+1)(X^n)^{(n-1)} = X(X^n)^{(n+1)},$$

et il reste finalement

$$(11) \qquad V'_{n+1} = XV''_n + (n+2)X'V'_n + (n+1)(n+2)V_n.$$

Cette formule va nous mener au but que nous poursuivons, à savoir : de démontrer que toutes les quantités V sont identiquement nulles. Je remarque d'abord que si $V_n = 0$ identiquement, on aura identiquement aussi $V'_{n+1} = 0$. Donc, dans ce cas, V_{n+1} ne peut être qu'une constante, et je vais montrer que cette constante est nulle.

L'hypothèse $V_n = 0$ introduite dans la valeur générale de V_{n+1}, formule (10), donne

$$(11\,a) \qquad V_{n+1} = n(n+1)v_{n,n-1} - 2(X^n)^{(n)},$$

et comme V_{n+1} ne peut être qu'une constante, il suffira de démontrer que le second membre s'annule pour une valeur particulière de x; soit $x = 1$.

On peut écrire par définition

$$(12) \qquad V_{n+1} = n(n+1)\left(e_{n,n-1} + f_n^{(n-1)}\right) - 2(X^n)^{(n)}.$$

Ici se place une remarque importante relativement aux quantités e.

Dans la formule (5)

$$e_{n,h+1} = e'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X},$$

le terme $\frac{(X^n)^{(h)}}{X}$ contient $n-h-1$ fois le facteur X. Il en sera donc de même de $e_{n,h+1}$, si $e'_{n,h}$ contient X le même nombre de fois. Mais, pour cela, il suffit que $e_{n,h}$ contienne $n-h$ fois X. Or

$$e_{n,h} = e'_{n,h-1} - \frac{2(X^n)^{(h-1)}}{X};$$

le second terme du second membre contient $n-h$ fois X, il suffira donc encore que $e_{n,h-1}$ le contienne $n-h+1$ fois et, en continuant ainsi, on ramènera la première condition à la seule question de savoir si $e_{n,1}$ contient $n-1$ fois le facteur X. C'est ce qui a lieu, puisque

$$e_{n,1} = -2X^{n-1}.$$

Donc, en général, $e_{n,h+1}$ contiendra $n-h-1$ fois le facteur X. Faisant $h=n-2$, on voit que $e_{n,n-1}$ contiendra une fois le facteur X ; $e_{n,n-1}$ s'annulera donc pour $x=1$. Par suite, on tire de (12), pour $x=1$,

$$V_{n+1}=n(n+1)f_n^{(n-1)}-2(X^n)^{(n)}.$$

D'ailleurs, conservant une notation antérieure,

$$\varepsilon_{n,n-1}+e_{n,n-1}=f_n^{(n-1)},$$

et, pour $x=1$,

$$\varepsilon_{n,n-1}=f_n^{(n-1)}.$$

On aura donc en définitive, pour $x=1$,

$$V_{n+1}=n(n+1)\varepsilon_{n,n-1}-2(X^n)^{(n)}.$$

Pour vérifier que le second membre est nul, il sera suffisant de supposer n pair. Car si n est impair, comme $\varepsilon_{n,n-1}$ et $(X^n)^{(n)}$ ne contiennent que des puissances impaires de x, ces deux quantités s'annuleront pour $x=0$. Soit donc n pair et posons

$$(X^n)^{(n-1)}=a_0x^{n+1}-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-3}\ldots+(-1)^pa_px^{n-(2p-1)}\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}a_{\frac{n}{2}}x,$$

d'où

$$(X^n)^{(n)}=(n+1)a_0x^n-(n-1)a_1x^{n-2}+(n-3)a_2x^{n-4}$$
$$+\ldots+(-1)^p[n-(2p-1)]a_px^{n-2p}+\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}a_{\frac{n}{2}},$$
$$(X^n)^{(n+1)}=n(n+1)a_0x^{n-1}-(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-3)(n-4)a_2x^{n-5}$$
$$+\ldots+(-1)^p(n-2p+1)(n-2p)a_px^{n-2p-1}+\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}2.3a_{\frac{n}{2}-1}.$$

En développant l'identité

$$n(n+1)(X^n)^{(n-1)}=(x^2-1)(X^n)^{(n+1)},$$

on sera conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
n(n+1)a_0&=n(n+1)a_0 \quad (-1)^0,\\
n(n+1)a_0+(n-1)(n-2)a_1&=n(n+1)a_1 \quad (-1)^1,\\
(n-1)(n-2)a_1+(n-3)(n-4)a_2&=n(n+1)a_2 \quad (-1)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n-2p+3)(n-2p+2)a_{p-1}+(n-2p+1)(n-2p)a_p&=n(n+1)a_p \quad (-1)^p.
\end{aligned}$$

En les multipliant respectivement par les puissances de -1 placées en regard et ajoutant, on aura

$$(13)\quad (-1)^p(n-2p+1)(n-2p)a_p=n(n+1)[a_0-a_1+a_2+\ldots+(-1)^pa_p].$$

Cette équation exprime précisément, comme on va voir, l'identité cherchée, c'est-à-dire

$$n(n+1)\varepsilon_{n,n-1} = 2(X^n)^{(n)}$$

pour $x = 1$.

En effet, on aura $\varepsilon_{n\,n-1}$ en prenant la partie entière du produit

$$(X^n)^{(n-1)} \log \frac{x+1}{x-1},$$

c'est-à-dire de

$$[a_0 x^{n+1} - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-3} + \ldots (-1)^p a_p x^{n-2p+1} + \ldots] 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right),$$

d'où résulte

$$x = 1,\ \varepsilon_{n,n-1} = 2 \left\{ \begin{array}{l} a_0\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ -a_1\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \\ +a_2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{n-3}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^p a_p\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{n-2p+1}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}. \end{array} \right.$$

Mais comme $(X^n)^{(n-1)}$ contient encore le facteur X et par conséquent s'annule pour $x = 1$, on a identiquement

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}} = 0,$$

et il reste, introduisant le facteur $n\,(n+1)$,

$$(14) \quad \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon_{n,n-1} = n(n+1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} a_{\frac{n}{2}-1} \\ +\frac{1}{5}(a_0 - a_1 + \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots \\ +\frac{1}{n-2p+1}[a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^p a_p] \\ +\ldots. \end{array} \right.$$

D'autre part, on a

$$x = 1,\ (X^n)^{(n)} = (n+1)a_0 - (n-1)a_1 + (n-3)a_2 - \ldots (-1)^p (n-2p+1)a_p + \ldots,$$

et, en retranchant la quantité nulle $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$, il reste

$$(15) \quad x = 1,\ (X^n)^{(n)} = na_0 - (n-2)a_1 + (n-4)a_2 \ldots + (-1)^p (n-2p)a_p + \ldots.$$

Or, en égalant les termes généraux des équations (14) et (15), c'est-à-dire les coefficients de a'' et de $\frac{1}{n-2p+1}$, on tombe sur l'équation (13). Donc on a identiquement

$$n(n+1)e_{n,n-1} = 2(X^n)^{(n)} \text{ pour } x = 1,$$

d'où résulte enfin

$$V_{n+1} = 0,$$

si $V_n = 0$ identiquement. Or ce résultat est facile à vérifier pour $n = 2$; donc la proposition est générale.

En se reportant à l'équation (11 a), on voit qu'il résulte de l'analyse précédente que l'on a identiquement

$$2(X^n)^{(n)} = n(n+1)v_{n,n-1} = n(n+1)\left(e_{n,n-1} + f_n^{(n-1)}\right).$$

La $n^{\text{ème}}$ dérivée de $(x^2-1)^n$ jouit, comme on sait, d'une propriété caractéristique qui est de donner une approximation de la transcendante $\log\frac{x+1}{x-1}$ au moyen d'une fraction rationnelle dont elle est le dénominateur (*). En se reportant au tableau (3), on voit que le numérateur de cette fraction rationnelle n'est autre que $2F_n$. La dernière équation de ce tableau donne, ayant égard à la proposition démontrée,

$$(X^n)^{(n)} \log\frac{x+1}{x-1} = 2F_n + \sigma^{(n)},$$

$$\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{2F_n}{(X^n)^{(n)}} + \frac{\sigma^{(n)}}{(X^n)^{(n)}},$$

ou, en développant le second terme,

$$\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{2F_n}{(X^n)^{(n)}} + \frac{\alpha}{x^{2n+1}} + \frac{\alpha_1}{x^{2n+3}} + \ldots,$$

équation dans laquelle $F_n = \frac{d^n f_n}{dx^n}$ c'est-à-dire la $n^{\text{ème}}$ dérivée de la partie entière du produit

$$(x^2-1)^n 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right).$$

Tous ces résultats s'appliqueront identiquement au produit

$$(x^2+1)^n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}.$$

Il suffira de changer x en $x\sqrt{-1}$.

(*) La théorie en est exposée dans le *Cours d'analyse* de M. Hermite, p. 277.

Sur le contact des surfaces; par M. HALPHEN.

(Séance du 9 décembre 1874)

1. On a jusqu'à présent accordé peu d'attention aux questions qui concernent le contact des surfaces quelconques avec les surfaces algébriques. Plusieurs sont cependant dignes d'intérêt : on en jugera peut-être ainsi de celle qui a donné lieu au présent travail. Peu de mots suffiront pour en faire connaître l'origine.

Le contact d'ordre n entre deux surfaces, S, Σ, dont l'une est supposée donnée ainsi que le point de contact, exige, comme on sait, $N_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions. Donc : 1° si l'autre surface, Σ, renferme M arbitraires, on peut en disposer de manière à élever l'ordre du contact jusqu'à la plus grande valeur de n qui laisse N_n non supérieur à M ; 2° pour que le contact puisse s'élever à l'ordre immédiatement supérieur $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à $(N_{n+1} - M)$ conditions.

Cette proposition, à laquelle on borne le plus souvent cette partie de la théorie du contact, souffre, dans un des cas les plus simples, une exception remarquable signalée dans le *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, par M. Hermite. Il s'agit du cas où Σ est une surface arbitraire du second degré. Le nombre M est ici égal à 9. Conformément à ce qui vient d'être rappelé, le maximum de n est égal à 2. Mais la seconde partie de la conclusion cesse d'être exacte. Le contact devrait pouvoir s'élever au 3ème ordre en des points satisfaisant à *une* condition sur la surface donnée. Il n'en est rien : les points dont il s'agit satisfont à *deux* conditions. Ils sont donc en nombre fini. De plus, en chacun d'eux, il existe un faisceau de surfaces du second degré ayant avec la proposée un contact du 3ème ordre.

Cette exception est-elle un fait isolé, ou a-t-elle lieu dans d'autres cas? Telle est la question qui s'offre ici. Je prouverai qu'une exception analogue a lieu dans le cas où la surface arbitraire est du 3ème, du 4ème ou du 5ème degré, et qu'il n'en existe point pour les surfaces de degré supérieur.

2. Voici d'abord une remarque des plus simples, qui donne une première indication sur le sujet dont il s'agit. Soit $\Sigma = 0$ l'équation d'une surface, et $T = 0$ celle de son plan tangent en un point a. Soit λ une constante arbitraire. Les surfaces du faisceau $\Sigma + \lambda T^m = 0$ ont manifestement, en a, avec Σ, un contact d'ordre $(2m-1)$. Si, en effet, on substitue aux coordonnées, dans l'équation du faisceau, celles d'un point de Σ, à distance infiniment petite du 1er ordre de a, Σ s'évanouit, et T est du 2ème ordre. Donc $\Sigma + \lambda T^m$ est infiniment petit d'ordre $2m$. Donc le contact est bien d'ordre $(2m-1)$.

Supposons maintenant que Σ soit du degré m. Nous avons formé, de la

sorte, en un point arbitraire a de Σ, un faisceau de surfaces du même degré, ayant avec la proposée un contact d'ordre $(2m-1)$. Donc :

Si, en un point d'une surface, il existe une surface de degré m, ayant avec la proposée, un contact d'ordre non supérieur à $(2m-1)$, il en existe une infinité.

Si, comme je l'ai rappelé plus haut, on calcule le maximum de n relatif à une surface arbitraire de degré m, on trouve, pour $m=2$, 3 ou 4, que ce maximum est $(2m-2)$, c'est-à-dire 2, 4 ou 6.

Par conséquent, un contact d'ordre 3, 5 ou 7, en un mot d'ordre $(2m-1)$, est exceptionnel. La remarque précédente nous avertit donc que, si ce contact exceptionnel a lieu, en un point d'une surface S, à l'égard d'une surface de degré 2, 3 ou 4, il a également lieu à l'égard d'une infinité de pareilles surfaces.

Le maximum de n, calculé de même pour le cas où $m=5$, est égal à 9. Ici le nombre N_9 des conditions est précisément le même que celui des arbitraires, à savoir 55. On croirait donc qu'en chaque point d'une surface S, il existe *une* surface du 5ème degré ayant avec S un contact du 9ème ordre. Je dis *une* à cause de la forme linéaire des équations qui servent à déterminer la surface. Mais, d'après la remarque ci-dessus, s'il en existe une, il en existe une infinité. Voilà donc encore une exception à la théorie générale ; et celle-là est un peu différente des précédentes.

Pour les valeurs de m supérieures à 5, le maximum de n, calculé de même, est, on le prouve aisément, supérieur à $(2m-1)$. La remarque ci-dessus cesse alors d'être utile.

Les indications précédentes ne suffisent pas pour résoudre les questions proposées. Une étude plus approfondie est nécessaire. Avant de l'aborder, je ferai remarquer que cet ordre de recherches peut être envisagé d'un point de vue, au premier abord, différent.

3. Soit, comme plus haut, Σ une surface à M arbitraires, et n l'ordre le plus élevé du contact que ces arbitraires permettent d'établir entre Σ et une surface donnée S en un point donné. Pour que l'ordre de ce contact puisse s'élever à $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à des conditions qui se traduisent par des relations entre les coordonnées et les dérivées partielles prises sur S. Or il est manifeste que ces relations ne sont autre chose que les équations aux dérivées partielles du groupe de surfaces Σ ; c'est-à dire les équations qu'on obtient en différentiant l'équation de Σ jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination de toutes les arbitraires, et en faisant cette élimination.

Cette double interprétation des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes est un fait général en analyse, et sur lequel je pourrai revenir dans une autre occasion. Dans tous les cas de la théorie du contact, elle est immédiatement évidente. Par exemple, l'équation aux dé-

rivées partielles des surfaces réglées, considérée comme définissant un lieu de points sur une surface donnée, y définit le lieu des points de contact des droites surosculatrices, c'est-à-dire ayant avec la surface un contact du 3ème ordre.

La considération de ce lieu, qui s'offre ici comme un exemple, fournit une explication simple de l'exception relative au contact des surfaces du second degré. Je l'indique en passant. Soit P cette courbe. Si, en un point p d'une surface S, il existe une surface Σ du 2ème degré ayant avec S un contact du 3ème ordre, les droites de Σ, qui passent en p, ont avec S un contact de ce même ordre. Le point p appartient donc doublement à la ligne P ; il en est un point double. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points. Ainsi :

Les points d'une surface S, *en lesquels il existe des surfaces du* 2ème *degré ayant avec* S *un contact du* 3ème *ordre sont des points doubles du lieu des points de contact de* S *avec ses droites surosculatrices.*

La réciproque de cette proposition est exacte, comme on le verra plus loin.

J'arrive maintenant à la question générale, qui peut être ainsi posée : *Quelles sont les équations aux dérivées partielles d'ordre minimum, ne contenant aucune constante arbitraire, auxquelles satisfont les surfaces de degré m ?*

4. Les surfaces de degré m contiennent un nombre M d'arbitraires, marqué par

$$M = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1.$$

J'en prends une passant à l'origine O des coordonnées, et y touchant le plan des xy. Elle contient $(M-3)$ arbitraires, et satisfait à 3 équations, à savoir, pour $x=0$, $y=0$,

$$(1) \qquad z=0, \quad \frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0.$$

Formons les dérivées partielles de z, au point O, jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination des $(M-3)$ arbitraires, et faisons cette élimination. Nous obtenons ainsi des équations :

$$(2) \qquad O=0, \quad O_1=0, \quad \ldots,$$

entre les dérivées partielles considérées. Ces équations, à cause de (1), ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du 1er ordre.

Je dis que *les équations* (2) *sont précisément les équations aux dérivées partielles des surfaces de degré m,* que je cherche.

Changeons, en effet, de coordonnées, en posant :

$$(3) \qquad a+x=X, \quad b+y=Y, \quad c+px+qy+z=Z.$$

Tirons de ces équations x, y, z et remplaçons ces variables par leurs expressions dans (1) et (2). Il est clair que les équations (2) ne changent pas, sauf que x, y, z sont remplacées par les lettres X, Y, Z. Quant aux équations (1), elles deviennent, pour $X = a$, $Y = b$,

$$(4) \qquad Z = c, \quad \frac{dZ}{dx} = p, \quad \frac{dZ}{dy} = q.$$

Les équations (2) et (4) conviennent donc aux surfaces de degré m, passant au point $X = a$, $Y = b$, $Z = c$, et y touchant le plan

$$Z - c = p(X - a) + q(Y - b).$$

Il suffira d'éliminer les constantes arbitraires a, b, c, p, q pour avoir les équations qui conviennent à toutes les surfaces de degré m. Ces équations se réduisent donc aux équations (2). Ce qu'il fallait démontrer.

Donc, premier résultat : *les équations aux dérivées partielles des surfaces d'un degré donné, ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du 1er ordre.*

Ce résultat s'applique également à toute famille de surfaces, telle qu'on puisse mener une d'elles par un point quelconque, de manière à y toucher un plan quelconque. Dans ce cas général, comme dans celui qui nous occupe, on peut, pour former les équations, supposer la surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy.

Dans cette hypothèse, si un terme de l'équation de la surface est de la forme $Az^p y^r x^q$, et que x et y soient infiniment petits du 1er ordre, ce terme est lui-même infiniment petit d'ordre $(r + q + 2p)$. Comme les dérivées partielles de z sont, à des facteurs numériques près, les coefficients du développement de z suivant les puissances croissantes de x et y, on voit que le terme considéré n'a aucune influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à $(r + q + 2p)$.

Ainsi, dans le cas du 2ème degré, le terme en z^2 n'a pas d'influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à 4. Les 7 dérivées du 2ème et du 3ème ordre dépendent donc simplement de 5, et non pas de 6 arbitraires $(M - 3 = 6)$. *Donc il y a au moins deux équations du 3ème ordre.*

Pour le 3ème degré, le terme en z^3 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 6ème ordre. Les 18 dérivées du 2ème au 5ème ordre dépendent donc de 15 et non de 16 coefficients $(M - 3 = 16)$. *Donc au moins trois équations du 5ème ordre.*

Pour le 4ème degré, le terme en z^4 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 8ème ordre. Les 33 dérivées du 2ème au 7ème ordre dépendent donc de 30, et non de 31 coefficients $(M - 3 = 31)$. *Donc encore au moins trois équations du 7ème ordre.*

Pour le 5ème degré, le terme en z^5 n'intervient pas dans le calcul des déri-

vées avant le 10ème ordre. Les 52 dérivées du 2ème au 9ème ordre dépendent donc de 51 et non de 52 coefficients ($M-3=52$). *Il y a donc au moins une équation du 9ème ordre.*

Là s'arrête l'application de cette nouvelle remarque. Elle ne diffère pas essentiellement de celle qui a été faite plus haut, n° 2. Elle la complète et fait prévoir les résultats du calcul dont je vais m'occuper.

5. Je considère une surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy, conformément à une remarque du numéro précédent. Soit

$$z = S_2 + S_3 + S_4 + \ldots \tag{5}$$

le développement de z suivant les puissances croissantes de x et y. Je désigne ici par S_k un polynôme homogène en x, y, de degré k. Ses coefficients sont, à des facteurs numériques près, les dérivées partielles d'ordre k.

Je représente de même par une lettre tout polynôme homogène en x, y, en indiquant son degré par l'indice inférieur, en sorte que :

$$T^{(k)} = t_0^{(k)} + t_1^{(k)} + t_2^{(k)} + \ldots + t_k^{(k)} \tag{6}$$

est un polynôme quelconque en x, y, de degré k. D'après ces définitions, les symboles $t_{k+1}^{(k)}$, $t_{k+2}^{(k)}, \ldots$ sont nuls.

L'équation d'une surface de degré m, d'après ces conventions, pourra s'écrire :

$$T^{(m)} + T^{(m-1)}z + T^{(m-2)}z^2 + \ldots\ldots + T^{(1)}z^{m-1} + T^{(0)}z^m = 0. \tag{7}$$

On obtiendra toutes les relations entre les dérivées partielles de z et les coefficients de (7) en écrivant que l'expression (6), mise à la place de z dans (7), fournit une identité.

Je forme les termes par degrés successifs croissants. J'ai ainsi :

$$t_0^{(m)} = 0, \quad t_1^{(m)} = 0, \tag{8}$$

$$(9)\begin{cases} t_2^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_2 = 0, \\ t_3^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_3 + t_1^{(m-1)}S_2 = 0, \\ t_4^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_4 + t_1^{(m-1)}S_3 + t_2^{(m-1)}S_2 + t_0^{(m-2)}S_2^2 = 0, \\ t_5^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_5 + t_1^{(m-1)}S_4 + t_2^{(m-1)}S_3 + t_3^{(m-1)}S_2 + 2t_0^{(m-2)}S_2S_3 + t_1^{(m-2)}S_2^2 = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour appliquer ces équations, je suppose d'abord $m=2$. Alors $t_3^{(m)}$ est nul. Le seconde des équations (9) indique que S_3 *est divisible par* S_2. Donc :

Les surfaces du 2ème degré satisfont à deux équations aux dérivées partielles du 3ème ordre que l'on obtient en écrivant que le polynôme du 3ème degré en α

$$A = \alpha^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3\alpha^2 \frac{d^3z}{dx^2dy} + 3\alpha \frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d^3z}{dy^3}$$

est divisible par le polynôme du 2ème degré

$$B = \alpha^2 \frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Ce sont précisément les conditions, indiquées par M. Hermite, pour la possibilité du contact du 3ème ordre entre une surface et une surface du second degré.

Les équations (9) sont évidemment susceptibles elles-mêmes de la double interprétation signalée plus haut, n° 3. On y peut considérer les coefficients des polynômes S comme donnés. Les équations servent alors à déterminer la surface (7) de manière à ce qu'elle ait avec la surface (5) un contact d'ordre égal au degré de celle des équations (9) à laquelle on s'arrête.

Si donc on suppose que S_3 soit donné, divisible par S_2, les équations (8) et les deux premières des équations (9) déterminent, dans l'hypothèse $m = 2$, un faisceau de surfaces du 2ème degré, de la forme $\Sigma + \lambda z^2 = 0$, qui ont avec la surface proposée, en O, un contact du 3ème ordre.

6. Quelques mots encore au sujet du contact des surfaces du 2ème degré. L'équation d'une surface étant mise sous la forme du développement (5), les points d'intersection de cette surface et du plan des xy doivent vérifier la relation

$$(10) \qquad 0 = S_2 + S_3 + S_4 + \ldots.$$

S'il arrive que la courbe, lieu de ces points, se compose de plusieurs lignes distinctes, et que $Q = 0$ soit l'équation, sous forme entière, de l'une d'elles, le second membre de (10) est divisible par Q.

Ce fait se présente dans le cas d'une surface réglée. Pour la génératrice rectiligne qui passe en O, Q est linéaire et homogène. C'est un des deux facteurs de S_2. Le second membre de (10) étant divisible par ce facteur, il en est ainsi de S_3. Par suite, *on obtient*, comme on le sait d'ailleurs, *l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées en écrivant que le polynôme* A, du numéro précédent, *a un facteur commun avec le polynôme* B.

Que l'on se reporte au résultat du numéro précédent, et l'on voit que *les deux équations aux dérivées partielles des surfaces du 2ème degré expriment la double génération rectiligne de ces surfaces.* Comme conséquence, l'équation du 2ème degré à trois variables en est la solution générale.

Au point de vue de la théorie du contact, les points d'une surface, en lesquels les polynômes A et B ont un facteur commun, sont les points de contact des droites surosculatrices ; ils forment ce que j'ai désigné précédemment par la ligne P. D'ailleurs, nous venons de trouver que les points où A et B ont deux facteurs communs sont ceux où le contact du 3ème ordre avec une surface du 2ème degré est possible, et inversement. Nous retrou-

vons donc par le calcul que ces points sont doubles sur la ligne P, et aussi la proposition réciproque.

7. J'applique maintenant les équations du n° 5 au cas où $m=3$. Ici $t_4^{(m)}$, $t_5^{(m)}$, $t_3^{(m-1)}$ sont nuls. La 3ème des équations (9), si l'on y fait $t_0^{(2)}=1$, ce qui est permis, devient

$$(11) \qquad S_4 + t_1^{(2)}S_2 + (t_2^{(2)} + t_0^{(1)}S_2)S_2 = 0.$$

Je dis qu'on en peut déduire aisément les polynômes $t_1^{(2)}$ et $t_2^{(2)} + t_0^{(1)}S_2$.

A cet effet, je considère la fraction rationnelle $\frac{S_4}{S_3}$ en y supposant que le rapport $\frac{x}{y}$ soit remplacé, dans cette fraction, par une racine de $S_2=0$. A ce point de vue, la fonction rationnelle peut être réduite à un polynôme du 1er degré homogène en x, y, dont les coefficients s'expriment rationnellement par ceux de S_4, S_3, S_2. La définition de ce polynôme A_1 peut être rappelée abréviativement par la relation

$$(12) \qquad A_1 \equiv \frac{S_4}{S_3} \text{ (mod. } S_2).$$

Sans autre explication, on comprend de même quel est le polynôme A_2 du second degré, homogène en x, y, qui est défini par

$$(13) \qquad A_2 \equiv \frac{S_4}{S_2} \text{ (mod. } S_3).$$

Le polynôme $A_1S_3 + A_2S_2$, qui est, comme S_4, du 4ème degré, lui est égal pour 5 valeurs distinctes de la variable $\frac{x}{y}$, à savoir les racines de S_2 et de S_3. C'est donc précisément S_4. On en conclura aisément que la solution de l'équation (11) est donnée par

$$(14) \qquad t_1^{(2)} = -A_1, \quad t_2^{(2)} + t_0^{(1)}S_2 = -A_2.$$

La 4ème des équations (9) devient maintenant

$$(15) \qquad S_5 - A_1S_4 - A_2S_3 + (t_0^{(1)}S_3 + t_1^{(1)}S_2)S_2 = 0.$$

Désignons par B_5 le polynôme

$$B_5 = S_5 - A_1S_4 - A_2S_3,$$

dont les coefficients sont exprimables rationnellement par ceux de S_2, S_3, S_4 et S_5. L'équation (15) exprime 3 conditions :

1° B_5 *est divisible par* S_2; ce qui donne 2 équations.

2° Le *quotient* $\frac{B_5}{S_2}$ *est de la forme* $\alpha S_3 + \beta S_2$, *α et β étant une constante et un polynôme du 1er degré, indéterminés*, ce qui donne une équation.

Il s'agit de former cette dernière équation.

Je dénote par un accent les dérivées prises par rapport à la variable $\frac{x}{y}$, les coefficients des polynômes étant, bien entendu, considérés comme constants.

Puisque B_5 est divisible par S_2, j'ai

$$\frac{B_5}{S_2} \equiv \frac{B'_5}{S'_2} \pmod{S_2}.$$

Soit donc

$$(16) \qquad \frac{B'_5}{S'_2} \equiv y^2(ax + by) \pmod{S_2},$$

$$(17) \qquad S_5 \equiv y^2(cx + \varepsilon y) \pmod{S_2}.$$

On verra sans peine que l'équation cherchée est

$$(18) \qquad a\varepsilon - bc = 0,$$

a, b, c, ε étant, comme l'indiquent les relations (16) et (17), exprimables rationnellement en fonction des dérivées partielles du 2ème au 5ème ordre.

Ainsi : *En joignant à l'équation* (18) *celles qu'on obtient en exprimant que* B_5 *est divisible par* S_2, *on a les trois équations aux dérivées partielles du* 5ème *ordre des surfaces du* 3ème *degré.*

A un autre point de vue, *ces trois équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du* 3ème *degré puisse s'élever au* 5ème *ordre. Quand elles sont satisfaites en un point, il existe en ce point un faisceau de telles surfaces du* 3ème *degré.*

Pour cette dernière partie, on voit, en effet, que les équations considérées, jointes aux deux premières équations (9) et à (8), déterminent tous les coefficients de l'équation du 3ème degré, sauf celui du terme en z^3. Les surfaces cherchées sont donc de la forme $\Sigma + \lambda z^3 = 0$.

8. Considérons maintenant les équations (9) dans le cas général. Nous les distinguons en deux groupes : en premier lieu, la série des premières jusqu'à celle qui commence par le terme $t_m^{(m)}$, inclusivement. Les équations de ce groupe serviront à déterminer

$$T^{(m)} = t_0^{(m)} + t_1^{(m)} + t_2^{(m)} + \ldots + t_m^{(m)},$$

quand les autres polynômes t auront été déterminés par les équations suivantes, qui forment le second groupe.

C'est seulement ce second groupe, qui ne contient pas les polynômes $t^{(m)}$, qui servira à trouver les équations aux dérivées partielles cherchées. C'est ainsi que le calcul a été fait dans les deux cas précédents.

Ainsi, par cette voie, tous les coefficients de $T^{(m)}$, au nombre de $\frac{(m+1).(m+2)}{2}$, sont immédiatement éliminés. Les équations qui subsistent, et dont les degrés, par rapport à $\frac{x}{y}$, vont en croissant, commencent au degré $(m+1)$. Chacune d'elles fournit des équations distinctes, indépendantes de x et y, en nombre égal à son degré en $\frac{x}{y}$. Ces équations sont d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport aux coefficients des polynômes t, qu'il s'agit d'éliminer. Dès que leur nombre permettra l'élimination complète, cette élimination fournira les équations aux dérivées partielles que l'on cherche.

Pour le 4ème et le 5ème degré, conformément à des remarques déjà faites, l'élimination est possible avant que la constante $T^{(0)}$ se soit introduite. Ainsi, pour le 4ème degré, on aura à considérer des équations des degrés 5, 6, 7 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à $6+7+8=21$ équations linéaires et homogènes, entre lesquelles on doit éliminer les coefficients de $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$. En formant ces équations, ce qui est facile, mais un peu compliqué, on verra qu'aucun de ces coefficients, au nombre de 19, n'y manque. On aura donc, par l'élimination, 3 équations du 7ème ordre. On peut donc dire que :

Les surfaces du 4ème degré satisfont à 3 équations aux dérivées partielles du 7ème ordre.

A un autre point de vue, *ces équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du 4ème degré puisse s'élever au 7ème ordre. En un tel point, il existe un faisceau de telles surfaces du 4ème degré.*

Pour le 5ème degré, on aura à considérer des équations des degrés 6, 7, 8, 9 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à 34 équations linéaires et homogènes entre les coefficients de $T^{(4)}$, $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$, au nombre de 34, et dont aucun n'y manque. Donc :

Les surfaces du 5ème degré satisfont à une équation aux dérivées partielles du 9ème ordre.

Cette équation caractérise, sur une surface quelconque, le lieu des points en lesquels le contact avec une surface du 5ème degré peut s'élever au 9ème ordre. En chaque point de ce lieu, il existe un faisceau de surfaces du 5ème degré ayant avec la surface considérée des contacts de cet ordre.

Il est clair que l'équation du 9ème ordre dont il s'agit a pour solution générale une surface qui, en chacun de ses points, a un contact du 9ème ordre avec un faisceau de surfaces du 5ème degré.

Au delà du 5ème degré, les mêmes raisonnements prouvent sans peine que la théorie générale, rappelée au n° 1, a toujours lieu. Il paraît bien difficile de parvenir à trouver la loi des équations définitives. S'il est cependant permis de l'espérer, c'est peut-être en suivant la marche que je viens d'indiquer, et dont l'effet est de faire disparaître immédiatement un assez grand nombre des quantités que l'on doit éliminer.

Sur la courbure des surfaces de carène; par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 20 janvier 1875)

Quand un plan P se déplace de manière à détacher d'une surface convexe S un segment U de volume constant V, le centre de gravité de U décrit une surface Σ que son rôle en hydrostatique a fait nommer surface de carène. Soient M, M′ deux points de Σ correspondant à deux positions infiniment voisines P, P′ du plan mobile, dont l'intersection est, on le sait, une droite HH′ qui passe au centre de gravité O de la section C, déterminée par P dans Σ : le plan tangent à Σ en M est parallèle à P; j'ajoute que l'indicatrice au même point est homothétique à l'ellipse principale de la section C par rapport à son centre de gravité, et qu'en outre la courbure de la surface Σ varie en raison inverse des moments d'inertie de C par rapport aux droites qui passent en son centre de gravité.

Prenons pour axes des x et des y les axes de l'ellipse principale E de la section C, et pour axe des z une perpendiculaire aux deux premiers; appelons A l'aire de C, et posons, en étendant les intégrales à tout l'intérieur de cette section,

$$\int\int x^2 dxdy = Ab^2, \quad \int\int y^2 dxdy = Aa^2;$$

en sorte que l'équation de l'ellipse principale E puisse s'écrire

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

le moment d'inertie C par rapport à un diamètre de longueur $2r$ sera $A\frac{a^2b^2}{r^2}$.

Soient θ l'angle $< \pi$ de HH′ avec OX, ε l'angle des plans P et P′, et supposons P′ au-dessous de P dans la région qui contient la partie positive de l'axe des x. Les différences entre les coordonnées de M′ et celles de M, dx, dy, dz, sont données par le théorème des moments :

$$Vdx = \int\int \varepsilon(x \sin\theta - y\cos\theta)xdxdy = Ab^2\varepsilon \sin\theta,$$

$$V dy = \int\int \varepsilon(x \sin\theta - y \cos\theta) y dx dy = -Aa^2\varepsilon \cos\theta,$$

$$V dz = \int\int \frac{1}{2}\varepsilon^2(x \sin\theta - y \cos\theta)^2 dx dy = \frac{1}{2}A\varepsilon^2(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta).$$

La valeur $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2}\cot\theta$ prouve que la direction de l'élément MM′ est conjuguée de HH′ par rapport à E. Puisque dz est infiniment plus petit que dx et dy, il faut que le plan tangent à Σ en M soit parallèle à XOY ou P ; le rayon de courbure de la section normale qui contient MM′ a pour mesure

$$\rho = \frac{dx^2 + dy^2}{2dz} = \frac{A}{V}\,\frac{a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} = \frac{A}{V}r^2,$$

r étant la longueur du demi-diamètre de E conjugué à HH′, c'est-à-dire parallèle à la tangente à MM′ ; or ρ varie comme le carré du demi-diamètre de l'indicatrice de Σ qui contient l'élément MM′ ; il faut donc que cette indicatrice soit homothétique à l'ellipse principale E.

En prenant pour S un cylindre et ne considérant que des sections C parallèles aux génératrices, on a un théorème de géométrie plane : *le rayon de courbure du lieu des centres de gravité des segments d'aire constante interceptés dans une surface convexe par une corde variable, est perpendiculaire en chaque point à la corde correspondante, et égal au cube de cette corde divisé par 24 fois l'aire du segment.*

Dans le cas général, la courbure de Σ est mesurée par la somme des inverses des rayons de courbure principaux

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = V\left(\frac{1}{Aa^2} + \frac{1}{Ab^2}\right) :$$

elle est proportionnelle à ce qu'on peut appeler la valeur moyenne des inverses des moments d'inertie de C par rapport aux diamètres de E.

On ne peut trouver des relations aussi simples entre E et la courbure de la surface enveloppe du plan P, parce que la position du point où P′ touche son enveloppe dépend non-seulement de la forme de la section C, mais aussi de la loi de variation du plan tangent à S sur le contour de C, et cette loi est tout à fait quelconque.

Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle; par M. H. Brocard.

(Séance du 8 avril 1874)

1. *Les côtés d'un quadrilatère étant pris pour diagonales de carrés, les sommets extérieurs et intérieurs de ces carrés forment deux nouveaux qua-*

drilatères dont les médianes sont égales et se coupent à angle droit en un même point qui est leur milieu commun.

Soient *abcd* le quadrilatère donné, A,B,C,D les sommets extérieurs des carrés, A′,B′,C′,D′ les sommets intérieurs de ces mêmes carrés.

Nous aurons démontré la proposition si nous faisons voir que les diagonales AC,BD d'une part, A′C′,B′D′ d'autre part, sont égales et se coupent à angle droit.

2. Prenons pour origine le sommet d, pour axe des x le côté da: désignons les côtés respectivement par $2a$, $2b$, $2c$ et $2d$, et par α, β les angles cda, dab, et l'angle de cb avec da par γ.

Soient x_1, y_1 les coordonnées de A, x'_1, y'_1 celles de A′, etc.

Nous aurons, comme il est facile de s'en assurer, les deux systèmes d'équations :

$$\begin{aligned} x_1 &= a, & y_1 &= -a, \\ x_2 &= 2a - b\cos\beta + b\sin\beta, & y_2 &= b\sin\beta + b\cos\beta, \\ x_3 &= 2a - 2b\cos\beta - c\cos\gamma + c\sin\gamma, & y_3 &= 2b\sin\beta + c\sin\gamma + c\cos\gamma, \\ x_4 &= d\cos\alpha - d\sin\alpha, & y_4 &= d\sin\alpha + d\cos\alpha, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x'_1 &= a, & y'_1 &= a, \\ x'_2 &= 2a - b\cos\beta - b\sin\beta, & y'_2 &= b\sin\beta - b\cos\beta, \\ x'_3 &= 2a - 2b\cos\beta - c\cos\gamma - c\sin\gamma, & y'_3 &= 2b\sin\beta + c\sin\gamma - c\cos\gamma, \\ x'_4 &= d\cos\alpha + d\sin\alpha, & y'_4 &= d\sin\alpha - d\cos\alpha, \end{aligned}$$

sous les conditions communes

$$\begin{aligned} a &= d\cos\alpha + c\cos\gamma + \cos\beta, \\ d\sin\alpha &= c\sin\gamma + b\sin\beta, \end{aligned}$$

par suite desquelles les expressions de $(x_1 - x_2)$, etc. deviennent

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= y_2 - y_4 = b\cos\beta - d\cos\alpha - c\sin\gamma, \\ x_2 - x_4 &= y_3 - y_1 = a + c\cos\gamma + b\sin\beta + d\sin\alpha, \end{aligned}$$

d'une part, ce qui prouve que AC = BD; et

$$\begin{aligned} x'_3 - x'_1 &= y'_2 - y'_4 = d\cos\alpha - c\sin\gamma - b\cos\beta, \\ x'_2 - x'_4 &= y'_1 - y'_3 = a + c\cos\gamma - b\sin\beta - d\sin\alpha, \end{aligned}$$

d'autre part, ce qui prouve que A′C′ = B′D′.

3. Des équations précédentes, on conclut encore identiquement que

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\,\frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = -1,$$

et que

$$\frac{y'_3 - y'_1}{x'_3 - x'_1}\,\frac{y'_4 - y'_2}{x'_2 - x'_4} = -1,$$

ce qui montre que les diagonales (AC,BD), (A'C',B'D') des deux nouveaux quadrilatères se coupent à angle droit. Il en sera donc de même des médianes de ces deux quadrilatères. Les extrémités de ces médianes sont donc les sommets de deux nouveaux carrés. On s'assurerait enfin très-facilement que le centre commun de ces deux carrés est le *centre des moyennes distances* des sommets du quadrilatère donné.

4. De ce qui précède, on déduit une *propriété nouvelle du triangle*. En effet, si l'on suppose le quadrilatère circonscriptible, la proposition énoncée s'y appliquera également. Le triangle, étant toujours circonscriptible, représente un quadrilatère de ce genre, dans lequel un des sommets est le point de contact d'un des côtés du triangle avec la circonférence inscrite. La propriété précédente subsiste donc avec cette modification et donne lieu à l'énoncé suivant :

Les sommets d'un triangle et l'un des points de contact du cercle inscrit étant pris pour extrémités des côtés d'un quadrilatère, les sommets des carrés construits sur ces lignes comme diagonales sont les sommets de deux nouveaux quadrilatères dont les médianes sont égales et se coupent à angle droit en un même point qui est leur milieu commun.

Dans ce dernier cas, la distance de ce point au côté qui renferme trois sommets du quadrilatère est le quart de la hauteur correspondant à ce côté.

Sur l'intégration de quelques équations différentielles; par L. V. Turquan.

(Séance du 25 février 1874)

J'ai intégré quelques équations différentielles en les convertissant en équations aux différences partielles d'une fonction de deux variables. Ce procédé peut paraître détourné, mais n'a rien qui puisse surprendre, car on sait trouver les intégrales générales de plusieurs équations aux différences partielles, tandis que certaines équations différentielles ordinaires n'ont pu encore être intégrées en termes finis, c'est-à-dire ramenées à des quadratures. Ce procédé peut d'ailleurs, dans certains cas, donner les intégrales d'équations différentielles qui résistent aux procédés connus jusqu'ici. Un des exemples que je traite est, je crois, dans ce cas.

1° Soit

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre, algébrique et d'un degré quelconque par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Je poserai

$$z=Ty,$$

T étant une fonction connue quelconque d'une nouvelle variable t. J'aurai

$$\frac{dz}{dx}=p=\mathrm{T}\frac{dy}{dx},\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{\mathrm{T}},$$

$$\frac{dz}{dt}=q=\frac{d\mathrm{T}}{dt}y,\quad \text{d'où}\quad y=q:\frac{d\mathrm{T}}{dt}.$$

Je porte ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y dans l'équation (1), qui devient ainsi une équation aux différences partielles de z, mais qui ne contient pas cette fonction, savoir

$$(2)\qquad \varphi(x,t,p,q)=0.$$

Or Lagrange a fait dépendre l'intégration de l'équation (2) de celle des équations aux différences partielles simultanées

$$(3)\qquad \frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dq}\frac{dp}{dt}=-\frac{d\varphi}{dx},$$

$$(4)\qquad \frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dq}\frac{dq}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt},$$

dans lesquelles p et q désignent deux fonctions des variables indépendantes x et t. Ces deux fonctions p et q doivent satisfaire en outre à la condition $dz=pdx+qdt$, ou vérifier les relations

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dt}=q.$$

Si on pose les équations

$$(5)\qquad \frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}}=\frac{dt}{\frac{d\varphi}{dq}}=\frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx}}=\frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dt}},$$

et qu'on en tire deux intégrales particulières

$$(6)\qquad f_1(x,t,p,q)=a_1,\quad f_2(x,t,p,q)=a_2,$$

dont l'équation (2) ne soit pas un cas particulier, et a_1, a_2 étant deux constantes arbitraires, le système de ces deux intégrales constituera une intégrale particulière des équations (3) et (4); car on peut vérifier qu'elles fournissent des valeurs de $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dt}$, qui satisfont aux équations (3) et (4).

D'ailleurs on a aussi

$$(7)\qquad \frac{dpdx+dqdt-dpdx-dqdt}{\frac{d\varphi}{dp}dp+\frac{d\varphi}{dq}dq+\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dt}dt}=\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}}=\ldots,$$

et comme le numérateur du premier des rapports égaux (7) est nul, le dénominateur du même rapport,

$$\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq + \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dt}dt,$$

doit être nul aussi. Ce qui fait voir que l'équation (2) est aussi une intégrale particulière des équations (5).

On a en outre

$$(8) \qquad p = \mathrm{T}\frac{dy}{dx}; \quad q = \frac{d\mathrm{T}}{dt}y;$$

par conséquent, si, entre les équations (2), (6) et (8), on élimine p, q, t et $\frac{dy}{dx}$, on aura une relation entre x, y et deux constantes arbitraires

$$(9) \qquad f(x,y,a_1,a_2) = 0,$$

qui devra renfermer comme cas particulier l'intégrale de l'équation proposée $\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, et qui deviendra cette intégrale, si on établit entre les constantes une relation convenable.

Cette relation doit être telle que si on différentie $f(x,y,a_1,a_2) = 0$ pour en tirer $\frac{dy}{dx}$, et porter cette dérivée de y dans l'équation proposée $\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, on trouve une identité. Donc l'équation (1), après qu'on aura effectué ces opérations, se changera en une équation entre les deux constantes a_1, a_2, seulement, qui sera la relation cherchée.

On voit qu'on pourra obtenir par cette méthode l'intégrale d'une équation différentielle donnée, chaque fois qu'on pourra obtenir deux intégrales particulières du système

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}} = \frac{dt}{\frac{d\varphi}{dq}} = \frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dt}},$$

et distinctes de $\varphi(x, t, p, q) = b$.

On choisira la fonction T de manière à faciliter les intégrations. J'ai pris ordinairement $\mathrm{T} = t$, ou $\mathrm{T} = e^t$.

2° *Premier exemple :* Intégration de l'équation

$$\frac{dy^n}{dx^n} + by^n = e^{ax}.$$

Je fais

$$z = ye^t,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = pe^{-t},\ y = qe^{-t}.$$

L'équation proposée devient ainsi

$$p^n + bq^n = e^{ax+nt}.$$

Je poserai ensuite

$$\frac{dx}{np^{n-1}} = \frac{dq}{nbq^{n-1}} = \frac{dp}{ae^{ax+nt}} = \frac{dq}{ne^{ax+nt}},$$

équations d'où l'on tire

$$dp = \frac{adq}{n}, \quad \text{puis} \quad p = \frac{aq+c}{n},$$

c étant une constante.

J'ai aussi

$$\frac{pdx + qdt}{n(p^n + bq^n)} = \frac{dq}{ne^{ax+nt}},$$

d'où

$$pdx + qdt = dq.$$

On peut éliminer pdx, car

$$pdx = \frac{p^n dt}{bq^{n-1}} = \frac{(aq+c)^n dt}{bq^{n-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{(aq+c)^n}{n^n bq^{n-1}} dt + qdt = dq,$$

$$dt = \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n bq^n},$$

et

$$t = \int \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n bq^n},$$

la constante arbitraire étant renfermée sous le signe $\int$.

Alors, remplaçant dans $p^n + bq^n = e^{ax+nt}$, p et t par leurs valeurs en fonction de q, on aura

$$(1) \qquad \frac{(aq+c)^n}{n^n} + bq^n = e^{ax+n} \int \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n bq^n},$$

ce qui donne une relation entre x et q.

On a aussi

$$y = qe^{-t},$$

d'où

$$(2) \qquad y = qe^{-\int \frac{n^n b q^{n-1} dq}{(aq+c)^n + \ldots {}^n b q^n}},$$

ce qui donne une relation entre y et q. Il n'y aura plus qu'à éliminer q entre (1) et (2) pour avoir l'intégrale demandée. On peut aussi regarder les équations (1) et (2) comme représentant cette intégrale, et la question est ramenée à de simples quadratures.

3° *Deuxième exemple* : Intégration de

$$A\frac{dy^n}{dx^n} + A_1 X y \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + A_2 X^2 y^2 \frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + A_{n-1} X^{n-1} y^{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n X^n y^n = 0,$$

où X représente une fonction quelconque de la variable x, et $A, A_1, A_2, \ldots, A^{n-1}, A_n$ des nombres quelconques.

Je fais

$$z = ye^t,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = pe^{-t},\ y = qe^{-t}.$$

Par là il vient

$$(1) \qquad Ap^n + A_1 X p^{n-1} q + A_2 X^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + A_{n-1} X^{n-1} p q^{n-1} + A_n X^n q^n = 0.$$

Je pose

$$\frac{dx}{nAp^{n-1} + (n-1)A_1 X p^{n-2} q + \ldots + A_{n-1} X^{n-1} q^{n-1}}$$
$$= \frac{dt}{A_1 X p^{n-1} + 2A_2 X^2 p^{n-2} q + \ldots + nA_n X^n q^{n-1}}$$
$$= \frac{-dp}{X'(A_1 p^{n-1} q + 2A_2 X p^{n-2} q^2 + \ldots + nA_n X^{n-1} q^n} = \frac{-dq}{0}.$$

On voit d'abord que

$$pdx + qdt = 0,$$

que

$$\frac{qdt}{X} = -\frac{dp}{X'},$$

d'où $pdx = \frac{Xdp}{X'}$, et, par suite, $p = cmX$, c étant une constante arbitraire, et m une racine de l'équation

$$(2) \qquad Au^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n = 0.$$

On a aussi $dq = 0$, d'où $q = c_1$, c_1 étant une nouvelle constante. Ces valeurs de p et q, portées dans l'équation (1), donnent

$$Ac^n m^n X^n + A_1 c^{n-1} c_1 X^n m^{n-1} + \ldots + A_{n-1} c c_1^{n-1} m X^n + A^n c_1^n X^n = 0,$$

ou

$$A\left(\frac{c}{c_1}\right)^n m^n + A\left(\frac{c}{c_1}\right)^{n-1} m^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\left(\frac{c}{c_1}\right) m + A_n = 0,$$

d'où l'on voit que $c = c_1$.

D'autre part, l'équation $pdx + qdt = 0$, si l'on tient compte des résultats obtenus, devient

$$cdt = -pdx = -cmXdx,$$

d'où

$$t = -m\int Xdx, \quad e^t = e^{-m\int Xdx}.$$

Comme $y = qe^{-t}$, on a

$$y = ce^{m\int Xdx}.$$

Nous pouvons supposer la constante qui doit accompagner $\int X\,dx$ contenue dans c; je vois donc que $m = \dfrac{\log \frac{y}{c}}{\int X\,dx}$.

Enfin, m étant une racine de l'équation (2), j'ai pour l'intégrale demandée

$$A\left(\frac{\log \frac{y}{c}}{\int Xdx}\right)^n + A_1\left(\frac{\log \frac{y}{c}}{\int Xdx}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\frac{\log \frac{y}{c}}{\int Xdx} + A_n = 0.$$

On peut arriver plus simplement à ce résultat. On pose

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = myX,$$

et l'on voit que cette valeur de $\dfrac{dy}{dx}$ satisfera à l'équation proposée, si m est racine de l'équation (2). Or, en intégrant l'équation (3), on trouve

$$y = ce^{m\int Xdx},$$

d'où $m = \dfrac{\log \frac{y}{c}}{\int X\,dx}$; et cette valeur de m, portée dans (2), donnera l'intégrale cherchée. C'est celle que nous avons trouvée.

4° *Remarque.* — Si l'on a

$$A\frac{dy^n}{dx^n}+A_1f(x,y)\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}+A_2f(x,y)^2\frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}}+\ldots+A_{n-1}f(x,y)^{n-1}\frac{dy}{dx}+A_nf(x,y)^n=0,$$

on fera $\frac{dy}{dx}=mf(x,y)$, m étant une racine de

$$Au^n+A_1u^{n-1}+A_2u^{n-2}+\ldots+A_{n-1}u+A_n=0\,;$$

et si l'on sait intégrer $\frac{dy}{dx}=mf(x,y)$, on aura une équation entre x, y, m et une constante arbitraire. L'élimination de m entre cette équation et la suivante

$$Am^n+A_1m^{n-1}+A_2m^{n-2}+\ldots+A_{n-1}m+A_n=0,$$

donnera l'intégrale de l'équation proposée.

Si, par exemple, on a

$$A\frac{dy^n}{dx^n}+A_1\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n=0,$$

on posera $\frac{dy}{dx}=m$, d'où $y-c=mx$ et $m=\frac{y-c}{x}$, et l'intégrale demandée sera

$$A\left(\frac{y-c}{x}\right)^n+A_1\left(\frac{y-c}{x}\right)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\frac{y-c}{x}+A_n=0.$$

QUESTIONS

Trouver tous les couples de courbes qui jouissent de la propriété suivante : D'un point quelconque de l'espace, les deux courbes paraissent se couper à angle droit? (Mannheim.)

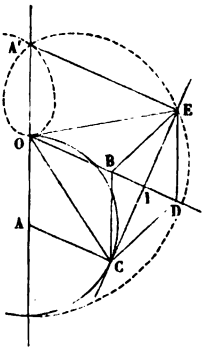
Étant donnée une courbe dont on connaît le degré, la classe et les singularités, étudier le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes égales. Déterminer son degré, sa classe et ses singularités.

Même question, les tangentes égales étant menées à deux courbes distinctes. (Laguerre.)

Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant; par M. H. Brocard.

(Séance du 31 mars 1875)

A l'occasion d'un récent mémoire que j'ai publié, relatif à *Divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle*, mémoire que j'ai l'honneur de présenter à la Société mathématique, M. Laisant m'a fait connaître un moyen très-ingénieux de diviser un angle quelconque en trois parties égales, en se servant d'un compas articulé, d'une construction très-simple, ainsi que l'on en pourra juger.



Soient OABC, BEDC, deux losanges articulés, OBD une tige rigide sur laquelle l'articulation D peut glisser. Comme la diagonale CE est divisée en deux parties égales au point I, et qu'elle est perpendiculaire à OD, on en conclut que les angles IOC, IOE sont égaux. Mais le point C se trouve sur la bissectrice OC de l'angle IOA, ainsi l'angle COA est égal aux deux autres angles, et par suite l'angle EOA est divisé en trois parties égales par les droites OI, OC.

Menons EA′ parallèle à OI et par suite perpendiculaire à IE. Comme IE = IC, OA′ = OA; mais le lieu du point C est une circonférence ayant A pour centre et CE pour tangente au point C. Le lieu du point E est donc la *podaire* de cette circonférence, le point A′ étant le point fixe. Ce lieu est donc un *limaçon de Pascal.*

On peut rapprocher de ces remarques celles que M. Jouanne a exposées dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (2e série, t. IX, année 1870, p. 40). Voici, en effet, ce que dit M. Jouanne :

Pour diviser l'angle EOA en trois parties égales, de part et d'autre du point O, l'on prend sur OA et sur son prolongement OA′ deux longueurs OA, OA′ égales. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on trace une circonférence, dont la *podaire* par rapport au point A′ est un *limaçon de Pascal.* Du point E, où le côté OE rencontre cette courbe, on mène une tangente EC à la circonférence. La ligne CO, qui joint le sommet de l'angle au point de contact, forme l'angle $COA = \frac{EOA}{3}$.

En effet, le point E étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point A′ sur la tangente EC, les lignes EA′, OI, AC sont parallèles, et comme OA = O′A, on a aussi CI = IE. Mais les angles IOC, OCA sont égaux, de plus OCA = COA. Ainsi IOC = COA. De plus, IOC = IOE = OEA′. Donc COA est bien le tiers de EOA.

M. Peaucellier a fait connaître, dans les *Nouvelles annales* (2e série, t. XII, année 1873, p. 77), une série de compas articulés, dont l'un peut servir au tracé géométrique du *limaçon de Pascal*, en le considérant comme la *courbe réciproque d'une section conique*. Ces systèmes articulés fournissent ainsi une solution de la *trisection de l'angle*.

Néanmoins, dans la question spéciale que nous avons en vue, le *compas trisecteur* de M. Laisant me paraît préférable à toute autre combinaison, et il donne une solution tout à fait pratique de la *trisection de l'angle*, dans les mêmes conditions que celles où le compas ordinaire donne la bissection de l'angle ou de l'arc.

Il sera très-facile de réaliser un compas trisecteur, en réduisant à ses pièces essentielles le système articulé proposé par M. Laisant. On conservera les deux losanges articulés OBAC, BCDE et l'articulation à glissière D, mobile sur la règle OD.

Le compas trisecteur dont je viens de donner la description méritait, comme on le voit, une mention spéciale, et c'est pourquoi j'ai cru devoir le faire connaître à la Société mathématique, en le signalant à toute son attention.

Voici enfin, au sujet de la question, un détail historique d'un certain intérêt :

La trisection de l'angle au moyen du *limaçon de Pascal* fait l'objet d'un opuscule, publié à Paris en 1809, intitulé : *Trisection de l'angle*, par Azémar, suivie de *Recherches analytiques sur le même sujet*, par Garnier. L'auteur emploie uniquement le *limaçon de Pascal*, sans donner ce nom à la courbe trisectrice. Il en fait une description très-détaillée, dans l'étude analytique de laquelle on trouve les équations en coordonnées rectilignes et polaires, ainsi que la valeur du rayon de courbure, de l'arc et de la surface. Il fait connaître aussi l'énoncé et la démonstration d'une propriété du cercle, découverte par Archimède, et qui a mis sur la voie des recherches. Cette propriété n'est autre que celle qui est rappelée dans l'extrait de l'article de M. Jouanne.

Mémoire sur la transformation des formes quadratiques;
par M. H. Lemonnier.

(Séance du 11 novembre 1874)

Les traités de géométrie analytique indiquent, pour les coordonnées ordinaires et celles qui en sont des fonctions linéaires, à quelles conditions les équations de deux droites ou de trois plans donnent deux diamètres conjugués d'une conique, trois plans diamétraux conjugués d'une surface du

second degré. Nous n'avons rencontré nulle part l'équation de la ligne ou de la surface exprimée au moyen de celles de deux diamètres conjugués ou de trois plans diamétraux conjugués quelconques.

C'est pourquoi on accueillera, je l'espère, avec quelque intérêt les développements qui suivent, sur certaines transformations d'une forme quadratique.

Le premier problème que nous traitons est celui de passer d'une forme connue en carrés qui soient indépendants les uns des autres à toute autre forme analogue, s'exprimant par les carrés de fonctions données, linéaires par rapport à celles qui entrent dans la première forme. La question est alors d'établir, entre les coefficients de ces fonctions linéaires, des relations nécessaires et suffisantes, et de trouver les facteurs dont les carrés doivent être affectés. Nous traitons en second lieu du problème de passer d'une forme en produits sans carrés, puis de la forme générale, à toute forme possible en carrés, dans des conditions analogues à celles du premier problème. Quant à la transformation d'une somme de carrés en une somme de produits sans carrés, ou de celle d'une somme de produits, nous nous bornons au cas où la première forme dépend seulement de trois fonctions, les formules se compliquant au delà de ce nombre.

Nous terminons la première partie de ce travail par une démonstration fort simple du théorème de M. Hermite sur le maintien de l'espèce, et par l'établissement de ce fait général qu'une forme du second degré à n variables, $\sum a_{ij}x_ix_j$, est réductible à la somme de p carrés, lorsque $n-p$ des dérivées partielles sont des fonctions linéaires des autres.

I

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions de variables, linéaires ou autres, ou plutôt des expressions quelconques susceptibles chacune d'une valeur arbitraire, et soient considérées n fonctions linéaires de ces quantités :

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} u_k,$$

ε_k étant ± 1.

La formule

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

a lieu, n'est même qu'une identité, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et que les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

soient satisfaites avec

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{ki}^2.$$

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

la valeur de U_i étant

$$(2) \qquad U_i = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} u_k.$$

La formule (1) a lieu identiquement, si l'on a pour toutes valeurs, depuis 1 jusqu'à n,

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}^2}{H_k} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Il y a là $\frac{n(n+1)}{2}$ relations entre les dénominateurs H_i et les coefficients m_{ij}.

En prenant, par rapport à u_i, les dérivées de (1), on trouve

$$u_i = \frac{U_1 m_{1i}}{H_1} + \frac{U_2 m_{2i}}{H_2} + \ldots + \frac{U_n m_{ni}}{H_n};$$

si l'on multiplie par m_{ki} et qu'on fasse la somme de, $i = 1$ à $i = n$, on obtient

$$U_k = \frac{U_1}{H_1} \sum_{i=1}^{i=n} m_{1i} m_{ki} + \frac{U_2}{H_2} \sum_{i=1}^{i=n} m_{2i} m_{ki} + \ldots + \frac{U_n}{H_n} \sum_{i=1}^{i=n} m_{ni} m_{ki},$$

ce qui donne

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0,$$

et

$$(4) \qquad H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

si les U_i sont, comme les u_i, indépendants les uns des autres.

Or les n équations (2) déterminent pour $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des valeurs finies,

quand on donne à $U_1, \ldots, U_n$ telles valeurs finies qu'on veut, si le déterminant des coefficients m_{ik}

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. On peut donc, à cette condition, faire que, par des valeurs convenables de $u_1, \ldots, u_n$, les fonctions U_i prennent des valeurs arbitraires, indépendantes les unes des autres. Moyennant cela, les relations (3) entraînent donc les relations (4).

Réciproquement, étant donné les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations qu'implique la relation générale

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

si l'on prend

$$(4) \qquad H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

on aura la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

pourvu que le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Observons d'abord que l'on a

$$M^2 = \begin{vmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

avec

$$M_{kk} = m_{k1}^2 + m_{k2}^2 + \ldots + m_{kn}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2 = H_k,$$

et

$$M_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k).$$

de sorte que

$$M^2 = H_1 H_2 \dots H_n. \tag{5}$$

On voit par là que si M n'est pas nul, il en est de même de $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Posons les n équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{ik}\alpha_i = A_k. \tag{6}$$

Puisque le déterminant M est différent de zéro, on pourra, en disposant arbitrairement des A_k, obtenir des valeurs finies correspondantes pour α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, et, par conséquent, en attribuant à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des valeurs convenables, on aura pour $A_1, \dots, A_n$ telles valeurs finies qu'on voudra.

Or, si l'on multiplie par $m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kn}$ les n équations (6) et qu'on ajoute, on obtient

$$H_k \alpha_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} A_i,$$

d'où

$$\alpha_k = \frac{1}{H_k} \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} A_i. \tag{7}$$

On a ainsi n équations nouvelles qui, multipliées par $m_{1h}, m_{2h}, \dots, m_{nh}$ et ajoutées, donnent

$$A_h = A_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{i1}}{H_i} + A_2 \sum_{i=1}^{i=2} \frac{m_{ih} m_{i2}}{H_i} + \dots + A_n \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{in}}{H_i}$$

De là résulte

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i} = 1;$$

ce sont les formules (3).

On a donc la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

du moment que M est différent de zéro, quand on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi}^2 = H_h.$$

Il est à remarquer que, d'après cette analyse, les deux groupes de formules s'exprimant l'un par

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

l'autre par

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i} = 1,$$

pour

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

sont équivalents à la seule condition que le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Si l'on change u_i en $u_i\sqrt{\varepsilon_i}$, m_{ki} en $m_{ki}\sqrt{\varepsilon_i}$, ε_i étant ± 1, la formule (1) devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

pour

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} u_k,$$

et, à la place des formules (4), on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (h \gtrless k),$$

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{ki}^2;$$

à la place des formules (3)

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}^2}{H_k},$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k} \qquad (i \gtrless j);$$

on a d'ailleurs

$$M^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} = H_1 H_2 \ldots H_n.$$

Dans cette transformation d'une somme de carrés en une autre, quand les fonctions sont réelles, l'espèce se conserve, c'est-à-dire que le nombre des carrés affectés de coefficients négatifs reste le même. C'est un théorème dont la première démonstration est due à M. Hermite (*Cours d'algèbre supérieure* par J. A. Serret, n° 254, 2e édit.). Il peut s'établir avec plus de simplicité comme il suit.

Considérons la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

en y supposant réelles les fonctions u_i et, par suite, les H_i. Supposons qu'on ait là

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots\ldots = \varepsilon_p = 1,$$
$$\varepsilon_{p+1} = \varepsilon_{p+2} = \ldots\ldots = \varepsilon_n = -1,$$

et, d'autre part,

$$H_1 > 0,\ H_2 > 0,\ \ldots,\ H_q > 0,$$
$$H_{q+1} < 0,\ \ldots\ldots\ldots,\ H_n < 0.$$

Soit d'abord $q > p$. Si l'on pose

$$U_{q+1} = 0,\quad U_{q+2} = 0,\quad \ldots,\ U_n = 0,$$

on pourra généralement tirer de ces équations, pour $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_n$, des valeurs en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_q$. La substitution de ces valeurs dans $\sum \varepsilon_i u_i^2$ n'atteindra pas le terme négatif $\varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2$. Si l'on fait ensuite $u_1 = 0,\ u_2 = 0, \ldots, u_p = 0$, le premier membre de la formule ne sera susceptible que de valeurs négatives, tandis que le second n'ayant plus que des termes positifs sera d'un signe contraire. On ne peut donc avoir $q > p$.

Soit en second lieu $q < p$. Si l'on pose alors

$$U_1 = 0,\quad U_2 = 0,\quad \ldots,\ U_q = 0,$$

et qu'on tire de là $u_1, u_2, \ldots, u_q$ en fonction de $u_{q+1}, \ldots, u_n$, pour en substituer les valeurs dans le premier membre, la substitution n'atteindra pas le terme positif $\varepsilon_q u_q^2$. On pourra donc faire que le premier membre soit d'une valeur positive, tandis que le second n'ayant que des termes négatifs ne pourra avoir le même signe.

On ne saurait donc avoir $q < p$. Donc les termes négatifs sont en même nombre des deux côtés.

Dans ce mode de démonstration, nous supposons bien deux déterminants mineurs différents de zéro ; mais un cas d'exception ne peut là faire difficulté, car il serait à considérer comme limite du cas général.

Des conditions à remplir pour qu'une forme quadratique, homogène, de n variables

$$\sum a_{ij} x_i x_j \qquad (a_{ij} \gtrless a_{ji})$$

soit réductible à être une somme de p carrés ; $p < n$.

Soit posé

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{i=p} A_i U_i^2 \qquad (p \gtrless n),$$

U_i étant une fonction linéaire homogène des variables x_k.

Posons $U_i = 0$ pour les p valeurs de i, et tirons de ces équations les valeurs de p des variables en fonction des autres. Si ces valeurs se substituent dans la forme, elle deviendra nulle, quelles que soient les valeurs attribuées aux $n - p$ autres variables.

Il en sera de même pour toute derivée partielle de la fonction $2\sum A_i U_i \frac{dU_i}{dx_k}$. D'après quoi, si l'on égale à zéro p des n dérivées de la forme par rapport aux variables, et qu'on tire des p équations les valeurs de p des variables en fonctton des autres, la substitution de ces valeurs dans les autres dérivées conduira à des résultats nuls, quelles que soient les valeurs attribuées à ces autres variables.

Réciproquement, la fonction du second degré est une somme de p carrés, lorsque les valeurs de p des variables tirées des équations qu'on obtient en égalant à zéro p des n dérivées annulent les autres identiquement. Cela revient encore à ce que $n - p$ des dérivées soient des combinaisons linéaires des p autres, alors qu'aucune de celles-ci ne l'est des $p - 1$ autres.

Soient, en effet, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les variables qui s'expriment par les autres au moyen de p dérivées égalées à zéro. L'hypothèse est que les valeurs de ces variables ainsi obtenues annulent toutes les dérivées, quelques valeurs qu'on attribue à $x_{p+1}, \ldots, x_n$. En général, on pourra façonner la fonction en une somme de carrés, en nombre n au plus, tels que x_1 entre dans le premier seul, x_2 dans le deuxième, sans être dans les suivants, qu'il soit ou non dans le premier, x_3 dans le troisième, sans appartenir à ceux qui le suivent, étant ou non dans les précédents, et ainsi de suite. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_n$ les fonctions dont on a ainsi les carrés, abstraction faite des coefficients.

Prenons les dérivées de la forme par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La pre-

mière ne dépendra que de X_1, la deuxième de X_1 et de X_2, la troisième de X_1, X_2, X_3, etc., et elles en seront des fonctions linéaires. Or les expressions des p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonction des autres qui annulent les dérivées, pour toutes valeurs de ces dernières variables, annuleront alors X_1, et par suite X_2, puis X_3, etc., jusqu'à X_p, ainsi que $X_{p+1}, \ldots, X_n$. Mais ces dernières fonctions étant indépendantes des p variables en question, c'est identiquement qu'elles sont nulles, sans aucune substitution. Donc la forme quadratique est la somme de p carrés. Elle pourra d'ailleurs se transformer d'autre façon en somme de p carrés.

C'est ainsi qu'une forme quadratique est réductible à un seul carré, quand la valeur d'une variable tirée d'une dérivée égalée à zéro annule toutes les autres, ou, ce qui revient au même, quand les dérivées sont proportionnelles à des constantes. Sous ce dernier énoncé, le théorème, du reste, s'étend à une fonction homogène quelconque de plusieurs variables de degré K, en ce qu'elle est alors la puissance du degré K d'une fonction linéaire des variables.

II

Proposons-nous d'abord de transformer

$$2\sum u_i u_j$$

en $\sum \frac{U_k^2}{H_k}$, alors que les nombres k, i et j sont variables de 1 à n, i se prenant plus petit que j.

Soit posé

$$(1) \qquad 2\sum u_i u_j = \sum \frac{U_k^2}{H_k}$$

pour

$$(2) \qquad U_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} u_i.$$

La formule (1), comme identité, implique les relations

$$(3) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i}$$

et

$$(3) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} \qquad (h \gtrless k).$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à u_i, on obtient

$$(4) \qquad \sum u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k} \qquad (j \gtrless i).$$

Comme i est susceptible de n valeurs $1, 2, \ldots, n$, il y a n formules de ce genre. Multiplions-les par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et ajoutons ; il s'ensuit

$$(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)u_1 + (\lambda_3 + \ldots + \lambda_n + \lambda_1)u_2 + \ldots + (\lambda_1 + \ldots \lambda_{n-1})u_n$$
$$= \frac{U_1}{H_1}\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k m_{1k} + \frac{U_2}{H_2}\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k m_{2k} + \ldots.$$

Or, si l'on pose

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \ldots + \lambda_n &= m_{h1}, \\ \lambda_3 + \ldots + \lambda_1 &= m_{h2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} &= m_{hn}, \end{aligned}$$

on a, par l'addition,

$$(n-1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = \sum_{k=1}^{k=n} m_{hk} = S_h,$$

ou

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \frac{1}{n-1} S_h,$$

par suite

$$\lambda_i = \frac{1}{n-1} S_h - m_{hi},$$

et la formule S devient

$$U_h = \frac{U_1}{H_1}\sum_{k=1}^{k=n} m_{1k}\left(\frac{1}{n-1} S_h - m_{hk}\right) + \frac{U_2}{H_2}\sum_{k=1}^{k=n} m_{2k}\left(\frac{1}{n-1} S_h - m_{hk}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{U_n}{H_n}\sum_{k=1}^{k=n} m_{nk}\left(\frac{1}{n-1} S_h - m_{hk}\right),$$

ce qui peut se changer en

$$U_h = \frac{U_1}{H_1}\left(\frac{S_h S_1}{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} m_{1k} m_{hk}\right) + \frac{U_2}{H_2}\left(\frac{S_h S_2}{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} m_{2k} m_{hk}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{U_n}{H_n}\left(\frac{S_h S_n}{n-1} - \sum_{k=1}^{k=n} m_{nk} m_{hk}\right).$$

Il en résulte

$$(7) \qquad H_h = \frac{1}{n-1} S_h^2 - \sum_{k=1}^{k=n} m_{hk}^2,$$

et

$$(7) \qquad 0 = \frac{1}{n-1} S_h S_i - \sum_{k=1}^{k=n} m_{hk} m_{ik} \qquad (h \gtrless 1).$$

Nous trouvons ainsi, avec les expressions de H_h, $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (7).

Réciproquement, ces relations (7), eu égard aux expressions H_h, entraî-

nent les relations (3), et par conséquent la formule (1), si les H_h et le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro.

Posons en effet

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{kh}\alpha_k = A_h,$$

h étant susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Si l'on multiplie les n égalités par $\frac{1}{n-1} S_g - m_{g1}, \ldots, \frac{1}{n-1} S_g - m_{gn}$, et qu'on ajoute, on obtient

$$H_g\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left(\frac{1}{n-1} S_g - m_{gi}\right),$$

d'où

$$\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{H_g}\left(\frac{1}{n-1} S_g - m_{gi}\right).$$

Considérons les égalités de ce genre répondant à $g = 1, 2, \ldots, n$, multiplions-les par $m_{1h}, m_{2h}, \ldots, m_{nh}$ et ajoutons les résultats; il s'ensuit

$$A_h = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{kh}}{H_k}\left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{ki}\right)\right\}.$$

Comme, d'après les hypothèses faites, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont susceptibles de telles valeurs qu'on veut, cette égalité se partage en

$$1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{kh}}{H_k}\left(\frac{1}{n-1} S_n - m_{hk}\right),$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}}{H_k}\left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{kj}\right) \qquad (i \gtrless j).$$

Or, si l'on pose

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}m_{kj}}{H_k},$$

ces n relations peuvent s'écrire

$$1 = \frac{1}{n-1}\left(M_{h1} + M_{h2} + \ldots + M_{h,h-1} + M_{h,h+1} + \ldots + M_{hn}\right) - \frac{n-2}{n-1} M_{hh},$$

$$0 = -\frac{n-2}{n-1} M_{h1} + \frac{1}{n-1}\left(M_{h2} + M_{h3} + \ldots M_{hn}\right) - \frac{1}{n-1} M_{hh},$$

$$0 = -\frac{n-2}{n-1} M_{h2} + \frac{1}{n-1}\left(M_{h1} + M_{h3} + \ldots + M_{hn}\right) + \frac{1}{n-1} M_{hh},$$

. . . . . .,

M_{hh} manquant dans la parenthèse.

En soustrayant de la première relation chacune des autres, on a, à la place de celles-ci,

$$1 = M_{h1} - M_{hh},$$
$$1 = M_{h2} - M_{hh},$$
$$\ldots\ldots,$$

d'où, par l'addition,

$$n - 1 = (M_{h1} + M_{h2} + \ldots + M_{hn}) - (n-1)M_{hh}.$$

La première relation étant

$$n - 1 = (M_{h1} + M_{h2} + \ldots + M_{hn}) - (n-2)M_{hh},$$

il s'ensuit

$$M_{hh} = 0$$

et

$$M_{hi} = 1 \qquad (h \gtrless i).$$

Les relations (3) sont ainsi obtenues.

Les relations (3) et les relations (7) sont, en conséquence, équivalentes, eu égard à la valeur générale de H_h et aux conditions exprimées.

En second lieu, soit proposé de transformer

$$2\sum a_{ij}u_iu_j,$$

alors que i est différent de j en $\sum \frac{U_k^2}{H_k}$, les u_i étant indépendants les uns des autres, ainsi que les U_k.

Soit posé

$$(1) \qquad 2\sum a_{ij}u_iu_j = \sum \frac{U_k^2}{H_k}$$

pour

$$(2) \qquad U_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}u_i;$$

c'est avoir

$$(3) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i},$$

$$(3) \qquad a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}m_{ik}}{H_i} \qquad (h \gtrless k).$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à u_i, on trouve

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki}\frac{U_k}{H_k},$$

j étant différent de i, ou $a_{ii} = 0$.

Comme i est susceptible des n valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, il y a n équations de ce genre. Multiplions-les par $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \ldots, \lambda_{hn}$ et ajoutons ; il s'ensuivra

$$(5) \qquad U_h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i}{H_i}\left(\sum_{k=1}^{k=1} \lambda_{hk} m_{ik}\right),$$

en posant

$$(6) \quad a_{1i}\lambda_{h1} + a_{2i}\lambda_{h2} + \ldots + a_{i-1,i}\lambda_{h,i-1} + a_{i+1,i}\lambda_{h,i+1} + \ldots + a_{ni}\lambda_{hn} = m_{hi},$$

i variable de 1 à n.

Ces équations (6) donnent

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta\lambda_{hi} = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \ldots & m_{hi} & \ldots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & m_{hn} & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

et l'équation (5) se partage en

$$(7) \qquad H_h = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{hi},$$

$$(7) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{ki} \qquad (h \gtrless k),$$

de sorte qu'avec les expressions de H_h, il y a là $\frac{n(n-1)}{2}$ relations.

Réciproquement, ces relations, en ayant égard aux expressions des H_h, entraînent les relations (3), par suite la formule (1), si les H_h et le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{nn} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro.

Posons, en effet,

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{hk}\alpha_k = A_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

et multiplions ces égalités par $\lambda_{g1}, \lambda_{g2}, \ldots, \lambda_{gn}$, puis ajoutons ; nous aurons

$$H_g \alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \lambda_{gi},$$

d'où

$$\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \frac{\lambda_{gi}}{H_g};$$

et de là, en faisant $g = 1, 2, \ldots, n$ et multipliant par $m_{1h}, m_{2h}, \ldots,$

$$A_h = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{hk}}{H_k} \lambda_{ki} \right),$$

ce qui se partage en

$$1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}}{H_i} \lambda_{ih},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}}{H_i} \lambda_{ik} \qquad (h \gtrless k),$$

La première de ces deux relations peut se développer moyennant la valeur de λ_{ih} en

$$\alpha_{h1}\beta_{hi} - \alpha_{h2}\beta_{h2} + \ldots \pm \alpha_{hn}\beta_{hn} = \left(\frac{m_{11}m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{21}m_{2h}}{H_2} + \ldots \right) \beta_{h1}$$
$$- \left(\frac{m_{12}m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{21}m_{2h}}{H_2} + \ldots \right) \beta_{h2} + \ldots,$$

ce qui est satisfait par

$$\alpha_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}m_{ih}}{H_i},$$

et

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i}.$$

Il en est de même des autres formules du premier groupe.

La première de celles du second, se développant en

$$0 = \left(\frac{m_{11}m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{21}m_{2h}}{H_2} + \ldots \right) \beta_{h1} - \left(\frac{m_{12}m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{22}m_{2h}}{H_2} + \ldots \right) \beta_{h2} + \ldots,$$

revient également, moyennant les mêmes conditions, à

$$0 = a_{h1}\beta_{h1} - a_{h2}\beta_{h2} + \ldots,$$

ce qui a lieu, h étant différent de k ; et de même pour les autres.

D'ailleurs, il n'y a pas d'autre solution ; car, à prendre pour inconnues les n expressions

$$M_{hh} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}m_{ih}}{H_i},$$

le déterminant des n équations est

$$\delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1} \gtrless 0.$$

La réciproque à établir est ainsi démontrée.

Cette analyse est de tout point applicable à la fonction complète du second degré

$$\sum a_{ij} u_i u_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

i et j variables de 1 à n, sauf à remplacer, dans Δ et $\Delta\lambda_{hi}$, les éléments 0 par $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Car si l'on pose

$$(1) \qquad \sum a_{ij} u_i u_j = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k^2}{H_k},$$

on aura, pour la dérivée par rapport à u_i,

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} u_j = \sum_{k=n}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k}.$$

En multipliant par $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \ldots, \lambda_{hn}$ les n équations de cette sorte, et les ajoutant, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} \lambda_{hk} \right) u_i = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} \left(\sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k} \right),$$

d'où

$$U_h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i}{H_i} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{hk} m_{ik} \right),$$

en déterminant les λ_{hk} par les équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ik} \lambda_{hi} = m_{hk},$$

qui donnent

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta\lambda_{hi} = \begin{vmatrix} a_{11} & m_{h1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & m_{hn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et l'on a par là

$$H_h = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{hi},$$
$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{ki} \qquad (h \gtrless k).$$

Réciproquement, on pourra déduire de ces relations, comme plus haut,

$$a_{kk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i},$$
$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i},$$

et par conséquent la formule (1).

III

Transformation de $u^2 + v^2 + w^2$ *en* $\frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$.

Soit posé

$$(1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$$

pour

$$U = mu + nv + pw,$$
$$V = m'u + n'v + p'w,$$
$$W = m''u + n''v + p''w.$$

Avoir la formule (1) pour toutes valeurs de u, v, w, c'est avoir

$$(2) \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}, \\ 1 &= \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''}, \\ 1 &= \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''}, \end{aligned}$$

et

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + m''n'}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''} &= 0, \\ \frac{np' + pn'}{H} + \frac{n'p'' + p'n''}{H'} + \frac{n''p + p''n}{H''} &= 0, \\ \frac{pm' + mp'}{H} + \frac{p'm'' + m'p''}{H'} + \frac{p''m + m''p}{H''} &= 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2u &= \frac{mV + m'U}{H} + \frac{m'W + m''V}{H'} + \frac{m''U + mW}{H''},\\ 2v &= \frac{nV + m'U}{H} + \frac{n'W + n''V}{H'} + \frac{n''U + nW}{H''},\\ 2w &= \frac{pV + p'U}{H} + \frac{p'W + p''V}{H'} + \frac{p''U + pW}{H''}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par m, n, p et ajoutant,

$$(5)\quad 2U = \frac{(m^2+n^2+p^2)V+(mm'+nn'+pp')U}{H} + \frac{(mm'+nn'+pp')W+(mm''+nn''+pp'')V}{H'} + \frac{(mm''+nn''+pp'')U+(m^2+n^2+p^2)W}{H''},$$

relation qui se partage en

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{mm' + nn' + pp'}{H} + \frac{mm'' + nn'' + pp''}{H''},\\ 0 &= \frac{m^2 + n^2 + p^2}{H} + \frac{mm' + nn'' + pp''}{H'},\\ 0 &= \frac{mm' + nn' + pp'}{H'} + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{H''}, \end{aligned}$$

si U, V, W peuvent être quelconques, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Résolvons ces équations par rapport à $\frac{1}{H}$, $\frac{1}{H'}$, $\frac{1}{H''}$. Le déterminant est

$$\Delta_1 = 2(mm' + nn' + pp')(mm'' + nn'' + pp'')(m^2 + n^2 + p^2),$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} \Delta_1 \frac{1}{H} &= 2(mm'' + nn'' + pp'')(m^2 + n^2 + p^2),\\ \Delta_1 \frac{1}{H'} &= -2(m^2 + n^2 + p^2),\\ \Delta_1 \frac{1}{H''} &= 2(m^2 + n^2 + p^2)(mm' + nn' + pp'), \end{aligned}$$

d'où

$$(7)\qquad \begin{aligned} H &= mm' + nn' + pp',\\ H' &= -\frac{(mm' + nn' + pp')(mm'' + nn'' pp'')}{m^2 + n^2 + p^2}\\ H'' &= mm'' + nn'' + pp''. \end{aligned}$$

A l'aide des facteurs m', n', p', on tire de même des équations (4)

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}' &= m'm'' + n'n'' + p'p'',\\
\mathrm{H}'' &= -\frac{(m'm'' + n'n'' + p'p'')(m'm + n'n + p'p)}{m'^2 + n'^2 + p'^2},\\
\mathrm{H} &= m'm + n'n + p'p,
\end{aligned}$$

et, à l'aide des facteurs m'', n'', p'',

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}'' &= m''m + n''n + p''p,\\
\mathrm{H} &= -\frac{(m''m + n''n + p''p)(m''m' + n''n' + p''p')}{m''^2 + n''^2 + p''^2},\\
\mathrm{H}' &= m''m' + n''n' + p''p'.
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$(8)\qquad \begin{aligned}
\mathrm{H} &= mm' + nn' + pp',\\
\mathrm{H}' &= m'm'' + n'n'' + p'p'',\\
\mathrm{H}'' &= m''m + n''n + p''p,
\end{aligned}$$

et

$$(8)\qquad \begin{aligned}
m^2 + n^2 + p^2 &= -\frac{\mathrm{HH}''}{\mathrm{H}},\\
m'^2 + n'^2 + p'^2 &= -\frac{\mathrm{H}'\mathrm{H}}{\mathrm{H}''},\\
m''^2 + n''^2 + p''^2 &= -\frac{\mathrm{H}''\mathrm{H}'}{\mathrm{H}},
\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^2 &= (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2),\\
\mathrm{H}'^2 &= (m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2),\\
\mathrm{H}''^2 &= (m''^2 + n''^2 + p''^2)(m^2 + n^2 + p^2),
\end{aligned}$$

et

$$-\mathrm{HH}'\mathrm{H}'' = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2).$$

Par suite, il faut

$$(9)\qquad \begin{aligned}
\mathrm{H} &= -\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2},\\
\mathrm{H}' &= -\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\,\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2},\\
\mathrm{H}'' &= -\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2},
\end{aligned}$$

ou bien

$$(9)\qquad \begin{aligned}
\mathrm{H} &= -\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2},\\
\mathrm{H}' &= -\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\,\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2},\\
\mathrm{H}'' &= -\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2},
\end{aligned}$$

chaque radical pouvant d'ailleurs se prendre implicitement avec tel signe qu'on voudra.

Sous forme rationnelle on a donc

$$(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)-(mm'+nn'+pp')^2=0,$$

ou

$$(mn'-m'n)^2+(np'-pn')^2+(pm'-mp')^2=0,\ldots;$$

par où l'on voit que m, n, p ne peuvent être réels à la fois.

Réciproquement, étant données les expressions (8) de H, H', H'' et les relations (9), les formules (2) et (3) en seront les conséquences, par suite la formule (1), si aucune des quantités H, H', H'' n'est nulle, ni le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}.$$

Posons, en effet,

$$(10)\qquad \begin{aligned} m\alpha+m'\beta+m''\gamma&=A,\\ n\alpha+n'\beta+n''\gamma&=B,\\ p\alpha+p'\beta+p''\gamma&=C. \end{aligned}$$

En disposant de α, β, γ, les quantités A, B, C pourront être de toutes valeurs, le déterminant Δ étant différent de zéro.

Multiplions ces équations par m, n, p, puis ajoutons. En tenant compte des relations (8), on trouve

$$-\frac{HH''}{H'}\alpha+H\beta+H''\gamma=mA+nB+pC.$$

On a de même par m', n' p', et par m'', n'', p'',

$$H\alpha-\frac{H'H}{H''}\beta+H'\gamma=m'A+n'B+p'C,$$

$$H''\alpha+H'\beta-\frac{H''H'}{H}m''A+n''B+p''C.$$

Résolvons ces équations par rapport à α, β, γ. Le déterminant est

$$\Delta_1=4HH'H'',$$

et il s'ensuit

$$2\alpha=\frac{m'A+n'B+p'C}{H}+\frac{m''A+n''B+p''C}{H''},$$

$$2\beta=\frac{m''A+n''B+p''C}{H'}+\frac{mA+nB+pC}{H},$$

$$2\gamma=\frac{mA+nB+pC}{H''}+\frac{m'A+n'B+p'C}{H'}.$$

d'où, en multipliant par m, m', m'' et ajoutant, on tire

$$2A = 2\left(\frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}\right)A + \left(\frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''}\right)B$$
$$+ \left(\frac{mp' + m'p}{H} + \frac{m'p'' + p'm''}{H'} + \frac{m''p + p''m}{H''}\right)C,$$

ce qui donne

$$1 = \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''},$$
$$0 = \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''},$$
$$0 = \frac{mp' + m'p}{H} + \frac{m'p'' + m''p'}{H'} + \frac{m''p + np''}{H''}.$$

On obtiendra d'une façon semblable les autres formules (2) et (3).

Remarque. — Quand u, v, w sont des fonctions du premier degré en x, y, z, l'équation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ donne un cône, et les équations $U = 0$, $V = 0$ deux plans passant au sommet du cône. L'intersection des deux plans est sur le cône si l'on a à la fois

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$
$$mu + nv + pw = 0,$$
$$m'u + n'v + pw = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{u}{np' - pn'} = \frac{v}{pm' - mp'} = \frac{w}{mn' - m'n}.$$

puis

$$(np' - pn')^2 + (pm' - mp')^2 + (mn' - m'n)^2 = 0.$$

Les relations (9) ont par là une signification géométrique.

Si l'on change u, v, w en $u\sqrt{\varepsilon}$, $v\sqrt{\varepsilon'}$, $w\sqrt{\varepsilon''}$, m, n, p en $m\sqrt{\varepsilon}$, $n\sqrt{\varepsilon'}$, $p\sqrt{\varepsilon''}$, ε, ε', ε'' étant ± 1, la formule (1) devient

$$\varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + \varepsilon'' w^2 = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

avec

$$U = \varepsilon mu + \varepsilon' nv + \varepsilon'' pw,$$
$$V = \varepsilon m'u + \varepsilon' n'v + \varepsilon'' p'w,$$
$$W = \varepsilon m''u + \varepsilon' n''v + \varepsilon'' p''w.$$

et l'on a

$$H = \varepsilon mm' + \varepsilon' nn' + \varepsilon'' pp',$$
$$H' = \varepsilon m'm'' + \varepsilon' n'n'' + \varepsilon'' p'p'',$$
$$H'' = \varepsilon m''m + \varepsilon' n''n + \varepsilon'' p''p,$$

$$\varepsilon m^2 + \varepsilon' n^2 + \varepsilon'' p^2 = -\frac{HH''}{H'},$$
$$\varepsilon m'^2 + \varepsilon' n'^2 + \varepsilon'' p'^2 = -\frac{H'H}{H''},$$
$$\varepsilon m''^2 + \varepsilon' n''^2 + \varepsilon'' p''^2 = -\frac{H''H'}{H},$$

puis

$$H = -\sqrt{\varepsilon m^2 + \varepsilon' n^2 + \varepsilon'' p^2}\,\sqrt{\varepsilon m'^2 + \varepsilon' n'^2 + \varepsilon'' p'^2},$$
$$H' = -\sqrt{\varepsilon m'^2 + \varepsilon' n'^2 + \varepsilon'' p'^2}\,\sqrt{\varepsilon m''^2 + \varepsilon' n''^2 + \varepsilon'' p''^2},$$
$$H'' = -\sqrt{\varepsilon m''^2 + \varepsilon' n''^2 + \varepsilon'' p''^2}\,\sqrt{\varepsilon m^2 + \varepsilon' m^2 + \varepsilon'' p^2},$$

ou les mêmes expressions avec changement de signe pour H′ et H″, chaque radical impliquant d'ailleurs tel signe qu'on voudra.

Sous forme rationnelle, c'est avoir

$$\varepsilon(np' - pn')^2 + \varepsilon'(pm' - mp')^2 + \varepsilon''(mn' - m'n)^2 = 0,$$
$$\varepsilon(n'p'' - p'n'')^2 + \varepsilon'(p'm'' - m'p'')^2 + \varepsilon''(m'n'' - m''n')^2 = 0,$$
$$\varepsilon(n''p - p''n)^2 + \varepsilon'(p''m - m''p)^2 + \varepsilon''(m''n - mn'')^2 = 0.$$

Les formules (2) deviennent

$$\varepsilon = \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''},$$
$$\varepsilon' = \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''},$$
$$\varepsilon'' = \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''},$$

et les formules (3) restent les mêmes.

IV

Transformation de $uv + vw + wu$ *en* $\frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$.

Soit posé

$$(1) \qquad uv + vw + wu = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

pour

$$U = mu + nv + pw,$$
$$V = m'u + n'v + p'w,$$
$$W = m''u + n''v + p''w,$$

u, v, w étant des quantités indépendantes les unes des autres.

Cette formule implique les relations

$$\frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''} = 0,$$
$$(1) \qquad \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''} = 0,$$
$$\frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''} = 0.$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{mn'+m'n}{H}+\frac{m'n''+n'm''}{H'}+\frac{m''n+mn''}{H''}=1,\\ &\frac{np'+pn'}{H}+\frac{n'p''+p'n''}{H'}+\frac{n''p+p''n}{H''}=1,\\ &\frac{pm'+mp'}{H}+\frac{p'm''+m'p''}{H'}+\frac{p''m+m''p}{H''}=1. \end{aligned}$$

On tire de (1), par dérivation,

$$(4)\qquad \begin{aligned} v+w&=\frac{mV+m'U}{H}+\frac{m'W+m''V}{H'}+\frac{m''U+mW}{H''},\\ w+u&=\frac{nV+n'U}{H}+\frac{n'W+n''V}{H'}+\frac{n''U+nW}{H''},\\ u+v&=\frac{pV+p'U}{H}+\frac{p'W+p''V}{H'}+\frac{p''U+pW}{H''}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par λ, μ, ν et ajoutant,

$$(5)\qquad \begin{aligned} (\mu+\nu)u+(\nu+\lambda)v+(\lambda+\mu)w=&\left\{\lambda\left(\frac{m'}{H}+\frac{m''}{H''}\right)+\mu\left(\frac{n'}{H}+\frac{n''}{H''}\right)+\nu\left(\frac{p'}{H}+\frac{p''}{H''}\right)\right\}U\\ &+\left\{\lambda\left(\frac{m}{H}+\frac{m''}{H''}\right)+\mu\left(\frac{n''}{H'}+\frac{n}{H}\right)+\nu\left(\frac{p''}{H'}+\frac{p}{H}\right)\right\}V\\ &+\left\{\lambda\left(\frac{m}{H''}+\frac{m'}{H'}\right)+\mu\left(\frac{n}{H''}+\frac{n'}{H'}\right)+\nu\left(\frac{p}{H''}+\frac{p'}{H'}\right)\right\}W. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mu+\nu=m,\quad \nu+\lambda=n,\quad \lambda+\mu=p,$$

d'où

$$\lambda=\frac{n+p-m}{2},\quad \mu=\frac{p+m-n}{2},\quad \nu=\frac{m+n-p}{2},$$

on aura, par cette équation (5),

$$(6)\qquad \begin{aligned} 1&=\left(\frac{m'}{H}+\frac{m''}{H''}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{n'}{H}+\frac{n''}{H''}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{p'}{H}+\frac{p''}{H''}\right)\frac{m+n-p}{2},\\ 0&=\left(\frac{m''}{H'}+\frac{m}{H}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{n''}{H'}+\frac{n}{H}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{p''}{H'}+\frac{p}{H}\right)\frac{m+n-p}{2},\\ 0&=\left(\frac{m}{H''}+\frac{m'}{H'}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{n}{H''}+\frac{n'}{H'}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{p}{H''}+\frac{p'}{H''}\right)\frac{m+n-p}{2}. \end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$m'\frac{n+p-m}{2}+n'\frac{p+m-n}{2}+p'\frac{m+n-p}{2}=[mm']=[m'm],$$

c'est aussi

$$\frac{1}{2}(m'+n'+p')(m+n+p)-(mm'+nn'+pp')=\frac{1}{2}SS'-(mm'+nn'+pp').$$

On aura de même

$$[m'm''] = [m''m'] = \frac{1}{2}S''S' - (m'm'' + n'n'' + p'p''),$$

$$[m''m] = [mm''] = \frac{1}{2}SS'' - (m''m + n''n + p''p),$$

$S^{(i)}$ désignant $m^{(i)} + n^{(i)} + p^{(i)}$.

Les équations (6) deviennent par là

$$(6)\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{H}[m'm] + \frac{1}{H''}[m''m], \\ 0 &= \frac{1}{H}[mm'] + \frac{1}{H'}[m''m], \\ 0 &= \frac{1}{H'}[m'm] + \frac{1}{H''}[mm], \end{aligned}$$

et l'on a pareillement

$$(6)'\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{H'}[m''m'] + \frac{1}{H}[mm'], \\ 0 &= \frac{1}{H'}[m'm'] + \frac{1}{H''}[mm'], \\ 0 &= \frac{1}{H''}[m''m'] + \frac{1}{H}[m'm']. \end{aligned}$$

et

$$(6)''\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1}{H''}[mm''] + \frac{1}{H'}[m'm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''}[m''m''] + \frac{1}{H}[m'm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''}[mm''] + \frac{1}{H'}[m''m'']. \end{aligned}$$

Sur ces relations, les trois premières donnent

$$\Delta = 2[mm'][mm''][mm],$$

$$\Delta\frac{1}{H} = [mm''][mm],$$

d'où

$$H = 2[mm'].$$

Par les autres, il vient de même

$$(7)\qquad \begin{aligned} H' &= 2[m'm''], \\ H'' &= 2[m''m]. \end{aligned}$$

Comme l'on a

$$0 = \frac{1}{H}[mm] + \frac{1}{H'}[m''m],$$

il s'ensuit

$$0 = \frac{[mm]}{[mm']} + \frac{[m''m]}{[m'm'']},$$

ou

$$[mm'][mm''] + [m'm''][mm] = 0,$$

et de même

$$(8) \qquad \begin{aligned} [m'm''][m'm] + [m''m][m'm'] &= 0, \\ [m''m][m''m'] + [mm'][m''m''] &= 0. \end{aligned}$$

On peut déduire des deux premières de ces relations

$$[mm']^2 = [mm][m'm'],$$

et l'on a de même

$$(8)' \qquad \begin{aligned} [m'm'']^2 &= [m'm'][m''m''], \\ [m''m]^2 &= [m''m''][mm]. \end{aligned}$$

Ces systèmes (8) et (8)′ sont équivalents, du moment que $[mm']$, $[m'm'']$, $[m''m]$ ou H, H′, H″ sont différents de zéro.

Les relations (8)′ peuvent s'obtenir immédiatement par une autre voie, mais sous une forme différente.

D'après la formule (1), si l'on pose $U = 0$, $V = 0$, il s'ensuit $uv + vw + wu = 0$. On doit donc avoir à la fois

$$\begin{aligned} mu + nv + pw &= 0, \\ m'u + n'v + p'w &= 0, \\ uv + vw + wu &= 0. \end{aligned}$$

De là

$$\frac{u}{np' - pn'} = \frac{v}{pm' - mp'} = \frac{w}{mn' - m'n},$$

puis

$$(np' - pn')(pm' - p'm) + (pm' - mp')(mn' - m'n) + (mn' - nm')(np' - pn') = 0.$$

On a de même

$$\begin{aligned} (n'p'' - p'n'')(p'm'' - m'p'') + (p'm'' - m'p'')(m'n'' - m''n') \\ + (m'n'' - m''n')(n'p'' - p'n'') = 0, \\ (n''p - p''n)(p''m - m''p) + (p''m - m''p)(m''n - mn'') + (m''n - mn'')(n''p - p''n) = 0. \end{aligned}$$

On a d'après cela l'identité

$$\begin{aligned} (np' - pn')(pm' - mp') + (pm' - mp')(mn' - m'n) + (mn' - m'n)(np' - pn') \\ = [mm][m'm'] + [mm']^2 \\ = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (mm' + nn' + pp')^2 \\ + (m + n + p)(m' + n' + p')(mm' + nn' + pp') - \frac{1}{2}(m + n + p)^2(m'^2 + n'^2 + p'^2) \\ - \frac{1}{2}(m' + n' + p')^2(m^2 + n^2 + p^2). \end{aligned}$$

Réciproquement, quand les relations (8) sont satisfaites, les relations (2) et (3) s'ensuivent, pourvu que les expressions (7) de H, H′, H″, ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

soient différents de zéro.

Observons d'abord que ces relations reviennent à

$$[mm] + \frac{1}{2}\frac{HH''}{H'} = 0,$$
$$[m'm'] + \frac{1}{2}\frac{H'H}{H''} = 0,$$
$$[m''m''] + \frac{1}{2}\frac{H''H'}{H} = 0.$$

Posons

$$m\alpha + m'\beta + m''\gamma = 0,$$
$$n\alpha + n'\beta + n''\gamma = 0,$$
$$p\alpha + p'\beta + p''\gamma = 0.$$

Multiplions ces équations par les coefficients de m, n, p dans $[mm]$, et ajoutons; nous aurons

$$-\frac{1}{2}\frac{HH''}{H'}\alpha + [mm']\beta + [mm'']\gamma = A\frac{n+p-m}{2} + B\frac{p+m-n}{2} + C\frac{m+n-p}{2} = G,$$
$$[m'm]\alpha - \frac{1}{2}\frac{H'H}{H''}\beta + [m'm'']\gamma = A\frac{n'+p'-m'}{2} + B\frac{p'+m'-n'}{2} + C\frac{m'+n'-p'}{2} = G',$$
$$[m''m]\alpha + [m''m']\beta - \frac{1}{2}\frac{H''H'}{H}\gamma = A\frac{n''+p''-m''}{2} + B\frac{p''+m''-n''}{2} + C\frac{m''+n''-p''}{2} = G''.$$

Or le déterminant de α, β, γ dans ces nouvelles relations est

$$\Delta = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} -\frac{HH''}{H'} & H & H' \\ H & -\frac{H'H}{H''} & H' \\ H'' & H' & -\frac{H''H'}{H} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}HH'H''.$$

Il est ainsi différent de zéro, si H, H′, H″ le sont eux-mêmes.

On trouve d'ailleurs

$$\Delta\alpha = 2G'[mm''][m'm''] + 2G''[mm'][m''m'],$$
$$\Delta\beta = 2G''[m'm][m''m] + 2G[m'm''][mm''],$$
$$\Delta\gamma = 2G[m''m'][mm'] + 2G'[m''m][m'm].$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}\mathrm{HH'H''A}=\frac{1}{2}\mathrm{G}(m'\mathrm{H'H''}+m''\mathrm{H'H})+\frac{1}{2}\mathrm{G}\,m''\mathrm{H''H}+m\mathrm{H''H'})+\frac{1}{2}\mathrm{G''}(m\mathrm{HH'}+m'\mathrm{HH''}),$$

puis

$$\mathrm{A}=\mathrm{G}\left(\frac{m'}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H''}}\right)+\mathrm{G'}\left(\frac{m''}{\mathrm{H'}}+\frac{m}{\mathrm{H}}\right)+\mathrm{G''}\left(\frac{m}{\mathrm{H''}}+\frac{m'}{\mathrm{H'}}\right).$$

Or si

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, A, B, C sont susceptibles de valeurs quelconques, moyennant des valeurs convenables de α, β, γ. On a donc là une identité, d'où résulte

$$1=\left(\frac{m'}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H''}}\right)\frac{n+p-m}{2}+\left(\frac{m''}{\mathrm{H'}}+\frac{m}{\mathrm{H}}\right)\frac{n'+p'-m'}{2}+\left(\frac{m}{\mathrm{H''}}+\frac{m'}{\mathrm{H'}}\right)\frac{n''+p''-m''}{2};$$

$$0=\left(\frac{m'}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H''}}\right)\frac{p+m-n}{2}+\left(\frac{m''}{\mathrm{H'}}+\frac{m}{\mathrm{H}}\right)\frac{p'+m'-n'}{2}+\left(\frac{m}{\mathrm{H''}}+\frac{m'}{\mathrm{H'}}\right)\frac{p''+m''-n''}{2},$$

$$0=\left(\frac{m'}{\mathrm{H}}+\frac{m''}{\mathrm{H''}}\right)\frac{m+n-p}{2}+\left(\frac{m''}{\mathrm{H'}}+\frac{m}{\mathrm{H}}\right)\frac{m'+n'-p'}{2}+\left(\frac{m}{\mathrm{H''}}+\frac{m'}{\mathrm{H'}}\right)\frac{m''+n''-p''}{2}.$$

On obtiendra de même d'autres formes analogues.

D'après cela, si l'on pose

$$\frac{mm'}{\mathrm{H}}+\frac{m'm''}{\mathrm{H'}}+\frac{m''m}{\mathrm{H''}}=\mathrm{M},$$

$$\frac{nn'}{\mathrm{H}}+\frac{n'n''}{\mathrm{H'}}+\frac{n''n}{\mathrm{H''}}=\mathrm{N},$$

$$\frac{pp'}{\mathrm{H}}+\frac{p'p''}{\mathrm{H'}}+\frac{p''p}{\mathrm{H''}}=\mathrm{P},$$

et

$$\frac{mn'+m'n}{\mathrm{H}}+\frac{m'n''+m''n'}{\mathrm{H'}}+\frac{m''n+mn''}{\mathrm{H''}}=\mu,$$

$$\frac{np'+pn'}{\mathrm{H}}+\frac{n'p''+p'n''}{\mathrm{H'}}+\frac{n''p+pn''}{\mathrm{H}}=\nu,$$

$$\frac{pm'+mp'}{\mathrm{H}}+\frac{p'm''+m'p''}{\mathrm{H'}}+\frac{p''m+m''p}{\mathrm{H''}}=\varpi,$$

les relations précédentes sont

$$1=\frac{\mu}{2}+\frac{\varpi}{2}-\mathrm{M},$$

$$0=\frac{\varpi}{2}-\frac{\mu}{2}+\mathrm{M},$$

$$0=\frac{\mu}{2}-\frac{\varpi}{2}+\mathrm{M},$$

et les analogues sont

$$1 = \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} - N,$$
$$0 = \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} + N,$$
$$0 = \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2} + N,$$

puis

$$1 = \frac{\varpi}{2} + \frac{\nu}{2} - P,$$
$$0 = \frac{\nu}{2} - \frac{\varpi}{2} + P,$$
$$0 = \frac{\varpi}{2} - \frac{\nu}{2} + P.$$

On en déduit

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0,$$
$$\mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \varpi = 0,$$

c'est-à-dire qu'on retrouve les relations (2) et (3).

Au résumé, les relations d'où dépend la transformation

$$uv + vw + wu = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

pour

$$U = mu + nv + pw,$$
$$V = m'u + n'v + p'w,$$
$$W = m''u + n''v + p''w,$$

si l'on pose

$$[m^{(i)}m^{(j)}] = m^{(i)}\frac{n^{(j)} + p^{(j)} - m^{(j)}}{2} + n^{(i)}\frac{p^{(j)} + m^{(j)} - n^{(j)}}{2} + p^{(i)}\frac{m^{(j)} + n^{(j)} - p^{(j)}}{2},$$

consistent en

$$H = 2[mm'], \quad H' = 2[m'm''], \quad H'' = 2[m''m],$$

et

$$[mm] + \frac{1}{2}\frac{H''H}{H'} = 0,$$
$$[m'm'] + \frac{1}{2}\frac{HH'}{H''} = 0,$$
$$[m''m''] + \frac{1}{2}\frac{H'H''}{H} = 0,$$

ou bien

$$[mm][m'm'] - [mm']^2 = 0,$$
$$[m'm'][m''m''] - [m'm'']^2 = 0,$$
$$[m''m''][mm] - [m''m]^2 = 0.$$

Pour la transformation de

$$u^2 + v^2 + w^2 + t^2$$

en

$$\frac{UV}{H} + \frac{UW}{H'} + \frac{UT}{H''} + \frac{VW}{H'''} + \frac{VT}{H^{\text{IV}}} + \frac{WT}{H^{\text{V}}},$$

si l'on a

$$\begin{aligned} H &= mu + nv + pw + qt, & V &= m'u + \ldots + q't \\ W &= m''u + \ldots\ldots + q''t, & T &= m'''u + \ldots + q'''t. \end{aligned}$$

nous nous bornerons à faire observer qu'après avoir obtenu par des dérivations les expressions de $2u$, $2v$, $2w$, $2t$ en fonction de U, V, W, T, on obtient, par des valeurs de 2U, 2V, 2W, 2T, entre autres relations, les suivantes à l'égard de H, H', H'',

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{mm' + nn' + pp' + qq'}{H} + \frac{mm'' + nn'' + pp'' + qq''}{H'} + \frac{mm''' + nn''' + pp''' + qq'''}{H''}, \\
0 &= \frac{m'^2 + n'^2 + p'^2 + q'^2}{H} + \frac{m'm'' + \ldots\ldots + q'q''}{H'} + \frac{m'm''' + \ldots\ldots + q'q'''}{H''}, \\
0 &= \frac{m'm'' + \ldots\ldots + q'q''}{H} + \frac{m''^2 + \ldots\ldots + q''^2}{H'} + \frac{m''m''' + \ldots\ldots + q''q'''}{H''}, \\
0 &= \frac{m'm''' + \ldots\ldots + q'q'''}{H} + \frac{m''m''' + \ldots\ldots + q''q'''}{H'} + \frac{m'''^2 + \ldots\ldots + q'''^2}{H''}.
\end{aligned}$$

Il en résulte en particulier l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} m'^2 + \ldots + q'^2 & m'm'' + \ldots + q'q'' & m'm''' + \ldots + q'q''' \\ m'm'' + \ldots + q'q'' & m''^2 + \ldots + q''^2 & m''m''' + \ldots + q''q''' \\ m'm''' + \ldots + q'q''' & m''m''' + \ldots + q''q''' & m'''^2 + \ldots + q'''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme, en posant $V = 0$, $W = 0$, $T = 0$, on a $u^2 + v^2 + w^2 + t^2 = 0$, on voit que si l'on prend

$$\frac{u}{\begin{vmatrix} n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \\ n''' & p''' & q''' \end{vmatrix}} = \frac{-v}{\begin{vmatrix} m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \\ m''' & p''' & q''' \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} m' & n' & q' \\ m'' & n'' & q'' \\ m''' & n''' & q''' \end{vmatrix}} = \frac{-t}{\begin{vmatrix} m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \\ m''' & n''' & p''' \end{vmatrix}},$$

il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \\ n''' & p''' & q''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \\ m''' & p''' & q''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m' & n' & q' \\ m'' & n'' & q'' \\ m''' & n''' & q''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \\ m''' & n''' & p''' \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Par là se trouve accusée l'identité

$$\begin{vmatrix} m^2+n^2+p^2+q^2 & mm'+nn'+pp'+qq' & mm''+nn''+pp''+qq'' \\ mm'+nn'+pp'+qq' & m'^2+n'^2+p'^2+q'^2 & m'm''+n'n''+p'p''+q'q'' \\ mm''+nn''+pp''+qq'' & m'm''+n'n''+p'p''+q'q'' & m''^2+n''^2+p''^2+q''^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} n & p & q \\ n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & q & m \\ p' & q' & m' \\ p'' & q'' & m'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q & m & n \\ q' & m' & n' \\ q'' & m'' & n'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}^2.$$

Elle fait suite à l'identité connue

$$\begin{vmatrix} m^2+n^2+p^2 & mm'+nn'+pp' \\ mm'+nn'+pp' & m'^2+n'^2+p'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & p \\ n' & p' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & m \\ p' & m' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2.$$

Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; par M. Halphen.

(Séance du 17 février 1875)

1. Quand deux courbes ont en commun un point singulier et que leurs tangentes y sont distinctes, le nombre de leurs intersections confondues en ce point est, comme on sait, égal au produit des ordres de multiplicité du point sur chacune des deux courbes. Si, au contraire, les courbes ont, au point dont il s'agit, des tangentes communes, ce nombre s'augmente. *L'augmentation est égale à la somme des ordres des contacts des branches des courbes entre elles.* Cette proposition est due à M. Cayley, et j'en ai moi-même donné des démonstrations, l'une dans ce bulletin (t. I, p. 133), l'autre dans un *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, dont l'Académie a décidé l'insertion au recueil des Savants étrangers. On voit immédiatement comment cette proposition fournit le moyen de calculer l'augmentation dont je viens de parler. M. de la Gournerie, qui a écrit plusieurs mémoires *Sur les singularités élevées des courbes planes* (*Journal de Math.*, 2e série, t. XIV et XV, et *Comptes rendus*, t. LXXVII), a eu l'occasion d'en faire des applications à des cas très-complexes.

On a cependant pensé qu'il restait encore un pas à faire : on a demandé une formule générale qui fournisse immédiatement la solution du problème, quand les courbes sont données par leurs équations. La question a été nettement posée par M. Painvin dans les termes suivants :

Trouver le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux deux courbes

$$x^a\varphi_{p-a} + x^b\varphi_{p-b+1} + x^c\varphi_{p-c+2} + \ldots = 0,$$
$$x^\alpha\psi_{q-\alpha} + x^\beta\psi_{q-\beta+1} + x^\gamma\psi_{q-\gamma+2} + \ldots = 0.$$

les lettres φ_i et ψ_i désignant des fonctions homogènes en x et y, et du degré i. (*Bul. des Sc. Math.* t. IV, p. 131, et t. V, p. 139.)

Sous la forme géométrique, c'est, comme on voit, un problème d'élimination, tout algébrique. M. Painvin en a donné une solution élégante dans un cas particulier, celui où l'exposant β est nul. On la trouvera un peu plus loin.

Sur le problème ainsi posé, il importe de faire une remarque : En ne caractérisant les polynômes φ_i et ψ_i que par leurs degrés, on suppose essentiellement que leurs coefficients ne soient pas particularisés de manière à modifier le nombre cherché. C'est cependant ce qui peut arriver, et c'est là précisément le cas le plus compliqué du problème général. Dans ce cas, il me paraît impossible de ne pas recourir aux développements employés par M. de la Gournerie, ou à des transformations équivalentes.

Le problème, tel que M. Painvin l'a posé, n'en reste pas moins digne d'intérêt. J'en donne ici une solution; j'y rattache ensuite le second cas, plus complexe, de telle sorte que la résolution du problème général s'obtient par l'application, plusieurs fois répétée, de la solution du problème particulier.

2. C'est une proposition rappelée plus haut qui sert de point de départ à mes recherches actuelles :

Théorème I. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point, est égal au produit des multiplicités de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une avec les branches de l'autre au même point.*

C'est cette dernière somme qu'il s'agit de déterminer; et il est clair que, pour y parvenir, il suffit de considérer successivement chaque tangente commune, et de faire la somme des résultats. Pour abréger le langage, je désignerai cette somme par *ordre total du contact.*

J'ai donné au théorème une autre forme souvent utile (*Bul. de la Soc. math.* t. II, p. 35) :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* O, *l'équation de l'une d'elles étant, sous forme entière,* $f(x, y) = 0$, *est égal à la somme des ordres des quantités* $f(x, y)$ *quand le point* (x, y) *est placé successivement sur les diverses branches de l'autre courbe, à distance infiniment petite du premier ordre du point* O.

Ces propositions rappelées, j'entre en matière. J'emploie la notation $[n]$ pour désigner abréviativement un polynôme homogène de degré n en x, y, ne s'évanouissant pas avec x. Je suppose, comme l'a fait M. Painvin, une courbe ayant, à l'origine des coordonnées, des branches tangentes à l'axe des y, et ordonnant son équation, je l'écris

$$(1) \qquad 0 = f(x.y) = x^{m_0}[p - m_0] + x^{m_1}[p - m_1 + a_1] + x^{m_2}[p - m_2 + a_2] + \ldots + x^{m_i}[p - m_i + a_i] + \ldots,$$

où les nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, dont le premier est au moins égal à l'unité, croissent avec leurs indices. L'entier p marque la multiplicité de l'origine sur la courbe (1). Parmi les entiers $m_0, m_1, \ldots, m_i, \ldots$, un au moins est nul, sans quoi $f(x, y)$ serait divisible par une puissance de x. On voit que la forme de l'équation (1) est un peu plus générale que celle adoptée par M. Painvin; on obtiendra cette dernière en supposant $a_i = i$.

Je suppose que y soit infiniment petit du 1er ordre, et qu'on mette dans $f(x,y)$, au lieu de x, un infiniment petit d'ordre supérieur $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). L'expression $x^{m_i}[p - m_i + a_i]$ est infiniment petite d'ordre $p + a_i + \varepsilon m_i$. Donc l'ordre de $f(x,y)$ est le minimum de cette dernière expression, quand on y fait varier l'indice i. La seule exception à cette règle a lieu si l'infiniment petit, qu'on substitue à x, a pour partie principale celle d'une racine de l'équation (1). L'ordre $f(x,y)$ s'élèverait dans ce cas.

Je considère maintenant une seconde courbe se composant, au point O, de ρ branches ayant avec l'axe des y des contacts d'ordre ε. D'après ce que je viens de dire, et conformément au théorème II, le nombre des intersections des deux courbes, réunies au point O, est égal à ρ fois le minimum de $p + a_i + \varepsilon m_i$. Comme ρp est le produit des multiplicités du point O sur les deux courbes, je vois que *l'ordre total du contact des deux courbes est le minimum de* $\rho(a_i + \varepsilon m_i)$, sauf toutefois le cas d'exception signalé plus haut.

Soit, comme exemple,

$$0 = x^{\alpha}[\pi - \mu] + [\pi + \alpha] + \ldots \tag{2}$$

l'équation de la seconde courbe, ordonnée comme $f(x,y)$. On voit aisément que, parmi les π branches de courbe qui passent en O, il en est μ dont Oy est la tangente, et que l'ordre commun de leur contact avec Oy est $\frac{\alpha}{\mu}$. Si, d'ailleurs, je laisse aux polynômes qui figurent dans (1) et (2) toute leur généralité, le cas d'exception n'a pas lieu. Donc, en appliquant le résultat précédent, et faisant $\rho = \mu$, $\varepsilon = \frac{\alpha}{\mu}$, j'ai cette conclusion :

L'ordre total du contact des courbes (1) *et* (2) *au point* O *est le minimum de* $\mu a_i + \alpha m_i$.

En supposant $\alpha = 1$, et $a_i = i$, on obtient l'élégante solution que M. Painvin a donnée pour ce cas particulier du problème, et à laquelle j'ai fait précédemment allusion.

Si la seconde courbe, au lieu de contenir en O un seul groupe de branches ayant des contacts du même ordre avec Oy, contient plusieurs groupes analogues, ce n'est plus le minimum de $\rho(a_i + \varepsilon m_i)$ que l'on devra chercher, mais bien le minimum de $\rho(a_i + \varepsilon m_i) + \rho'(a_j + \varepsilon' m_j) + \ldots$, en supposant toujours, bien entendu, mis de côté le cas d'exception dont j'ai

parlé, et sur lequel je reviendrai dans la dernière partie de ce travail. Ce que l'on doit chercher, c'est d'exprimer ce minimum au moyen des nombres qui interviennent dans l'équation de la seconde courbe, et qui y sont analogues à m_i, a_i. J'y parviendrai, comme on va le voir, assez rapidement, en faisant usage du *parallélogramme de Newton*, dont je modifie très-légèrement la définition pour l'approprier à mon objet actuel.

3. Je reprends l'équation (1), et je marque, sur un plan, des points $P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots$, dont les coordonnées, par rapport à des axes rectangulaires, soient

$$\begin{array}{ll} X_0 = m_0, & Y_0 = 0, \\ X_1 = m_1, & Y_1 = a_1, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ X_i = m_i, & Y_i = a_i, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

Comme il a été dit plus haut, si l'on fait y infiniment petit du 1er ordre, et x infiniment petit d'ordre $1+\varepsilon$, l'ordre de $f(x,y)$ surpasse p de la plus petite des quantités $a_i + \varepsilon m_i$. Je figure ces quantités en traçant une droite D passant par l'origine des coordonnées et faisant avec la direction négative de l'axe des x l'angle ω dont la tangente est ε. J'ai ainsi

$$a_i + \varepsilon m_i = Y_i + tg\omega . X_i = \frac{\delta_i}{\cos\omega},$$

δ_i étant la distance du point P_i à la droite D.

Ainsi le groupe de termes d'ordre le moindre dans $f(x,y)$ correspond au point P_i dont la distance à D est minima. On remarquera d'ailleurs que, dans un tel groupe, un seul terme est de l'ordre $p + a_i + \varepsilon m_i$; c'est celui qui contient y à la puissance $p - m_i + a_i$. Par conséquent, le cas d'exception dans lequel la partie principale de x est celle d'une racine de (1), et où les termes d'ordre minimum disparaissent, ne peut se produire que si deux points au moins, tels que P_i, sont à la distance minima de D. De là cette conclusion facile que, si une droite contient plusieurs points P et sépare l'origine de tous les autres, et si les points extrêmes qu'elle contient sont P_i et P_{i+j}, l'équation (1) admet $m_i - m_{i+j}$ racines x infiniment petites d'ordre $1+\eta$, η étant la tangente de l'angle que fait, avec la direction négative de l'axe des x, la droite considérée. Par suite, on n'aura qu'à tracer un polygone, tournant sa convexité vers l'origine, ayant pour sommets des points P_i et séparant l'origine de tous les autres, pour obtenir la figuration des diverses quantités telles que η, et du nombre des racines x auxquelles elles se rapportent.

Tout ceci est trop semblable à la célèbre règle du *parallélogramme de Newton*, pour qu'il soit utile d'entrer dans plus de détails.

Pour abréger, je désignerai le polygone dont je viens de parler, et relatif à $f(x,y)$, par ce mot : *le polygone* (f).

Soit maintenant une seconde courbe dont l'équation est

$$(3)\quad 0=\varphi(x,y)=x^{\nu_0}[\pi-\mu_0]+x^{\nu_1}[\pi-\mu_1+\alpha_1]+\ldots+x^{\nu_j}[\pi-\mu_j+\alpha_j]+\ldots,$$

ordonnée comme $f(x,y)$; en sorte que $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j,\ldots$ sont des entiers croissants, dont le premier est au moins égal à l'unité.

Nous nous proposons de chercher l'ordre total du contact de cette courbe avec la courbe (1) au point O.

Nous figurons φ, comme f, par des points Π_j, et nous considérons encore un polygone (φ), défini comme le précédent.

Nous supposerons en plus, pour le moment, et cette hypothèse disparaîtra plus loin, que le polygone (φ) sépare l'origine de tous les points P, en sorte que le polygone (f) est entièrement à droite de (φ).

Je suppose que l'équation (3) admette un groupe de ρ racines x infiniment petites d'ordre $1+\varepsilon$, pour y infiniment petit du 1er ordre. En appliquant à φ ce qui a été dit pour f, je vois que ε est la tangente de l'angle ω que fait avec la direction négative de l'axe des x un certain côté Λ du polygone (φ), et que ρ est la projection de ce côté sur l'axe des x. Par suite, $\frac{\rho}{\cos\omega}$ est la longeur λ de ce côté. D'ailleurs, si D est la parallèle menée par O à Λ, et δ_i la distance de P_i à D, nous avons trouvé

$$a_i+\varepsilon m_i=\frac{\delta_i}{\cos\omega}.$$

Donc

$$\rho(a_i+\varepsilon m_i)=\frac{\rho\delta_i}{\cos\omega}=\lambda\delta_i.$$

Comme, par hypothèse, O et P_i sont de part et d'autre de Λ, la quantité $\lambda\delta_i$ est le double de la somme des aires des triangles ayant le côté Λ pour base, et pour sommets les points O et P_i. Le premier de ces triangles ne dépend pas du point P_i. Quant au second, on voit aisément qu'on le rendra minimum en prenant pour P_i un sommet du polygone (f), tellement choisi que les directions des côtés qui y aboutissent comprennent entre elles celle de Λ.

J'ai à considérer ensuite d'autres groupes de racines de φ. Soit ρ' le nombre des racines d'un de ces groupes, et soit aussi $1+\varepsilon'$ leur ordre. Il y correspond un autre côté Λ' du polygone (φ).

La quantité $\rho'(a_i+\varepsilon' m_i)$ est représentée par le double de l'aire du triangle de sommet O et de la base λ', augmenté du double de l'aire du triangle de sommet P_i et de même base, et ainsi de suite.

J'ai d'ailleurs à chercher le minimum de

$$\rho(a_i + \varepsilon m_i) + \rho'(a_j + \varepsilon m_j) + \ldots,$$

pour obtenir l'ordre total du contact des courbes (1) et (3). Ce nombre est donc égal au double de l'aire comprise entre les axes et le polygone (φ), augmenté du double de la somme des aires minima des triangles construits sur les côtés successifs de ce polygone et ayant pour sommets des points P.

Rien n'est plus aisé que de trouver la règle pour former ce minimum. Je ne m'y arrête pas ici. Je remarque seulement que les divers triangles de sommets P_i, P_j, ..., dans la figure qui fournit l'aire minima, n'empiètent pas les uns sur les autres, en sorte que l'on peut dire que : *La moitié de l'ordre total du contact de* (1) *et* (3) *est égale à l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes, et ayant alternativement pour sommets des points* P *et des sommets de* (φ), *de manière que cette aire soit minima.*

J'ai supposé que le polygone (φ) séparait l'origine de tous les points P. Je suppose qu'en outre tous les points Π soient compris entre le polygone (φ) et le polygone (f). Dans cette hypothèse, on peut modifier le dernier énoncé et dire que :

La moitié de l'ordre du contact de (1) *et* (3) *est égale au minimum de l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes et ayant pour sommets alternativement un point* Π *et un point* P.

Pour traduire ce résultat en une formule algébrique sans qu'il y ait aucune ambiguïté, je vais supprimer *a priori* un certain nombre de termes dans les équations proposées. A cet effet, j'observe qu'un point Π_i ne peut faire partie du polygone (φ), si l'exposant correspondant μ_i n'est pas inférieur à tous les nombres μ d'indices moindres. Comme je sais d'ailleurs que ce sont les sommets du polygone qui doivent intervenir seuls pour la solution, je peux supprimer un tel point. Il en est de même pour les points P. En d'autres termes, je puis supposer que, dans les équations (1) et (3), les nombres $m_0, m_1, \ldots$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots$ vont en décroissant quand leurs indices croissent.

Soit alors $k+1$ le rang du dernier groupe de termes subsistant dans $\varphi(x,y)$. Je peux supposer $\mu_k = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x,y)$ non divisible par x. Parmi les points Π, il en est un sur l'axe des x, c'est Π_0; et un sur l'axe des y, c'est Π_k. Je peux, dans tous les cas, supposer que la ligne polygonale, limite de l'aire considérée, part de Π_0 et aboutit à Π_k.

Une quelconque de ces lignes polygonales peut être définie comme il suit. Parmi les points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{k-1}$, j'en choisis quelques-uns. Soit r leur nombre. Leurs indices seront r nombres, compris entre 1 et $k-1$ inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par (1), (2), ..., (r). Parmi tous les points P, j'en choisis de même $r+1$. Leurs indices seront $r+1$

nombres compris entre zéro et l'indice supérieur des points P inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par $[1], [2], \ldots, [r+1]$. En mettant simplement l'indice pour représenter chaque point, j'ai ainsi une ligne polygonale

$$0[1](1)[2](2)\ldots(r)[r+1]k.$$

C'est cette ligne que l'on doit faire varier, tant en changeant ses sommets, sauf les extrêmes, qu'en modifiant le nombre de ces sommets, de manière à rendre minima l'aire comprise entre cette ligne et les deux axes.

Je considère la portion de cette aire comprise dans le quadrilatère formé par l'origine et les points (i), $[i+1]$ et $(i+1)$. Son double a pour expression

$$S_i = a_{[i+1]}(\mu_{(i)} - \mu_{(i+1)}) + m_{[i+1]}(\alpha_{(i+1)} - \alpha_{(i)}).$$

Le double de l'aire totale est

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_r.$$

Pour exprimer ce résultat d'une manière plus simple, je donne une désignation uniforme aux coordonnées des sommets successifs de cette ligne polygonale.

J'appelle A_j, M_j les coordonnées du sommet de rang $j+1$. Le sommet (i) occupe le rang $2i+1$, et le sommet $[i]$ le rang $2i$. J'ai donc

$$\begin{array}{ll} A_0 = 0, & M_0 = \mu_0, \\ A_1 = a_{[1]}, & M_1 = m_{[1]}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_{2i-1} = a_{(i)}, & M_{2i-1} = m_{(i)}, \\ A_{2i} = \alpha_{(i)}, & M_{2i} = \mu_{(i)}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_{2r+2} = \alpha_{(k)}, & M_{2r+2} = 0. \end{array}$$

Soit

$$A_{j+1}M_j - M_{j+1}A_j = \Sigma_j;$$

j'ai

$$S_i = \Sigma_{2i} + \Sigma_{2i+1}.$$

Par suite

$$S = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_{2r+1}.$$

Telle est l'expression dont le minimum fournira le nombre que l'on cherche. Il ne faut pas perdre de vue que cette formule n'est établie que dans l'hypothèse où tous les points Π sont compris entre les polygones (φ) et (f). Je vais maintenant montrer que cette restriction peut être écartée, et que mon dernier résultat en est affranchi.

On assure la réalisation de l'hypothèse que je viens de rappeler, en don-

nant à la figure formée par les points P une translation suivant la direction positive de l'axe des x. Ceci revient à multiplier $f(x,y)$ par une puissance de x. Il est vrai que, de la sorte, aucun des points P ne se trouve plus sur l'axe des y. Mais on peut remarquer que, dans ce qui précède, on n'a pas supposé qu'il y en eût. Les conclusions ne sont donc pas troublées. Mais on a fait subir au nombre cherché une augmentation dont il faut actuellement tenir compte.

En multipliant $f(x,y)$ par x^λ, j'augmente l'ordre total du contact des deux courbes, f et φ, d'un nombre égal à celui de φ avec l'axe des y, répété λ fois. Cette augmentation est donc $\lambda\alpha_k$. Pour obtenir l'ordre total du contact de f et φ, j'ai donc : 1° à augmenter chaque nombre m_i, dans l'expression S, de la quantité fixe λ; 2° à retrancher $\lambda\alpha_k$. Or la première opération conduit à augmenter chaque nombre S_i de $\lambda(\alpha_{(i+1)} - \alpha_{(i)})$. Par suite, S qui est la somme des nombres S_i, se trouve augmenté de $\lambda\alpha_k$, c'est-à-dire précisément du nombre qu'il faut retrancher ensuite. Donc, ainsi que je l'ai annoncé, les résultats ci-dessus sont affranchis de l'hypothèse qui a servi à les établir.

La généralité de ces résultats étant reconnue, on peut maintenant supposer que $f(x,y)$, ainsi que $\varphi(x,y)$, ne contient pas le facteur x. Ceci permet de prendre les couples extrêmes de nombre A, M, dans l'une ou l'autre des équations, pour former les diverses valeurs de S, entre lesquelles on aura à choisir la plus petite.

Pour énoncer sous forme de théorème les résultats obtenus, de telle sorte qu'ils soient applicables à tous les cas, je donnerai au nombre ainsi calculé le nom de *premier surcroît d'intersection* des branches des deux courbes, tangentes à l'axe des y. J'ai supposé jusqu'ici que, si deux branches des deux courbes ont avec la tangente commune, à l'origine des coordonnées, un contact du même ordre, elles ont aussi entre elles un contact de ce même ordre. Dans cette hypothèse, le premier surcroît d'intersection n'est autre chose que l'ordre total du contact cherché. Quand cette hypothèse n'a plus lieu, il n'en est plus de même. Ainsi que je l'ai déjà annoncé, je traiterai plus loin ce cas, et j'aurai encore à y faire usage du nombre calculé comme il vient d'être dit. C'est en vue de cet usage que j'adopte ici, pour ce nombre, une dénomination particulière. Cette définition posée, voici le théorème :

Théorème III. — *Soient deux courbes représentées par les équations entières*

$$0 = x^{m_0}[p - m_0] + x^{m_1}[p - m_1 + a_1] + \ldots + x^{m_i}[p - m_i + a_i] + \ldots,$$
$$0 = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + x^{\mu_1}[\pi - \mu_1 + \alpha_1] + \ldots + x^{\mu_i}[\pi - \mu_i + \alpha_i] + \ldots,$$

dans lesquelles $[n]$ *représente un polynôme homogène en* x *et* y, *de degré* n, *non divisible par* x, *où les entiers* a *croissent avec leurs indices, le premier*

étant au moins égal à l'unité, et où il en est de même des entiers α. On fera abstraction de tous les termes de la première équation, dans lesquels l'exposant m n'est pas inférieur à tous ceux qui le précèdent; et de même dans la seconde équation, à l'égard des exposants μ. Parmi les termes qui subsistent, on prendra le premier terme de l'une des équations, puis un quelconque de rang t dans l'autre, puis un quelconque de rang t' dans la première, puis un terme de rang supérieur à t dans la seconde, un terme de rang supérieur à t' dans la première, et ainsi de suite en alternant, sans jamais rétrograder dans une même équation, et en terminant par le dernier terme de l'une des deux équations. Soient M_i, A_i les deux nombres m, a, ou μ, α, caractérisant le terme auquel on a ainsi assigné le rang $i+1$. On formera la somme des expressions

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}.$$

Le minimum de cette somme est le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.

D'après les raisonnements employés ci-dessus, il est très-aisé de démontrer la proposition suivante que je me borne à énoncer.

Théorème IV. — *Si l'on a soin de rejeter les combinaisons dans lesquelles quelques éléments*

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}$$

de la somme ci-dessus seraient nuls, et que, dans ces conditions, le minimum de cette somme s'obtienne d'une seule manière, ce minimum n'est autre que l'ordre total du contact des branches des courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.

Il importe de remarquer que la réciproque de cette proposition ne serait pas exacte.

Pour l'application du théorème III, on peut manifestement prendre les termes extrêmes à volonté dans l'une ou l'autre des équations et s'abstenir de les faire varier. Supposons, par exemple, que l'on ait $\mu_1 = 0$, la seconde équation, bornée aux termes convenables, ainsi qu'il est dit dans l'énoncé du théorème, se réduit à deux termes

$$0 = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + [\pi + \alpha_1].$$

Je prends ces deux termes pour extrêmes. Je n'y peux intercaler qu'un seul terme de la première équation. J'ai donc

$$M_0 = \mu_0, \quad M_1 = m_1, \quad M_2 = 0,$$
$$A_0 = 0, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = \alpha_1.$$

La somme à considérer se réduit à

$$\mu_0 a_i + \alpha_1 m_i,$$

dont le minimum fournit le premier surcroît cherché. On voit donc que le théorème III contient le résultat particulier déjà trouvé précédemment.

4. Pour former le minimum qui, suivant le théorème III, fournit le surcroît cherché, on peut former toutes les combinaisons différentes des termes des deux équations. On peut y parvenir aussi d'une manière généralement plus rapide en suivant une règle que je vais énoncer. Cette règle n'est autre chose que la traduction algébrique du procédé géométrique le plus simple pour former le minimum de l'aire qui a été considérée ci-dessus. Voici cette règle :

Règle. — *Dans la première des équations du théorème III, considérons les nombres* $\frac{a_i}{m_0 - m_i}$. *Soit* L *le plus petit d'entre eux, et n le plus grand indice pour lequel on ait* $\frac{a_n}{m_0 - m_n} = \mathrm{L}$. *Considérons ensuite les nombres* $\frac{a_i - a_n}{m_n - m_i}$, *pour les valeurs de i supérieures à n, et soit n' le plus grand indice i qui donne à ce nombre sa valeur minima* L'. *Considérons ensuite les nombres* $\frac{a_i - a_{n'}}{m_{n'} - m_i}$ *pour les valeurs de i supérieures à n', et soit* L'' *le plus petit d'entre eux, et ainsi de suite. Nous formons ainsi des nombres* L, L', L'',..., *qui vont en croissant.*

Relativement à la seconde des équations du théorème III, nous formons, de la même manière, des nombres Λ, Λ', Λ'',....

Rangeons tous les nombres L *et* Λ *par ordre de grandeur en commençant par le plus petit. Nous formons ainsi une suite de groupes alternativement composés, les uns de nombres* L, *les autres de nombres* Λ. *Considérons le premier nombre de chacun de ces groupes sauf le premier, et prenons, parmi les deux couples de nombres m, a ou* μ, α, *qui figurent dans son expression, celui dont l'indice est le plus petit. Nous avons ainsi une série de couples de nombres* $(\mathrm{M}_0, \mathrm{A}_0)$, $(\mathrm{M}_1, \mathrm{A}_1)$,.... *Joignons-y le couple, d'indice le plus grand, qui figure dans le dernier nombre de l'avant-dernier groupe.*

Ces couples de nombres (M,A) *sont, dans l'ordre même où nous les rencontrons, ceux qui fournissent le minimum mentionné au théorème III.*

Chaque nombre tel que L est la tangente de l'inclinaison d'un côté du polygone (*f*) sur l'axe des x ; en d'autres termes, $1 + \mathrm{L}$ est l'ordre d'infiniment petit auquel appartient un groupe de racines x de la première équation, y étant supposé du premier ordre.

Le dénominateur de L est égal au nombre de ces racines. Donc un nombre Λ ne peut être égal à un nombre L, que si les deux équations considérées admettent des racines x, infiniment petites du même ordre. Ce

n'est aussi que dans ce dernier cas que l'ordre total du contact peut surpasser le premier surcroît. On peut donc ajouter à la règle précédente cette remarque, qui s'accorde avec le théorème IV :

Si aucun des nombres Λ *n'est égal à un des nombres* L, *le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est égal à l'ordre total de leur contact.*

A peine est-il besoin faire observer que :

Si, au contraire, deux nombres L, Λ *sont égaux, on peut, pour l'application de la règle ci-dessus, en intervertir l'ordre, sans troubler le résultat.*

L'application de la règle que je viens de donner est simple et rapide. J'en donnerai un exemple :

Exemple. — Désignant par n un entier positif, je pose

$$m_i = (n-i)^2, \qquad a_i = i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$
$$\mu_j = \frac{(2n-j)(2n-j+1)}{2}, \quad \alpha_j = j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Il y a n nombres L, et l'on a

$$L_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{m_{k-1} - m_k} = \frac{1}{2n - 2k + 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Il y a $2n$ nombres Λ, et l'on a

$$\Lambda_k = \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\mu_{k-1} - \mu_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Dans cet exemple, se présente la particularité $L_k = \Lambda_{2k}$, dont il vient d'être question : il y a plusieurs manières de ranger les nombres L et Λ par ordre de grandeur. J'en choisis une

$$\Lambda_1 \Lambda_2 L_1 \Lambda_3 \Lambda_4 L_2 \ldots \Lambda_{2(i+1)} L_{i+1} \Lambda_{2i+3} \ldots \Lambda_{2n} L_n,$$

j'ai ainsi

$$M_{2i} = (n-i)^2, \qquad \Lambda_{2i} = i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-2),$$
$$M_{2i+1} = (n-i-1)(2n-2i-1), \quad \Lambda_{2i+1} = 2i+2.$$

Le dernier couple sera

$$M_{2n-2} = 0, \quad \Lambda_{2n-2} = 2n.$$

J'ai à former la quantité

$$S = \sum_{k=0}^{k=2n-3} (M_k \Lambda_{k+1} - \Lambda_k M_{k+1}),$$

que je puis écrire

$$S = \Lambda_1 M_0 + \sum_{k=1}^{k=2n-3} M_k (\Lambda_{k+1} - \Lambda_{k-1}).$$

En groupant les termes suivant la parité de l'indice de M, et à cause de

$$A_{2i+1} - A_{2i-1} = 2, \quad A_1 = 2, \quad A_{2i+2} - A_{2i} = 1,$$

je puis écrire

$$S = 3(n+2) + 2\sum_{i=0}^{i=n-2}(n-i)^2 + \sum_{i=0}^{i=n-3}(n-i-1)(2n-2i-1)$$

$$= \frac{n(4n^2+5)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Cette dernière valeur de S est le résultat demandé.

5. Je dois signaler ici un cas particulier, celui où les nombres (μ, α) coïncident avec les nombres (m, a). Les équations, dans lesquelles figurent ces nombres, donnent lieu au même polygone. Dans ce cas, le premier surcroît d'intersection est égal au double de l'aire comprise entre ce polygone et les axes. On voit bien aisément aussi que, pour appliquer ici le théorème III, on devra prendre simplement pour les couples successifs (M, A) des couples (m, a) dans l'ordre croissant des indices. Enfin, pour appliquer la règle du paragraphe précédent, on prendra pour les couples (m, a) donnant le minimum, tous ceux qui figurent dans les expressions des nombre I_i.

On voit ainsi comment les résultats généraux acquis jusqu'à présent s'appliquent au cas particulier considéré. J'en veux maintenant tirer une importante conséquence; à savoir le procédé pour calculer l'abaissement produit dans la classe d'une courbe par un point singulier.

Pour un instant encore, je raisonne sur les deux courbes f et φ, définies au théorème III, en supposant que les couples successifs de nombres μ, α soient respectivement égaux aux couples de nombres m, a.

A chaque branche B de f, tangente à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, on peut, dans le cas actuel, faire correspondre une branche B′ de φ, ayant avec la même droite, au même point, un contact du même ordre, et inversement. Du nombre S, qui est le premier surcroît d'intersection de toutes les branches B avec toutes les branches B′, je retranche le nombre T, premier surcroît d'intersection des couples de branches correspondantes. De la sorte, si C, C′ sont deux autres branches correspondantes, et si je désigne abréviatement par (BC′) le premier surcroît d'intersection de B et de C′, le nombre S — T se compose d'une somme d'éléments tels que (BC′) + (CB′).

Je rappelle que, par définition, le premier surcroît d'intersection de deux branches n'est autre chose que l'ordre de leur contact, si elles ont avec la tangente commune des contacts d'ordres différents; si, au contraire, elles ont avec cette tangente des contacts du même ordre, c'est précisément cet ordre. D'après cela, il n'y a aucune difficulté à étendre cette définition à

deux branches B, C d'une même courbe. Ceci étant convenu, j'ai, dans le cas actuel,

$$(BC') = (CB') = (BC).$$

Par suite, S — T se compose du double de la somme des éléments tels que (BC). En d'autres termes, S — T est le double du premier surcroît d'intersection de toutes les branches de f, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, prises deux à deux de toutes les manières. Dans des cas particuliers, ce premier surcroît est précisément égal à la somme des ordres des contacts de ces branches entre elles. Dans le cas général, c'est un élément de cette somme, dont l'usage apparaîtra dans le paragraphe suivant.

Or, d'après M. Cayley, si p est l'ordre de multiplicité d'un point singulier, ce point produit dans la classe un abaissement égal à $p(p-1)$, augmenté du double de la somme des ordres des contacts des branches qui y passent, prises deux à deux. On voit donc que S — T est, dans le cas général, un premier élément du nombre que l'on doit ajouter à $p(p-1)$, pour obtenir l'abaissement de classe dû au point singulier.

Je l'appelle *premier surcroît d'abaissement de classe*, relatif aux branches considérées. Pour être en mesure de le calculer, il me suffit, connaissant S, de chercher l'expression de T.

Je considère, à cet effet, un côté du polygone (f), et soient B, C,... les branches qui lui correspondent. Leur nombre est égal à la projection de ce côté sur l'axe des x, et l'ordre commun de leur contact avec la tangente est la tangente de l'inclinaison de ce côté sur l'axe des x. Par suite, la somme des ordres de leurs contacts avec la tangente est égale à la projection du même côté sur l'axe des y. Cette somme n'est pas autre chose que $(BB') + (CC') + \ldots$. Je considère successivement tous les côtés du polygone (f), et je conclus que T est égal à la projection de ce polygone sur l'axe des y, c'est-à-dire au dernier des nombres a. De là, en premier lieu, cet énoncé géométrique :

Théorème V. — *Étant donnée la courbe $f(x,y) = 0$, traçons le polygone (f), ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 3; joignons le point où ce polygone rencontre l'axe des y au point situé sur l'axe des x et ayant pour abscisse l'unité. L'aire comprise entre cette dernière droite, l'axe des x et le polygone, est égale à la moitié du premier surcroît d'abaissement de classe dû aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.*

On remarquera ici que : *Si aucun côté du polygone (f) ne contient plus de deux points représentatifs de $f(x,y)$, ce premier surcroît est égal au double de l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai, en second lieu, sous une forme analogue à celle du théorème III :

Théorème VI. — *L'équation d'une courbe étant réduite comme il est dit au théorème III, et a_n étant le dernier des nombres a, on prendra une suite de couples m, a, dans l'ordre croissant des indices, en y comprenant les extrêmes. Soit M_s,A_s, le couple m, a, qui occupe ainsi le rang $s+1$.*

Le premier surcroît d'abaissement de classe, relatif aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est le minimum de l'expression

$$-a_n + \sum (A_{s+1}M_s - A_sM_{s+1}).$$

Semblablement au théorème IV, j'ai cette proposition :

Théorème VII. — *Si le minimum de cette somme s'obtient d'une seule manière, ce minimum est égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai enfin, pour former le minimum, une règle analoge à celle du paragraphe IV :

Règle. — *Pour former le minimum indiqué au théorème VI, on n'aura qu'à prendre pour les couples* M,A, *les couples de nombres m,a, qui figurent dans les expressions des nombres* L, *dont la formation est expliquée dans la règle du paragraphe 4, et en respectant leur ordre.*

J'applique cette dernière règle à l'exemple cité plus haut, à savoir

$$m_i = (n-i)^2, \quad a_i = i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Je trouve, pour le surcroît cherché, $\frac{2}{3}n(n^2-1)$. Il est facile de voir que, dans cet exemple, le théorème VII a lieu. Ainsi le nombre indiqué est précisément égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles, quelle que soit d'ailleurs la forme des polynômes qui entrent dans l'équation de la courbe.

6. Dans ce paragraphe, je vais m'occuper du cas le plus général de l'intersection de deux courbes en un point singulier, et montrer quel usage on peut faire alors des résultats obtenus précédemment. J'invoquerai quelques propositions contenues dans mon *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, auquel je renvoie pour les démonstrations.

Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe, contenant des branches tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées. Ces branches se répartissent, comme on sait (*voy.* le mémoire cité), en un certain nombre de *systèmes circulaires*, correspondant aux systèmes circulaires formés par celle des racines x de l'équation, qui sont infiniment petites avec y. J'envisage un de ces systèmes circulaires D. Soit $uy^{1+\frac{s}{q}}$ la partie principale d'une racine appartenant à ce système, s et q étant des entiers positifs premiers entre eux. On sait que les parties principales de toutes les autres ra-

cines, appartenant au système D, ont la même expression, qui est d'ailleurs susceptible de q valeurs.

On sait, en outre, qu'à chacune de ces q valeurs correspond un même nombre r de racines, dont le nombre total est ainsi rq. Je pose

$$(1) \qquad y_1 = y^{1+\frac{s}{q}}, \quad x_1 = x - uy_1.$$

J'obtiens ainsi une transformée $f_1(x_1, y_1) = 0$ de l'équation primitive.

Dans cette transformée, le système circulaire D se change en autre D_1, composé de $r(q+s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1 (*ibid.*).

De même, tout autre système circulaire D′ composé de $r'q$ racines x, ayant uy_1 pour partie principale, donne également lieu, dans la transformée, à un système circulaire D'_1, composé de $r'(q+s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1. En d'autres termes, ces systèmes D, D′ donnent lieu à des branches de la courbe transformée f_1, qui sont tangentes à l'axe des y_1, à l'origine des coordonnées.

Au contraire, tout système circulaire de racines x ayant une partie principale différente de uy_1, donne lieu, dans la transformée, à un système circulaire de racines x_1 qui appartiennent à un ordre d'infiniment petit ne surpassant pas celui de y_1. Si, en effet, x est de l'ordre de y_1, sans avoir pour partie principale uy_1, ou bien si x est d'ordre supérieur à celui de y_1, x_1 est du même ordre que y_1. Enfin, si x est d'un ordre inférieur à celui de y_1, il en est de même de x_1. Dans tous les cas, à cette racine x_1 correspond une branche n'ayant pas, à l'origine des coordonnées, l'axe des y_1 pour tangente.

Si maintenant je considère à part, dans la transformée, comme je l'ai fait précédemment pour la courbe primitive, les branches tangentes à l'axe des y, j'ai éliminé toutes celles qui correspondent aux racines x dont la partie principale diffère de uy_1.

Je considère, à présent, une seconde courbe $\varphi(x, y) = 0$, contenant, comme la première, des branches tangentes à l'axe des y, à l'origine. Par les formules (1), j'en déduis une transformée φ_1. Si uy_1 n'est la partie principale d'aucune racine de φ, on voit que φ_1 n'a aucune branche tangente à l'axe des y_1, à l'origine. L'ordre du contact des branches de f_1 et de φ_1, tangentes à cet axe, est nul. Et dans ce cas aussi, l'ordre du contact des branches de f, correspondant aux racines x dont la partie principale est uy_1, avec les branches de φ, se borne au premier surcroît d'intersection de ces branches.

Si, au contraire, uy_1 est la partie principale d'une racine de φ, les choses changent. La transformée φ_1 a, comme f_1, des branches tangentes à l'axe des y_1, à l'origine de coordonnées. Dans ce cas aussi, l'ordre total du contact des branches des deux courbes f et φ, correspondant aux racines dont

la partie principale est uy_1, surpasse leur premier surcroît d'intersection. Je vais prouver qu'*il le surpasse d'un nombre précisément égal à l'ordre total du contact des branches de f_1 et de φ_1, tangentes à l'axe des y_1, à l'origine.*

Soit Δ un système circulaire de racines x de φ, ayant uy_1 pour partie principale. Je considère une branche δ correspondant à une de ces racines, et une branche d du système circulaire D. Soit $\frac{s}{q}+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) l'ordre du contact de d et de δ. On sait (*ibid.*) que le nombre des couples, tels que d,δ, de branches des deux systèmes ayant entre elles un contact de ce même ordre est toujours un multiple de q. Par suite, la somme des ordres des contacts de toutes ces branches entre elles est un nombre tel que $t\,(s+q\varepsilon)$, t étant un nombre entier, et tq le nombre des couples d,δ envisagés.

Dans les transformées f_1 et φ_1, à deux branches, telles que d et δ, correspondent des racines x_1 dont la différence est de l'ordre $\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)$ relativement à y, c'est-à-dire de l'ordre $\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)\frac{q}{s+q}$ relativement à y_1. C'est-à-dire qu'à deux branches telles que d et δ correspondent, dans les transformées, des branches d_1 et δ_1, dont l'ordre du contact est

$$\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)\frac{q}{s+q}-1=\frac{q\varepsilon}{s+q}.$$

Les couples d,δ et les couples d_1 et δ_1 ne se correspondent pas un à un. Mais au groupe de tq couples d, δ, correspond un groupe de couples d_1, δ_1; et le nombre de ces derniers est $t\,(s+q)$ (*ibid.*). Donc, la somme des ordres des contacts des branches composant ces derniers couples est égale à $tq\varepsilon$. Ce dernier nombre est précisément égal à celui dont la somme des ordres des contacts des branches d, δ de chaque couple surpasse leur premier surcroît d'intersection.

On répétera le même raisonnement en considérant successivement toutes les combinaisons des branches d'une courbe avec les branches de l'autre. On obtiendra ainsi la démonstration de la proposition énoncée, et comme conclusion :

Théorème VIII. — *Si $uy^{1+\zeta}$ ($\zeta>0$) est la partie principale à la fois d'une racine infiniment petite x de chacune des deux équations $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, formons deux transformées $f_1(x_1,x_1)=0$, $\varphi_1(x_1,y_1)=0$, en posant $y_1=y^{1+\zeta}$, $x_1=x-uy_1$. Formons de même toutes les transformées analogues et relatives aux autres quantités différentes entre elles $u'^{1+\zeta'}$ ($\zeta'>0$), ..., analogues à la première, et soient $f_2=0$, $\varphi_2=0$; $f_3=0$, $\varphi_3=0$; etc., ces divers couples de transformées.*

L'ordre total du contact des branches des courbes f et φ, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est égal à la somme des nombres analogues

et relatifs aux divers couples de courbes f_1 et φ_1, f_2 et φ_2, f_3 et φ_3, ..., augmentée du premier surcroît d'intersection des branches considérées des deux courbes f et φ.

Il résulte de ce théorème que l'application du théorème III, faite successivement aux équations proposées et à un certain nombre de transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact cherché.

On aperçoit immédiatement comment le théorème VIII s'applique au calcul de l'abaissement de classe dû à un point singulier; cette application peut s'énoncer ainsi :

Théorème IX. — *Les notations restant les mêmes qu'au théorème VIII, si une même valeur de $uy^{1+\zeta}$ est la partie principale de plus d'une racine de $f(x,y)=0$, et de même pour $u'y^{1+\zeta'}$, ..., le double de l'ordre total du contact des branches de f, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, entre elles, est égal à la somme des nombres analogues pour les diverses transformées f_1, f_2, ..., augmentée du premier surcroît d'abaissement de classe, dû aux branches considérées de f.*

Par suite, *l'application des théorèmes V ou VI, faite successivement à $f(x,y)$ et à des transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact des branches considérées dans la courbe f, entre elles.*

En répétant les mêmes calculs relativement à chaque tangente d'une courbe donnée, en un point singulier, multiple d'ordre p, et ajoutant à $p(p-1)$ la somme de tous les premiers surcroîts calculés, on obtiendra l'abaissement produit par le point singulier dans la classe de la courbe.

Je dois faire remarquer que la considération des transformées ci-dessus revient complétement à celle des développements relatifs aux branches partielles employés par M. de la Gournerie. On observera, en outre, que ces considérations présentent de grandes analogies, que l'on pourrait rendre complètes, avec un ordre de recherches bien différent en apparence. Je veux parler des recherches relatives à la simplification des points singuliers dans les transformées d'une courbe. Les résultats que j'ai obtenus dans un mémoire déjà cité ici, relativement aux développées successives des courbes algébriques se rattachent à ce sujet. Il en est de même de la méthode que j'ai employée dans une note sur les fonctions abéliennes (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833) ; j'ai d'ailleurs été de beaucoup prévenu dans cette voie par M. Nöther (*Gött. Nachr.*, 1871).

Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré;
par M. G. Fouret.

(Séance du 2 mars 1875)

M. Chasles, dans son *Traité de géométrie supérieure* (p. 224), a donné une méthode de *fausse position géométrique*, fondée sur la détermination des points doubles de deux divisions homographiques, pour résoudre un système d'équations du premier ou du second degré à plusieurs inconnues. En suivant le même ordre d'idées, je vais exposer brièvement, pour le cas d'un système d'équations du premier degré, une méthode graphique de fausse position, basée sur des procédés un peu différents de ceux donnés par M. Chasles. Les équations que je considère ont une forme plus générale, et la construction que j'obtiens présente l'avantage de fournir à la fois les valeurs de toutes les inconnues, au lieu de les déterminer isolément, comme le fait la méthode que je viens de rappeler.

Je m'appuierai sur le lemme suivant, très-facile à démontrer d'ailleurs.

Lemme. — *Si l'on désigne par x et y les distances parcourues respectivement par deux points mobiles sur deux droites* (X) *et* (Y), *à partir d'origines prises sur ces deux droites, et que x et y soient liés par une relation linéaire*

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \tag{1}$$

les positions correspondantes des deux points mobiles déterminent sur les droites qu'ils décrivent des segments proportionnels. Si, de plus, (X) *et* (Y) *sont parallèles, les droites joignant les positions correspondantes des deux points mobiles coucourent en un même point. Le rapport des distances de ce dernier point aux droites* (X) *et* (Y) *est égal à* $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Considérons un système de n équations du premier degré à n inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; et supposons-le ramené à la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = l_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots\ldots\ldots = l_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \ldots\ldots = l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4 + \ldots + h_nx_n = l_{n-1}, \\ k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + \ldots + k_nx_n = l_n. \end{array}\right. \tag{2}$$

Introduisons dans la $n^{\text{ème}}$ équation une $(n+1)^{\text{ème}}$ variable x_{n+1} avec un coéfficient arbitraire k_{n+1}. Cette équation deviendra

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + \ldots + k_nx_n + k_{n+1}x_{n+1} = l_n. \tag{3}$$

Imaginons maintenant que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ représentent les distances de $n+1$ points mobiles $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, M_{n+1}$, à des origines fines $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n, O_{n+1}$, sur autant de droites parallèles $(X_1), (X_2), (X_3), \ldots, (X_n), (X_{n+1})$, les distances parcourues simultanément par les points mobiles étant par conséquent liées par l'ensemble des $n-1$ premières équations (2) et de l'équation (3).

En éliminant de chaque équation toutes les variables moins les deux dernières, et remplaçant toutes les autres par leurs valeurs tirées des équations précédentes, on obtiendrait une relation linéaire telle que (1) entre les deux variables conservées. D'où l'on conclut, en vertu du lemme, que les n droites $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, \ldots, M_nM_{n+1}$ pivotent constamment autour d'autant de points fixes $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$. Il est facile de construire n droites $(Z_1), (Z_2), (Z_3), \ldots, (Z_n)$, parallèles aux droites (X) et contenant chacune un des points I. A cet effet, si l'on désigne d'une manière générale par ρ_p le rapport des distances de la droite (Z_p) aux droites (X_p) et (X_{p+1}), p pouvant recevoir toutes les valeurs entières de 1 à n inclusivement on a, pour déterminer les n rapports, le système d'équations

$$\begin{aligned}
a_1\rho_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
b_1\rho_1\rho_2 + b_2\rho_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots &= 0,\\
c_1\rho_1\rho_2\rho_3 + c_2\rho_2\rho_3 + c_3\rho_3 + c_4 + \ldots &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
h_1\rho_1\rho_2 \ldots \rho_{n-1} + h_2\rho_2 \ldots \rho_{n-1} + \ldots + h_n &= 0,\\
k_1\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n + k_2\rho_2 \ldots \rho_n + \ldots + k_n\rho_n + k_{n+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Ces équations se déduisent immédiatement des $n-1$ premières équations (2) et de l'équation (3), en se servant du lemme. Chacune d'elles fournit très-simplement l'un des rapports ρ, dès que l'on connaît les précédents.

Ayant construit les droites (Z), attribuons à x_1 une valeur choisie arbitrairement. La première des équations (2) détermine immédiatement une valeur correspondante de x_2, la deuxième équation une valeur correspondante de x_3, et ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)^{\text{ème}}$ équation (2) qui donne une valeur de x_n. Enfin l'équation (3) donne une valeur correspondante de x_{n+1}. Si cette dernière quantité était nulle, l'ensemble des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obtenues comme nous venons de l'indiquer, formerait la solution du système des équations (2). Il n'en sera pas ainsi généralement, puisque x_1 a été pris au hasard. Mais, ayant construit les valeurs calculées $x_1 = O_1M_1$, $x_2 = O_2M_2$, $\ldots$, $x_n = O_nM_n$, $X_{n+1} = O_{n+1}M_{n+1}$, on obtiendra les pivots $I_1, I_2, \ldots, I_n$, en prenant les points où M_1M_2, M_2M_3, $\ldots$, M_nM_{n+1} rencontrent respectivement $(Z_1), (Z_2), \ldots, (Z_n)$. Puis on joindra $O_{n+1}I_n$ qui rencontrera (X_n) en un certain point P_n; pareillement P_nI_{n-1} coupera (X_{n-1}) en un point P_{n-1}, etc. On obtiendra ainsi de proche en proche une série de

points P_n, P_{n-1}, ..., P_3, P_2, P_1, tels que l'ensemble des valeurs $x_1 = O_1P_1$, $x_2 = O_2P_2$, ..., $x_n = O_nP_n$ formera la solution du système des équations (2).

Remarques. — I. Les droites (X), dans ce qui précède, sont assujetties à la seule condition d'être parallèles. Mais on pourra, dans certains cas, choisir leur espacement, de manière à simplifier la construction des droites (Z).

II. Généralement, étant donné un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, il sera nécessaire de lui faire subir une préparation préalable, de manière à le ramener à la forme du système (2), avant d'appliquer la méthode que nous venons d'exposer. Mais il se présentera souvent des cas dans lesquels les équations à résoudre se trouveront immédiatements écrite sous la forme convenable. Ce fait se présente par exemple pour le système d'équations qui détermine les moments fléchissants sur les appuis d'une poutre à plusieurs travées. L'application de notre méthode à ce cas intéressant a fait l'objet d'une note communiquée à l'Académie, dans sa séance du 1er mars. En m'aidant de quelques autres considérations fort simples, j'ai de plus été conduit à une construction purement géométrique de ces moments fléchissants, dont la détermination, dans le cas d'un certain nombre de travées, exige des calculs assez laborieux.

Sur la génération des cycliques et cyclides; par M. L. Saltel.

(Séance du 14 avril 1875)

PROBLÈMES PRÉLIMINAIRES.

Problème I. — *Étant donné dans un plan un cercle* S, *déterminer deux cercles passant respectivement par deux couples de points donnés* (A_1,B_1), (A_2,B_2) *et coupant le cercle* S *aux deux mêmes points? En d'autres termes, trouver deux cercles passant respectivement par* (A_1,B_1), (A_2,B_2) *et ayant même axe radical avec le cercle* S.

Voici la solution que nous proposons et dont la démonstration est évidente : *Par les points* (A_1,B_1) *faites passer un cercle arbitraire* λ_1 ; *soit* I_1 *le point de rencontre de la droite* A_1B_1 *avec l'axe radical des cercles* S_1 *et* λ_1 ; *de même par les points* (A_2,B_2) *faites passer un second cercle quelconque* λ_2, *et soit* I_2 *le point de rencontre de la droite* A_2B_2 *avec l'axe radical des cercles* S *et* λ_1; *la droite* I_1I_2 *rencontre le cercle* S *aux deux points cherchés.*

Problème II. — *Étant donné sur une sphère un cercle* S, *déterminer deux cercles de cette sphère passant respectivement par deux couples de points donnés* (A_1,B_1), (A_2,B_2) *et coupant le cercle* S *aux deux mêmes points?*

De la solution du problème précédent résulte immédiatement la suivante pour ce second problème :

Prenez un point arbitraire P *sur la sphère, et par les points* (A_1,B_1) *tracez sur cette surface un cercle arbitraire* λ_1; *soit* I_1 *le point de rencontre du cercle* PA_1B_1 *avec le cercle qui passe par* P *et par les deux points d'intersection des deux cercles* S *et* λ_1; *de même par les points* (A_2,B_2) *tracez sur la sphère un second cercle arbitraire* λ_2; *soit* I_2 *le point de rencontre du cercle* PA_2B_2 *avec le cercle qui passe par* P *et par les deux points d'intersection des deux cercles* S *et* λ_2; *le cercle* PI_1I_2 *rencontre le cercle* S *aux deux points demandés.*

Problème III. — *Étant donnés trois cercles arbitraires dans l'espace* λ, C_1, C_2, *trouver deux sphères qui passent respectivement par les deux derniers et qui coupent le premier aux deux mêmes points.*

Si l'on considère les points d'intersection (A_1,B_1), (A_2,B_2) des cercles C_1,C_2 avec le plan du cercle λ, la question est évidemment ramenée à celle du premier problème.

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES PLANES (*).

Théorème I. — *Soient* C_1,C_2 *deux points d'une cyclique plane* Σ, *et* (P,Q), (A_1,A_2) *les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par* (C_1,C_2); *si l'on considère la série des cercles passant par* (A_1,A_2) *et coupant* Σ *suivant des couples de points* (M_1,N_1), (M_2,N_2), (M_3,N_3) ,..., *les cercles* (PM_1N_1), (PM_2N_2), (PM_3N_3),..., *contenant tous le point* P, *passent aussi par le point* Q.

Théorème II. — *Soient* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *trois couples de points arbitraires pris dans un même plan ; si, par les deux premiers points* (A_1,B_1), *on mène un cercle quelconque* λ, *et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points* (A_2,B_2), (A_3,B_3) *et coupant le cercle* λ *aux deux points* α_1,α_2, *ces derniers points décrivent une cyclique du* $4^{\text{ème}}$ *ordre contenant les six points* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3).

Théorème III. — *Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclique quelconque* Σ, *trouver une infinité de systèmes de points* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *qui peuvent servir à sa génération.*

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P,Q *deux points arbitraires de la cyclique, et* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques passant par* P,Q ; *ces trois couples de points répondent à la question.*

Remarque. — Parmi les nombreux corollaires que l'on peut déduire de cet important théorème, nous ne citerons que les suivants :

(*) Courbes du 4e ordre ayant pour points doubles les points circulaires à l'infini.

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il est manifeste que si l'on sait déterminer la tangente au point A_1, on saura la déterminer par là même en un point quelconque. Cette dernière détermination résulte immédiatement de la génération que nous venons d'indiquer et l'on est conduit à cette règle :

Soit A'_1 *le second point de rencontre des cercles* $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; *la tangente au point* A_1 *au cercle* $(A_1B_1A'_1)$ *est la tangente demandée.*

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points (A_1,B_1) réunis au point A dans la direction AT, on obtient le cercle osculateur en ce point en procédant comme il suit :

Soit A' *le second point d'intersection des cercles* (AA_2B_2), (AA_3B_3), *le cercle qui est tangent en* A *à la droite* AT *et qui passe par le point* A' *est le cercle osculateur cherché.*

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES SPHÉRIQUES (*).

Théorème I. — *Soient* C_1,C_2 *deux points d'une cyclique sphérique* Σ, *et* (P,Q), (A_1,A_2) *les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par* (C_1,C_2) ; *si l'on considère la série des cercles passant par* (A_1,A_2) *et coupant* Σ *suivant des couples de points* (M_1,N_1), (M_2,N_2), (M_3,N_3),..., *les cercles* (PM_1N_1), (PM_2N_2), (PM_3N_3),..., *contenant tous le point* P, *passent aussi par le point* Q.

Théorème II. — *Soient* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *trois couples de points arbitraires pris sur une même sphère ; si, par les deux premiers points* (A_1,B_1), *on mène un cercle quelconque* λ *situé sur la sphère et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points* (A_2,B_2), (A_3,B_3) *et coupant le cercle* λ *aux deux mêmes points* α_1, α_2, *ces derniers points décriront une cyclique sphérique du* 4ème *ordre contenant les six points* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3).

Théorème III. — *Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie ; mais on peut, étant donné une cyclique sphérique quelconque* Σ, *trouver une infinité de systèmes de points* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3), *qui peuvent servir à sa génération.*

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P, Q *deux points arbitraires de la cyclique, et* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques de la sphère passant par* (P,Q) ; *ces trois couples de points répondent à la question.*

Parmi les corollaires que l'on peut déduire de ce théorème, nous ne citerons que les suivants :

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il suffit évidemment de savoir la déterminer au point A_1. Pour cela, on suivra la règle suivante :

(*) Courbes résultant de l'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère.

Soit A'_1 *le second point de rencontre des cercles* $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; *la tangente au point* A_1 *au cercle* $(A_1B_1A'_1)$ *est la tangente demandée.*

M. Darboux, dans son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 56 et 77, donne deux solutions différentes de ce même problème.

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points A_1, B_1 réunis au point A dans la direction AT, on obtient le cercle osculateur en procédant comme il suit :

Soit A' *le second point d'intersection des cercles* (AA_2B_2), (AA_3B_3), *le cercle qui est tangent en* A *à la droite* AT *et qui passe par le point* A' *est le cercle osculateur cherché* (*).

THÉORÈMES SUR LES CYCLIDES DU 4ème ORDRE (**).

THÉORÈME I. — *Soit* C *un cercle de la cyclide* Σ *et* C_1, C_2 *deux cercles d'intersection de cette surface et de deux sphères passant par le* 1er *cercle* C ; *si l'on considère la série des sphères passant par* C_2 *et coupant* Σ *suivant des cercles* $E_1, E_2, E_3, \ldots$, *les sphères* (PE_1), (PE_2), $(PE_3), \ldots$, *contenant un même point* P *du cercle* C_1, *le contiennent en entier.*

THÉORÈME II. — *Soient* C_1, C_2 *deux cercles arbitraires pris dans l'espace ; si, par deux points* P_1, P_2 *également arbitraires, on mène un cercle* λ *dont le plan et le rayon sont arbitraires, et que l'on considère les deux sphères passant respectivement par les cercles* C_1, C_2 *et coupant le cercle* λ *aux deux mêmes points* α_1, α_2, *ces derniers points décrivent une cyclide du* 4ème *ordre contenant les points* P_1, P_2 *et les deux cercles* C_1, C_2.

THÉORÈME III. — *Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie ; mais on peut, étant donnée une cyclide quelconque* Σ, *trouver une infinité de systèmes de points* P_1, P_2 *et de cercles* C_1, C_2 *qui peuvent servir à sa génération.*

Voici un moyen de les déterminer :

Soit C *un cercle arbitraire de la cyclide et* C', C_1, C_2 *les trois cercles d'intersection de cette surface et de trois sphères quelconques passant par* C ; *deux points arbitraires* P_1, P_2 *pris sur la circonférence* C' *et les deux cercles* C_1, C_2 *répondent à la question.*

Parmi les corollaires de cet important théorème, bornons-nous à remarquer, pour le moment, qu'il enseigne à déterminer le plan tangent en un point quelconque de la surface, au point P_1 par exemple. Il suffit, en effet, de mener en ce point les tangentes aux deux courbes planes que décrivent les points α_1, α_2 pour deux positions différentes du plan du cercle λ, problème que nous avons déjà appris à résoudre.

(*) M. Laguerre a déjà proposé, t. I, p. 101 du *Bulletin* de la Société, une autre solution.
(**) Surfaces du 4e ordre ayant le cercle de l'infini par ligne double.

Seconde note sur la génération des cycliques; par M. L. Saltel.

(Séance du 14 avril 1875)

Dans une précédente communication, j'ai montré avec quelle facilité on peut décrire par points une cyclique Σ plane ou sphérique, lorsqu'on connaît l'un des systèmes de trois couples de points désignés par les lettres (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3), système de points que nous appellerons *associés*. L'objet de la note actuelle a pour but d'enseigner à déterminer, par la règle et le compas, l'un des systèmes de points, lorsqu'on définit la courbe par huit points $A_1,B_1,1,2,3,4,5,6$.

Lemme I. — Décrire une cyclique Σ dans le cas particulier où les huit points $A_1,B_1,1,2,3,4,5,6$ sont tels que les points $(A_1,B_1,1,2,)$ sont sur un même cercle, ainsi que les points $(A_1,B_1,3,4)$.

Soient $5'$ le second point de rencontre des cercles $(1,2,5)$, $(3,4,5)$, et de même $6'$ le second point de rencontre des cercles $(1,2,6)$, $(3,4,6)$; les couples de points

$$(A_1, B_1),\ (5, 5'),\ (6, 6')$$

constituent un système de points *associés*.

Lemme II. — Décrire une cyclique passant par les sept points arbitraires $A_1,B_1,1,2,3,4,5$.

Soient $3'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1,B_1,3)$, $(1,2,3)$, et de même $4'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1,B_1,4)$, $(1,2,4)$; soit en outre $5'$ le second point d'intersection des cercles $(3,3',5)$, $(4,4',5)$, les points

$$(A_1, B_1),\ (1, 2),\ (5, 5')$$

constituent un système de points *associés* à une cyclique Σ'_1, passant par les sept points donnés, c'est-à-dire que l'on obtiendra les deux nouveaux points communs à cette courbe et à un cercle quelconque C, passant par (A_1,B_1), en construisant, ce que nous avons appris à faire, les deux cercles passant respectivement par les points $(1,2)$, $(5,5')$ et par les deux mêmes points du cercle C_1; désignons par μ_1,γ_1 les deux points ainsi obtenus.

Remarque I. — En faisant jouer à deux des points $(1,2,3,4,5)$, à l'exception de $(1,2)$, le même rôle que ces deux derniers viennent de jouer dans la construction de la courbe Σ'_1, on obtiendrait une nouvelle courbe Σ'_2 passant par les sept points donnés et qui couperait le cercle C_1 en deux points μ_2,γ_2, faciles à déterminer. Désignons par V le point de rencontre des droites $\mu_1\gamma_1$, $\mu_2\gamma_2$.

Remarque II. — Il est évident que *toutes* les cycliques passant par les sept points donnés $A_1,B_1,1,2,3,4,5$ rencontrent le cercle C_1 en deux points, en ligne droite avec le point V.

Remarque III. — En suivant la même marche pour les sept points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 6$, on obtiendrait, relativement au cercle C_1, un second point V' en ligne droite avec les deux points d'intersection de ce cercle et de toutes les cycliques passant par ces sept points.

Corollaire I. — Il est manifeste que la ligne droite VV' rencontre le cercle C_1 aux deux mêmes points que la cyclique *cherchée*, c'est-à-dire la cyclique passant par les huit points $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Corollaire II. — Le cercle C_1 passant par les deux points A_1, B_1, on peut dire que nous venons de résoudre ce problème :

Une cyclique étant définie par huit points, trouver les deux nouveaux points d'intersection de cette courbe et d'un cercle quelconque passant par deux de ces huit points.

Corollaire III. — En cherchant les nouvelles intersections (α_1, α_2), (β_1, β_2), de la cyclique définie par les huit points $A_1, A_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, avec deux cercles C_1, C_2, passant par A_1, A_2, et prenant deux des six points $1, 2, 3, 4, 5, 6$, les points $1, 2$, par exemple, on aura huit nouveaux points $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, 1, 2$, définissant la courbe, et qui seront dans les mêmes conditions que les huit points du lemme I.

Corollaire IV. — *Une cyclique étant définie par huit points* $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *on peut toujours trouver un système de trois couples de points associés, parmi lesquels peuvent figurer deux des points donnés.*

C'est là le problème que nous nous étions proposé.

Sur les foyers des cycliques; par M. L. Saltel.

(Séance du 14 avril 1875)

L'objet de cette nouvelle communication est d'enseigner à déterminer géométriquement le foyer singulier d'une *cubique circulaire*, définie par sept points, et d'indiquer une voie qui probablement conduira à la détermination de ces mêmes points dans les *cycliques* du 4ème ordre.

Théorème I. — *Soient* Δ *une parallèle quelconque à l'asymptote réelle d'une cubique circulaire* Σ, *et* C, D *ses deux points de rencontre avec cette courbe. Si, par ces deux points, on mène autant de cercles que l'on veut, coupant* Σ *aux points* (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3),..., *les perpendiculaires élevées sur les milieux des droites* $(\alpha_1\beta_1)$, $(\alpha_2\beta_2)$, $(\alpha_3\beta_3)$,... *passent toutes par le foyer singulier de la cubique.*

Théorème II. — *Si, du foyer singulier d'une cubique circulaire comme centre, on décrit des cercles de rayons arbitraires, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les cordes que ces cercles déterminent sur la cyclique, est un cercle.*

Problème. — *Reconnaître si un point donné* P *est foyer d'une cyclique du* 4ème *ordre, définie par huit points.*

Notre détermination d'un conique qui passe par les quatre points communs à un cercle et à une cyclique, s'appliquant tout aussi bien que le rayon du cercle soit nul ou non nul, on en déduit la solution suivante du problème en question :

Pour reconnaître si un point P *est le foyer d'une cyclique* Σ *du* 4ème *ordre, on considérera ce point comme un cercle de rayon nul, on déterminera une conique* M *passant par ses points communs avec* Σ. *Si* P *est un foyer ordinaire de* Σ, *il devra être un foyer de la conique* M ; *si* P *est un foyer singulier, la conique* M *devra être un cercle.*

Nota. — Si les trois couples de points associés (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) sont respectivement sur trois cercles concentriques, le centre de ce cercle est un foyer singulier de Σ.

Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler, par M. Laguerre.

(Séance du 17 mars 1875.)

1. Soit un polynôme du quatrième degré en x que je représenterai par la forme homogène $U(x,y)$, où y désigne une constante égale à l'unité et introduite pour l'homogénéité des formules, l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x,y)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}}$$

a, comme je l'ai montré précédemment (*), pour intégrale générale l'équation suivante

$$(1) \qquad 6\alpha U_2 + 36H_2 + (3S - \alpha^2)\omega^2 = 0,$$

où α représente une constante arbitraire, ω le déterminant $x\eta - y\xi$, U_2, H_2 les émanants principaux de U et du hessien H de la forme donnée, et S son invariant quadratique.

Cela posé, on a l'identité suivante, que l'on vérifiera facilement,

$$(2) \qquad U(x,y)U(\xi,\eta) - U_2^2 = 4H_2\omega^2 + \frac{S}{3}\omega^4;$$

je l'écrirai plus simplement sous la forme suivante

$$UU' - U_2^2 = 4H_2\omega^2 + \frac{S}{3}\omega^4,$$

d'où

$$S\omega^4 + 12H_2\omega^2 = 3UU' - 3U_2^2.$$

(*) *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre.* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. I, p. 35.)

Multiplions maintenant par ω^2 le premier membre de l'équation (1), et remplaçons $S\omega^4 + 12H_2\omega^2$ par sa valeur tirée de la relation précédente, il viendra

$$6\alpha U_2\omega^2 - \alpha^2\omega^4 + 9UU' - 9U_2^2 = 0,$$

ou

$$9UU' = (3U_2 - \alpha\omega^2)^2;$$

ou encore

$$(3) \qquad U_2 - \sqrt{UU'} = \frac{\alpha}{3}\omega^2.$$

2. Cette nouvelle forme de l'équation d'Euler peut elle-même se transformer d'une façon remarquable.

Décomposons U d'une façon quelconque en un produit de deux facteurs du second degré, en posant

$$U = f(x,y)\varphi(x,y),$$

où

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

et

$$\varphi(x,y) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2.$$

On aura évidemment

$$UU' = f(x,y)\varphi(x,y)f(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta);$$

d'autre part, en désignant par Δ l'invariant quadratique simultané des deux formes f et φ, $AC' + CA' - 2BB'$, on vérifiera facilement l'identité suivante

$$f(x,y)\varphi(\xi,\eta) + f(\xi,\eta)\varphi(x,y) = 2U_2 + \omega^2\frac{\Delta}{3}.$$

Portons ces valeurs de U_2 et de UU' dans l'équation (3), elle deviendra, en faisant pour abréger $f(\xi,\eta) = f'$ et $\varphi(\xi,\eta) = \varphi'$,

$$f\varphi' + f'\varphi - 2\sqrt{f\varphi f'\varphi'} = \omega^2\left(\frac{2\alpha + \Delta}{3}\right);$$

d'où

$$(4) \qquad \sqrt{f\varphi'} - \sqrt{f'\varphi} = \beta\omega,$$

β désignant une constante arbitraire.

D'où la proposition suivante, où j'ai fait disparaître les quantités auxiliaires y et η :

Si l'on décompose d'une façon quelconque le polynôme du quatrième degré, $F(x)$, en deux facteurs du second degré $f(x)$ et $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi)}}$$

est

$$\frac{\sqrt{f(x)\varphi(\xi)} - \sqrt{f(\xi)\varphi(x)}}{x - \xi} = \text{constante}.$$

J'avais déjà déduit cette proposition de considérations purement géométriques, dans une note *Sur les propriétés des coniques qui se rattachent à l'équation d'Euler*, insérée dans les *Nouv. ann. de math.*, 1872.

Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions; par M. Tchebychef.

(Séance du 21 juillet 1875)

Si une fonction entière, entre deux limites quelconques de la variable, s'écarte peu de zéro, et qu'elle ait une valeur considérable en dehors de ces limites; il est certain que la fonction est d'un degré élevé. Quelle est donc la formule qui donne la limite du degré de la fonction entière, d'après ses écarts de zéro, pour des valeurs de la variable comprises entre certaines limites, et sa valeur au delà de ce champ? En cherchant à résoudre ce problème d'après les méthodes exposées dans notre mémoire sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, nous sommes parvenu à ce théorème très-simple :

Théorème. — Si $f(x)$ est une fonction entière du degré n qui, depuis $x = -l$ jusqu'à $x = +l$, ne sorte pas des limites $-L$ et $+L$, et que, pour toutes les valeurs de x en dehors des limites nommées $x = -l$, $x = +l$, les valeurs de la fonction $f(x)$ soient en dehors des limites $-L$ et $+L$, on aura

$$\left(\frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - l^2}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - l^2}}\right)^n > \frac{\sqrt{f^2(x)} + \sqrt{f^2(x) - L^2}}{\sqrt{f^2(x)} - \sqrt{f^2(x) - L^2}},$$

en donnant aux radicaux les valeurs positives.

Essai sur la géométrie à n dimensions; par M. Camille Jordan.

(Séance du 12 mai 1875)

On sait que la fusion opérée par Descartes entre l'algèbre et la géométrie ne s'est pas montrée moins féconde pour l'une de ces sciences que pour l'autre.

Car, si d'une part les géomètres ont appris, au contact de l'analyse, à donner à leurs recherches une généralité jusque-là inconnue, les analystes, de leur côté, ont trouvé un puissant secours dans les images de la géométrie,

tant pour découvrir leurs théorèmes que pour les énoncer sous une forme simple et frappante.

Ce secours cesse lorsqu'on passe à la considération des fonctions de plus de trois variables; aussi la théorie de ces fonctions est-elle relativement fort en retard. Le moment semble venu de combler cette lacune en généralisant les résultats déjà obtenus pour ce cas de trois variables. Un grand nombre de géomètres s'en sont déjà occupés d'un manière plus ou moins immédiate. Nous ne connaissons cependant aucun travail d'ensemble sur ce sujet (*).

Nous nous proposons, dans le présent essai, de montrer comment les principales formules de la théorie de la ligne droite et du plan doivent être généralisées pour s'étendre aux fonctions linéaires d'un nombre quelconque de variables. L'étude de ces questions élémentaires doit naturellement précéder toute recherche relative aux fonctions de degré supérieur.

Bien que ces recherches soient purement algébriques, nous avons cru utile d'emprunter, ainsi que nos devanciers, quelques expressions à la géométrie. Ainsi, nous considérons un *point* comme défini dans l'espace à n dimensions, par les valeurs de n *coordonnées* $x_1, \ldots, x_n$. Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un plan ; k équations linéaires simultanées, un *k-plan* ; $n-1$ équations, une droite. La *distance* de deux points sera $\sqrt{(x_1-x'_1)^2+\ldots}$; etc.

Ces définitions posées, nous étudions, dans la section I de notre Mémoire, les divers degrés de parallélisme qui peuvent exister entre deux multiplans.

Dans la seconde section, nous donnons les conditions de perpendicularité.

Dans la troisième, les formules de transformation des coordonnées.

Les sections suivantes renferment des résultats plus intéressants.

Les sections IV et V sont consacrées à l'étude des relations indépendantes du choix des axes (les coordonnées restant rectangulaires), qui peuvent exister entre deux multiplans. Nos principaux résultats consistent dans les propositions suivantes :

1° *Un système formé d'un k-plan* P_k *et d'un l-plan* P_l *passant par un même point de l'espace a* ρ *invariants distincts,* ρ *étant le plus petit des nombres* k, l, $n-k$, $n-l$. *On peut considérer ces invariants comme définissant les* angles *des deux multiplans.*

2° *Les divers plans perpendiculaires à* P_k *et à* P_l *forment respectivement par leurs intersections un* $n-k$ *plan* P_{n-k} *et un* $n-l$ *plan* P_{n-l}, *formant entre eux les mêmes angles que* P_k *et* P_l.

3° *Si* P_k *et* P_l *n'ont pas de point commun, on aura un invariant de plus, à savoir leur plus courte distance. Cet invariant s'exprime par une fraction,*

(*) Un seul chapitre de cette nouvelle géométrie nous paraît pouvoir être considéré comme à peu près achevé; c'est celui de la courbure des surfaces. (Voir la thèse de M. Morin, 1867, et les mémoires de M. Sophus Lie, *Gœttinger Nachrichten*, 1871.)

dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés de déterminants.

Dans la section VI, nous donnons le système des formules qui relient entre eux les angles mutuels des divers multiplans formés avec n plans donnés quelconques (se coupant au même point). Ces formules se réduisent, pour $n = 3$, à celles de la trigonométrie sphérique. Nous les rattachons à la considération du déterminant de la forme quadratique qui donne la distance de deux points (les n plans donnés étant pris pour plans coordonnés).

Dans la section VII, nous montrons comment une substitution orthogonale de déterminant 1 peut être ramenée par un changement d'axes rectangulaires à une forme canonique simple, dépendant de $\frac{n}{2}$ invariants si n est pair, de $\frac{n-1}{2}$ s'il est impair. Nous donnons les équations différentielles partielles auxquelles satisfont ces invariants. De cette recherche, nous déduisons entre autres résultats la généralisation des théorèmes suivants :

Tout mouvement plan se réduit à une rotation autour d'un point.

Tout mouvement dans l'espace est un mouvement hélicoïdal.

Nous en tirons encore la généralisation de la loi de réciprocité signalée par M. Chasles, et qui a servi de fondement à ses belles recherches sur le mouvement d'un corps solide.

Nous terminons en donnant les lois de la composition des mouvements infiniment petits dans l'espace à 4 dimensions. Le résultat auquel nous arrivons se formule dans ce théorème :

Une rotation R, *autour d'un point dans l'espace à 4 dimensions, peut être représentée dans l'espace à 3 dimensions par deux droites* A *et* B, *de grandeur et de direction convenables. Deux rotations* R_1 *et* R_2, *respectivement représentées par les droites* A_1 *et* B_1, A_2 *et* B_2, *auront pour résultante une rotation représentée par les droites* A, *résultante de* A_1 *et* A_2, *et* B, *résultante de* B_1 *et* B_2 (*ces droites étant combinées suivant la règle du parallélogramme*).

I. DÉFINITIONS. — PARALLÉLISME.

1. Nous définirons la position d'un point dans l'espace à n dimensions au moyen de n coordonnées $x_1, \ldots, x_n$.

Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un *plan ;* deux équations linéaires simultanées, distinctes, et non incompatibles, définiront un *biplan ; k* équations, un *k-plan ;* $n-1$ équations définiront une *droite ;* n équations, un point.

On pourra comprendre tous les êtres géométriques ci-dessus sous le nom générique de *multiplans*.

2. Soient

$$(1) \qquad A_1 = 0, \ldots, A_k = 0$$

les équations d'un k-plan P_k; en les combinant linéairement, on obtiendra une infinité d'équations de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = 0.$$

Les plans représentés par ces diverses équations auront évidemment P_k pour intersection commune, et nous les appellerons pour abréger *les plans générateurs de* P_k. Leurs intersections deux à deux, trois à trois,..., $k-1$ à $k-1$, donneront une infinité de biplans, de triplans, etc., contenant P_k, et qu'on pourra appeler *les biplans*, *les triplans générateurs*, etc., de P_k.

Il est clair que l'on pourra prendre pour définir P_k, au lieu des équations (1), les équations de k plans générateurs quelconques

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = 0, \quad \lambda'_1 A_1 + \ldots + \lambda'_k A_k = 0, \ldots,$$

pourvu que le déterminant des coefficients λ ne soit pas nul.

D'autre part, soit k' un entier quelconque $> k$, et ne dépassant pas n. Si l'on joint aux équations (1), qui déterminent P_k, $k'-k$ nouvelles équations $A_{k+1} = 0, \ldots, A_{k'} = 0$, l'ensemble de ces équations (supposées distinctes et non incompatibles) déterminera un k'-plan contenu en entier dans P_k. Nous dirons que les k'-plans ainsi obtenus sont *les k'-plans de* P_k.

Nous remarquerons enfin que les coordonnées courantes d'un k-plan quelconque

$$A_1 = 0, \ldots, A_k = 0,$$

pourront être exprimées linéairement en fonction de $n-k$ variables auxiliaires indépendantes. Il suffira en effet de poser

$$A_{k+1} = \lambda_1, \ldots, A_n = \lambda_{n-k},$$

$A_{k+1}, \ldots, A_n$ étant des fonctions linéaires quelconques de $x_1, \ldots, x_n$, et l'on aura un système de n équations qui permettront d'exprimer ces coordonnées en fonction des nouvelles variables λ.

3. *Un plan sera déterminé en général par n points.* En effet, l'équation générale du plan contient $n+1$ coefficients, dont les rapports seront déterminés par les n équations linéaires que l'on obtient en substituant successivement dans l'équation les valeurs des coordonnées des n points donnés.

Un k-plan sera déterminé par $n-k+1$ points.

En effet, considérons un plan quelconque assujetti à passer par les $n-k+1$ points. Cette condition donnera entre les $n+1$ coefficients du plan $n-k+1$ équations linéaires; éliminant $n-k+1$ coefficients au

moyen de ces équations de condition, il restera dans l'équation du plan k coefficients arbitraires. Donc l'équation générale des plans passant par les $n-k+1$ points donnés sera de la forme

$$(2) \qquad \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = 0,$$

et le k-plan $A_1 = \ldots = A_k = 0$, intersection commune de ces plans, passera par les $n-k+1$ points donnés. D'ailleurs ce k-plan sera le seul à jouir de cette propriété ; car si un k-plan P_k contient les points donnés, ses plans générateurs les contiendront *a fortiori*, ils seront donc de la forme (2); et P_k se confondra avec le k-plan $A_1 = \ldots = A_k = 0$, intersection commune de ces plans.

4. *Deux plans donnés par les équations*

$$A = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + \alpha = 0,$$
$$B = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + \beta = 0,$$

se couperont en général suivant un biplan. Mais on doit excepter le cas où l'on aurait

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

car les deux équations $A = 0$, $B = 0$ seront incompatibles. On dira dans ce cas que les deux plans sont *parallèles*.

Enfin, si l'on avait

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta},$$

les deux équations $A = 0$, $B = 0$ n'en formeraient plus qu'une seule, et les deux plans seraient non-seulement parallèles, mais coïncidents.

5. *Soient* P_k *et* P_l *deux multiplans quelconques. Si, parmi les plans générateurs de* P_k, *il en est qui soient parallèles à ceux de* P_l, *ils engendreront un multiplan.*

Soient en effet

$$C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$$

des plans générateurs de P_k parallèles à des plans générateurs de P_l et choisis de telle sorte : 1° qu'ils soient indépendants les uns des autres, c'est-à-dire ne soient liés par aucune équation linéaire identique

$$\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho = 0;$$

2° qu'il n'existe aucun plan générateur de P_k indépendant de ceux-là et parallèle à un plan générateur de P_l. Par définition, P_l aura parmi ses plans générateurs des plans

$$C_1 = \delta_1, \ldots, C_\rho = \delta_\rho$$

respectivement parallèles aux précédents. P_k aura parmi ses plans générateurs tous les plans

$$(3) \qquad \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho = 0,$$

qui engendrent le ρ-plan

$$C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0,$$

que nous désignerons par P_ρ. De son côté, P_l aura parmi ses plans générateurs ceux de la forme

$$(4) \qquad \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho = \lambda_1 \delta_1 + \ldots + \lambda_\rho \delta_\rho$$

respectivement parallèles aux précédents et qui engendrent le ρ-plan

$$C_1 = \delta_1, \ldots, C_\rho = \delta_\rho,$$

que nous pourrons désigner par P'_ρ.

Donc, pour qu'un plan générateur de P_k soit parallèle à un plan générateur de P_l, il sera non-seulement nécessaire, mais suffisant, qu'il soit un plan générateur de P_ρ. Et réciproquement, pour qu'un plan générateur de P_l soit parallèle à l'un de ceux de P_k, il sera nécessaire et suffisant qu'il soit l'un des plans générateurs de P'_ρ.

Nous exprimerons cette relation en disant que deux multiplans P_k et P_l ont entre eux un *parallélisme d'ordre* ρ.

Nous dirons d'une manière absolue que P_k est *parallèle* à P_l, si tous ses plans générateurs sont parallèles à ceux de P_l. Il faut évidemment pour cela que l'on ait $k < l$. Si $k = l$, il est clair que P_l sera réciproquement parallèle à P_k.

Si l'on a à la fois $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_\rho = 0$, les divers plans de P_ρ seront non-seulement parallèles à ceux de P'_ρ, mais coïncidents; et P_l et P_k seront contenus dans le même ρ-plan P_ρ.

Au contraire, si λ_1 par exemple est différent de zéro, il faudra pour que les plans (3) et (4) se confondent, que l'on ait la relation

$$\lambda_1 \delta_1 + \ldots + \lambda_\rho \delta_\rho = 0.$$

Déterminant λ_1 par cette relation et substituant dans (3), on aura

$$\lambda_2 \left(C_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_1 \right) + \ldots + \lambda_\rho \left(C_\rho - \frac{\delta_\rho}{\delta_1} C_1 \right) = 0$$

pour l'équation générale des plans générateurs communs à P_k et à P_l; et l'on voit par là que ces plans ne seront autres que les plans générateurs du $\rho - 1$-plan

$$C_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_1 = 0, \ldots, C_\rho - \frac{\delta_\rho}{\delta_1} C_1 = 0,$$

lequel contiendra P_l et P_k.

6. Cherchons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients des équations de P_k et de P_l pour que ces multiplans aient entre eux un parallèlisme d'ordre ρ, en étant ou non contenus dans un même ρ-plan.

Soient

$$(5)\qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0, \end{cases}$$

les équations de P_k ;

$$(6)\qquad \begin{cases} B_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_l = b_{l1}x_1 + \ldots + b_{ln}x_n + \beta_l = 0, \end{cases}$$

celles de P_l. Pour qu'un plan générateur de P_k soit parallèle à un plan générateur de P_l, il faudra qu'on ait la relation identique

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = \mu_1 B_1 + \ldots + \mu_l B_l + \text{constante};$$

ou, en égalant séparément à zéro les coefficients des variables,

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_k a_{k1} = \mu_1 b_{11} + \ldots \mu_l b_{l1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_k a_{kn} = \mu_1 b_{1n} + \ldots + \mu_l b_{ln}; \end{cases}$$

et si l'on veut que les plans générateurs considérés soient non-seulement parallèles mais coïncidents, la constante devra être nulle, et l'on aura par suite une nouvelle équation

$$(8)\qquad \lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_k \alpha_k = \mu_1 \beta_1 + \ldots + \mu_l \beta_l.$$

7. Cela posé, soit d'abord $k + l < n$; le nombre des paramètres λ, μ sera égal ou inférieur à celui des équations (7); si donc ces équations sont distinctes, ce qui est le cas général, on ne pourra y satifaire autrement qu'en annulant tous les paramètres. Donc dans ce cas P_k et P_l n'auront en général aucun parallèlisme.

Mais cette conséquence sera en défaut, si les coefficients a, b sont choisis de telle sorte que les équations (7) se réduisent à un nombre p d'équations distinctes inférieur à $k + l$.

Il est d'ailleurs aisé de voir que p ne peut être inférieur à l. En effet, les équations (6) qui définissent P_l étant supposées distinctes et compatibles entre elles, l'un au moins des déterminants obtenus en prenant l colonnes du tableau

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l1} & \ldots & b_{ln} \end{vmatrix},$$

par exemple celui-ci

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{vmatrix},$$

différera de zéro. Cela posé, les l premières équations (7) seront distinctes, et permettront de déterminer $\mu_1, \dots, \mu_l$ en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; car le déterminant des coefficients par lesquels elles multiplient $\mu_1, \dots, \mu_l$, étant égal à Δ, sera différent de zéro.

Soit donc $p = k + l - \rho$, et $\rho < k$. Les équations (7) permettront de déterminer $\mu_1, \dots, \mu_l$ et $k - \rho$ des quantités λ, telles que $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_k$, en fonction des ρ paramètres indéterminés $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$.

Soit

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_{\rho+1} = m_{\rho+1}\lambda_1 + \dots + n_{\rho+1}\lambda_\rho, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_k = m_k\lambda_1 + \dots + n_k\lambda_k. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0$$

des plans générateurs de P_k, et posant pour abréger

$$(10) \qquad \begin{cases} C_1 = A_1 + m_{\rho+1}A_{\rho+1} + \dots + m_k A_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_\rho = A_\rho + n_{\rho+1}A_{\rho+1} + \dots + n_k A_k, \end{cases}$$

on aura l'équation

$$(11) \qquad \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho = 0$$

pour définir ceux des plans générateurs de P_k qui sont parallèles à ceux de P_l. D'ailleurs les plans $C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$ sont indépendants les uns des autres; car si l'on avait une identité de la forme

$$\nu_1 C_1 + \dots + \nu_\rho C_\rho = 0,$$

on aurait, en substituant les valeurs de $C_1, \dots, C_\rho$ données par l'équation, une nouvelle identité de la forme

$$\nu_1 A_1 + \dots + \nu_\rho A_\rho + \nu_{\rho+1} A_{\rho+1} + \dots = 0,$$

ce qui est absurde, les équations $A_1 = 0, \dots, A_k = 0$ étant supposées distinctes.

Les plans définis par l'équation (11) ne seront donc autres que les plans générateurs du ρ-plan $C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$; et P_k aura avec P_l un parallélisme d'ordre ρ.

En outre, P_k et P_l seront dans un même ρ-plan, si l'équation (8) est une conséquence des équations (7).

8. Supposons maintenant que l'on ait $k+l>n$. On aura un parallélisme d'ordre $k+l-n$ dans le cas général où les équations (7) sont toutes distinctes; un parallélisme d'ordre $k+l-p$ si elles se réduisent à p équations distinctes. Enfin P_k et P_l seront dans un même ρ-plan si l'équation (8) est une conséquence des équations (7).

9. Pour écrire les conditions d'un parallélisme d'ordre quelconque, on n'aura donc qu'à exprimer que les équations (7) se réduisent à p distinctes. Or, on sait que pour cela il faut et il suffit : 1° que l'un au moins des mineurs de degré p formés avec les coefficients de ces équations soit différent de zéro; 2° que tous les mineurs de degré $p+1$ s'annulent.

Pour que P_k et P_l soient dans un même ρ-plan, il faudra de plus que l'équation (8) étant adjointe au système des équations (7), les nouveaux mineurs de degré $p+1$ où figurent les coefficients de cette nouvelle équation s'annulent comme les précédents.

10. *Si deux multiplans* P_k *et* P_l *n'ont aucun parallélisme, ils se coupent suivant un multiplan* P_{k+l}.

En effet, par hypothèse, on ne peut satisfaire à l'équation

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = \mu_1 B_1 + \ldots + \mu_l B_l + \text{constante},$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$\lambda_1(A_1-\alpha_1) + \ldots + \lambda_k(A_k-\alpha_k) = \mu_1(B_1-\beta_1) + \ldots + \mu_l(B_l-\beta_l).$$

Donc les $k+l$ fonctions $A_1-\alpha_1, \ldots, A_k-\alpha_k, B_1-\beta_1, \ldots, B_l-\beta_l$ seront distinctes, et les équations

$$A_1=0, \ldots, A_k=0,\ B_1=0, \ldots, B_k=0$$

lesquelles peuvent se mettre sous la forme

$$A_1-\alpha_1=-\alpha_1, \ldots, B_l-\beta_l=-\beta_l,$$

seront distinctes et compatibles entre elles, et détermineront un $k+l$-plan.

11. *Si* P_k *et* P_l *ont un parallélisme d'ordre* ρ, *sans être dans un même* ρ*-plan, ils ne se couperont pas.*

En effet, P_k et P_l ont par hypothèse des plans générateurs parallèles, mais non coïncidents, $C_1=0$ et $C_1=\delta_1$. Les points de l'intersection devraient satisfaire à ces deux équations, qui sont incompatibles. Si donc P_k et P_l ont un parallélisme d'ordre ρ et se coupent, ils seront dans un même ρ-plan.

12. *Si* P_k *et* P_l *sont dans un même* ρ*-plan, ils se couperont suivant un* $k+l-\rho$*-plan.*

Soit en effet

$$C_1=\ldots=C_\rho=0$$

le ρ-plan formé par les plans générateurs communs à P_k et à P_l. On peut remplacer les équations

$$B_1 = \ldots = B_l = 0,$$

qui définissent P_l, par les équations équivalentes

$$C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0, \; B_{\rho+1} = 0, \ldots, B_l = 0,$$

dont les ρ premières ne sont que des combinaisons des équations $A_1 = 0$, $\ldots$, $A_k = 0$ qui définissent P_k. Le nombre des équations distinctes auxquelles satisfait l'intersection de P_l et de P_k se réduit donc à $k + l - \rho$.

13. *Un k-plan P_k, glissant parallèlement à lui-même sur un l-plan P_l, engendrera un multiplan.*

Les deux multiplans étant encore supposés définis par les équations (5) et (6), les équations d'un k-plan parallèle à P_k et passant par le point $\xi_1, \ldots, \xi_n$ seront

$$(12) \qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n + \alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_k = a_{k1}\xi_1 + \ldots + a_{kn}\xi_n + \alpha_n. \end{cases}$$

Mais si le point $\xi_1, \ldots, \xi_n$ appartient à P_l, on aura

$$(13) \qquad \begin{cases} b_{11}\xi_1 + \ldots + b_{1n}\xi_n + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{l1}\xi_1 + \ldots + b_{ln}\xi_n + \beta_n = 0. \end{cases}$$

Donc, en éliminant $\xi_1, \ldots, \xi_n$ entre les équations (12) et (13), on aura les équations du lieu cherché, qui seront linéaires.

Supposons, pour fixer les idées, que P_k et P_l soient dans un même ρ-plan P_ρ. On pourra admettre que, parmi les plans choisis pour définir P_k et P_l, se trouvent les plans $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$ qui définissent P_ρ; on peut donc admettre que l'on ait

$$A_1 = B_1 = C_1, \ldots, A_\rho = B_\rho = C_\rho.$$

Mais alors les seconds membres des ρ premières équations du système (12) s'annulent en vertu des équations (13). On aura donc, parmi les équations du lieu cherché, les suivantes

$$A_1 = 0, \ldots, A_\rho = 0,$$

et l'on aura les autres en éliminant les n variables ξ entre les $k - \rho$ dernières équations du système (12) et les l du système (13). Cette élimination donnera $l + k - \rho - n$ équations nouvelles qui achèveront de déterminer le lieu cherché.

II. DISTANCES. — PERPENDICULARITÉ.

14. La *distance de deux points* ayant respectivement pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ sera définie par la formule

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

On appellera *distance d'un point p à un multiplan* sa distance au point du multiplan qui en est le plus rapproché. Ce point q sera la *projection* du point p sur le multiplan.

La *distance de deux multiplans* qui ne se coupent pas sera la distance de leurs points les plus voisins.

La *projection d'un multiplan sur un autre* sera le lieu des projections de ses points.

15. Cherchons les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de la projection q d'un point p, dont les coordonnées sont $y_1, \ldots, y_n$ sur le multiplan P_k ayant pour équations

$$(14) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Le point q étant dans P_k, ses coordonnées satisferont aux équations (14). D'autre part, l'expression

$$\Delta^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$$

doit être moindre que pour tout point voisin q' situé dans P_k, et ayant pour coordonnées $x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n$.

La différentielle de Δ^2, égalée à zéro, nous donnera l'équation

$$(15) \qquad (x_1 - y_1)dx_1 + \ldots + (x_n - y_n)dx_n = 0.$$

D'ailleurs q' étant situé dans P_k, $dx_1, \ldots, dx_n$ ne seront pas arbitraires, mais satisferont aux équations

$$(16) \qquad \begin{cases} a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}dx_1 + \ldots + a_{kn}dx_n = 0. \end{cases}$$

L'équation (15), devant être satifaite toutes les fois que les équations (16) le seront, sera une combinaison linéaire de celles-ci; on aura donc, en désignant par $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des multiplicateurs convenables,

$$(17) \qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_k a_{k1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n - y_n = \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_k a_{kn}. \end{cases}$$

Si l'on élimine entre ces équations les k paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, il restera, entre $x_1, \ldots, x_n$, $n-k$ équations distinctes

$$(18) \qquad C_1 = 0, \ldots, C_{n-k} = 0,$$

qui, jointes aux équations (14), détermineront complètement ces quantités.

16. Supposons maintenant que $x_1, \ldots, x_n$, au lieu d'être des inconnues à déterminer, soient les coordonnées d'un point donné de P_k.

Les équations (17) ou (18), dans lesquelles $y_1, \ldots, y_n$ seront considérées comme coordonnées courantes, représenteront le lieu des points de l'espace dont la projection sur P_k tombe sur le point $x_1, \ldots, x_n$. Ce lieu sera donc un $n-k$-plan P_{n-k}. Nous dirons que P_{n-k} est le *$n-k$-plan perpendiculaire à P_k, élevé par le point $x_1, \ldots, x_n$.*

En général, un l-plan P_l sera dit *perpendiculair à un k-plan* P_k, si deux multiplans P'_k, P'_l respectivement parallèles à ceux-là étant menés par un point quelconque p de l'espace, chacun des points de P'_l se projette sur P'_k en un des points d'intersection de P'_k avec P'_l.

17. Cherchons à établir les conditions de perpendicularité.

Soient comme précédemment

$$(19) \qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0 \end{cases}$$

les équations de P'_k;

$$(20) \qquad \begin{cases} B_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_l = b_{l1}x_1 + \ldots + b_{ln}x_n + \beta_l = 0 \end{cases}$$

celles de P'_l.

Un point quelconque de P'_l, tel que $y_1, \ldots, y_n$, sera lié à sa projection $x_1, \ldots, x_n$ par les relations (17); et, pour que P'_l soit perpendiculaire à P'_k, il faudra, par définition, que $x_1, \ldots, x_n$ satisfassent aux relations (20), ainsi que $y_1, \ldots, y_n$. On aura par suite les équations

$$(21) \qquad \begin{cases} b_{11}(x_1 - y_1) + \ldots + b_{1n}(x_n - y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{l1}(x_1 - y_1) + \ldots + b_{ln}(x_n - y_n) = 0, \end{cases}$$

lesquelles devront être une conséquence identique des équations (17), toutes les fois que $x_1, \ldots, x_n$ satisferont aux équations (19), et $y_1, \ldots, y_n$ aux équations (20).

18. Supposons d'abord que P_k et P_l n'aient aucun parallélisme; P'_k et

P'_l n'auront aucun plan générateur commun. Les équations (19) auxquelles satisfont $x_1, \ldots, x_n$ et les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} B'_1 = b_{11}y_1 + \ldots + b_{1n}y_n + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B'_l = b_{l1}y_1 + \ldots + b_{ln}y_n + \beta_n = 0, \end{cases}$$

ne donneront aucune relation entre les quantités $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$.

Supposons en effet qu'on pût en déduire une relation de la forme

$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k + \nu_1 B'_1 + \ldots + \nu_l B'_l = c_1(x_1 - y_1) + \ldots + c_n(x_n - y_n) = 0.$$

Cette relation donnerait, en y changeant $y_1, \ldots, y_n$ en $x_1, \ldots, x_n$, l'identité

$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k + \nu_1 B_1 + \ldots + \nu_l B_l = 0;$$

donc P'_l et P'_k auraient contre l'hypothèse un plan générateur commun

$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k = -(\nu_1 B_1 + \ldots + \nu_l B_l) = 0.$$

Donc les équations (21) devront se déduire des seules équations (17); ce qui donnera, en substituant les valeurs de $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$ tirées des équations (17), et égalant ensuite à zéro les coefficients des indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, le système d'équations suivant

$$(23)\qquad \begin{cases} b_{11}a_{11} + \ldots + b_{1n}a_{1n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{r1}a_{s1} + \ldots + b_{rn}a_{sn} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Chacune de ces kl équations, considérée séparément, exprime que l'un des plans $B_1, \ldots, B_l$ *est perpendiculaire à l'un des plans* $A_1, \ldots, A_k$. D'ailleurs leur forme symétrique montre que *si* P_l *est perpendiculaire à* P_k, *réciproquement* P_k *le sera à* P_l.

19. Supposons plus généralement que P_l et P_k aient un parallélisme d'ordre ρ; P'_k et P'_l seront contenus dans un même ρ-plan.

Soient

$$\begin{aligned} C_1 &= \mu_{11}A_1 + \ldots + \mu_{1k}A_k = \nu_{11}B_1 + \ldots + \nu_{1l}B_l = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + \gamma_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_\rho &= \mu_{\rho 1}A_1 + \ldots + \mu_{\rho k}A_k = \nu_{\rho 1}B_1 + \ldots + \nu_{\rho l}B_l = c_{\rho 1}x_1 + \ldots + c_{\rho n}x_n + \gamma_\rho = 0 \end{aligned}$$

les équations de ce ρ-plan P'_ρ;

$$\begin{aligned} \nu_{11}B_1 + \ldots + \nu_{1l}B_l &= C_1 - \delta_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \nu_{\rho 1}B_1 + \ldots + \nu_{l\rho}B_\rho &= C_\rho - \delta_\rho = 0 \end{aligned}$$

les plans générateurs correspondants de P_l. Les équations (19) et (22) donneront les suivantes

$$\mu_{11}A_1 + \ldots + \mu_{k1}A_k - \nu_{11}B'_1 - \ldots - \nu_{ll}B'_l = c_{11}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{1n}(x_n - y_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mu_{\rho 1}A_1 + \ldots + \mu_{\rho k}A_k - \nu_{\rho 1}B'_1 - \ldots - \nu_{\rho l}B'_l = c_{\rho 1}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{\rho n}(x_n - y_n) = 0.$$

Substituant dans ces équations les valeurs de $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$ tirées des équations (17), on aura ρ équations de condition

$$(24) \qquad D_1 = 0, \ldots, D_\rho = 0$$

entre les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Et pour avoir les conditions de perpendicularité, il faudra, après avoir substitué les valeurs de $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$ tirées des équations (17) dans les équations (21), éliminer ρ des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ à l'aide des équations (24), et alors seulement égaler à zéro les coefficients des paramètres restants ; les équations (21) se décomposeront chacune en $k - \rho$ équations distinctes. Et ces l systèmes de $k - \rho$ équations exprimeront respectivement que le point $x_1, \ldots, x_n$ se trouve sur les plans $B_1 = 0, \ldots, B_l = 0$.

Mais ces systèmes de conditions ne sont pas distincts. En effet, le point $x_1, \ldots, x_n$ se trouvant d'après les données de la question sur les plans $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$, il suffira qu'il se trouve en outre sur $l - \rho$ plans convenablement choisis dans la suite $B_1, \ldots, B_l$ pour qu'il se trouve sur les autres ; ce qui réduira à $(l - \rho)(k - \rho)$ le nombre des conditions distinctes nécessaires à la perpendicularité.

20. D'ailleurs, ici encore, *si* P_l *est perpendiculaire à* P_k, P_k *sera réciproquement perpendiculaire à* P_l. Pour constater avec évidence cette réciprocité, nous pourrons admettre que les plans $C_1, \ldots, C_\rho$ aient été choisis parmi ceux qui servent à définir P'_k et P'_l.

Les autres plans qui définissent ces deux multiplans pourront, en outre, être choisis de telle sorte qu'ils soient perpendiculaires aux précédents. En effet, soit

$$\pi_1 A_1 + \ldots + \pi_k A_k = 0$$

l'un des plans générateurs de P'_k. Il sera perpendiculaire aux plans $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$, si l'on a les équations

$$(\pi_1 a_{11} + \ldots + \pi_k a_{1k})c_{r1} + \ldots + (\pi_1 a_{1n} + \ldots + \pi_k a_{kn})c_{rn} = 0,$$

pour $r = 1, 2, \ldots, \rho$. Ces ρ équations détermineront ρ des constantes π, par exemple $\pi_{k-\rho+1}, \ldots, \pi_k$, en fonction des autres.

Soit, par exemple,

$$\pi_{k-\rho+1} = m_1\pi_1 + \ldots + n_1\pi_{k-\rho}, \ldots,$$
$$\pi_k = m_\rho\pi_1 + \ldots + n_\rho\pi_{k-\rho}.$$

Les plans cherchés seront donnés par la formule

$$\pi_1(A_1 + m_1 A_{k-\rho+1} + \ldots + m_\rho A_n) + \ldots + \pi_\rho(A_\rho + n_1 A_{k-\rho+1} + \ldots + n_\rho A_n) = 0,$$

laquelle représente un $k-\rho$-plan, dans lequel on pourra choisir à volonté $k-\rho$ plans pour achever de définir P'_k.

Soient donc

$$(25)\qquad \begin{cases} A_1 = C_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + \gamma_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\rho = C_\rho = c_{\rho 1}x_1 + \ldots + c_{\rho n}x_n + \gamma_\rho = 0, \\ A_{\rho+1} = a_{\rho+1,1}x_1 + \ldots + a_{\rho+1,n}x_n + \alpha_{\rho+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0 \end{cases}$$

les plans qui définissent P'_k, choisis comme nous l'avons indiqué; on aura une série d'équations de condition contenues dans ce type général

$$(26)\qquad c_{r1}a_{s1} + \ldots + c_{rn}a_{sn} = 0.$$

On pourra de même définir P'_l à l'aide des plans

$$(27)\qquad \begin{cases} C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0, \\ B_{\rho+1} = b_{\rho+1,1}x_1 + \ldots + b_{\rho+1,n}x_n + \beta_{\rho+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_l = b_{l1}x_1 + \ldots + b_{ln}x_n + \beta_n = 0, \end{cases}$$

choisis de telle sorte que l'on ait

$$(28)\qquad c_{r1}b_{s1} + \ldots + c_{rn}b_{sn} = 0.$$

En comparant les équations (25) et (27) aux équations (19) et (20), il viendra

$$(29)\qquad a_{11} = b_{11} = c_{11}, \ldots, a_{\rho n} = b_{\rho n} = c_{\rho n}.$$

Substituons maintenant les valeurs (17) dans les équations (21). En tenant compte des équations (29), (26) et (28), et posant pour abréger

$$c_{r1}c_{s1} + \ldots + c_{rn}c_{sn} = K_{rs},$$
$$a_{r1}b_{s1} + \ldots + a_{rn}b_{sn} = L_{rs},$$

il viendra

$$\lambda_1 K_{11} + \ldots + \lambda_\rho K_{1\rho} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_1 K_{\rho 1} + \ldots + \lambda_\rho K_{\rho\rho} = 0,$$
$$\lambda_{\rho+1} L_{\rho+1,1} + \ldots + \lambda_k L_{\rho+1,k} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_{\rho+1} L_{l1} + \ldots + \lambda_k L_{lk} = 0.$$

Les ρ premières équations de ce système sont le résultat de la substitution des valeurs (17) dans les équations $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$; et toutes les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui satisfont à ces ρ équations doivent satisfaire identiquement aux autres équations du système; ce qui donne les relations

$$L_{\rho+1,1} = 0, \ldots, L_{lk} = 0,$$

lesquelles sont évidemment symétriques par rapport aux a et aux b, et et expriment que *chacun des plans* $A_{\rho+1}, \ldots, A_k$ *est perpendiculaire à chacun des plans* $B_{\rho+1}, \ldots, B_l$.

21. *Tout k-plan* P_k *peut être déterminé d'une infinité de manières par l'intersection de k-plans rectangulaires.*

Soit en effet $A_1 = 0$ un quelconque des plans générateurs de P_k. Nous avons vu que P_k contient un $k-1$-plan P_{k-1} perpendiculaire à P_k. Soit A_2 l'un quelconque des plans générateurs de P_{k-1}; il sera perpendiculaire à A_1. D'ailleurs P_k contiendra un $k-2$-plan P_{k-2} perpendiculaire au biplan (A_1, A_2). Soit A_3 un de ses plans générateurs ; il sera perpendiculaire à A_1 et à A_2. On pourra de même déterminer dans P_k un nouveau plan A_4 perpendiculaire aux trois précédents ; etc.

En posant $k = n$ dans la proposition qui précède, on voit que *par un point quelconque de l'espace on peut faire passer une infinité de systèmes de plans rectangulaires.*

22. *Soient p un point quelconque; q sa projection sur un multiplan* P_k; *r un point quelconque de* P_k; *on aura entre les distances des trois points p,q,r la relation*

$$\overline{pr}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2.$$

En effet, soient $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées des trois points p,q,r; et supposons P_k défini par les équations (14); on aura

$$\begin{aligned}\overline{pr}^2 &= (y_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (y_n - \xi_n)^2 \\ &= (y_1 - x_1 + x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n + x_n - \xi_n)^2 \\ &= \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2 + 2\{(y_1 - x_1)(x_1 - \xi_1) + \ldots + (y_n - x_n)(x_n - \xi_n)\}.\end{aligned}$$

Mais, si l'on remplace $y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (17), le terme entre parenthèses deviendra

$$\lambda_1\{a_{11}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{1n}(x_n - \xi_n)\} + \ldots + \lambda_k\{a_{k1}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{kn}(x_n - \xi_n)\},$$

expression dans laquelle les multiplicateurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s'annulent évidemment; $x_1, \ldots, x_n$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ satisfaisant aux équations (14).

23. *Soit* P_{k+l} *un multiplan contenu dans* P_k ; *la projection de p sur* P_{k+l} *tombera au même point s que la projection de q.*

En effet, r étant un point quelconque de P_{k+l}, on aura, d'après ce qui précède,

$$\overline{pr}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2.$$

En outre, s étant la projection de q sur P_{k+l}, on aura

$$\overline{qr}^2 = \overline{qs}^2 + \overline{rs}^2.$$

On a enfin

$$\overline{ps}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qs}^2.$$

On déduit de tout cela

$$\overline{pr}^2 = \overline{ps}^2 + \overline{sr}^2,$$

équation qui montre que le point s est la projection de p sur P_{k+l}.

III. CHANGEMENTS DE COORDONNÉES.

24. *Des droites parallèles* D,D′, *limitées à des plans parallèles* P,P′, *ont la même longueur.*

Soient en effet

$$(30)\qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{n-1} = a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

les équations de la droite D;

$$(31)\qquad B = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n + \beta = 0$$

celle du plan P;

$$(32)\qquad A_1 = \alpha', \ldots, A_{n-1} = \alpha'_{n-1}$$

celles de D′;

$$(33)\qquad B = \beta'$$

celle de P′.

Les coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de l'intersection de D avec P satisferont aux équations (30) et (31); celles $\eta_1, \ldots, \eta_n$ du point d'intersection de D avec P′ satisferont aux équations (30) et (32); on en déduira

$$(34)\qquad \begin{cases} a_{11}(\eta_1 - \xi_1) + \ldots + a_{1n}(\eta_n - \xi_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-1,1}(\eta_1 - \xi_1) + \ldots + a_{n-1,n}(\eta_n - \xi_n) = 0, \\ b_1(\eta_1 - \xi_1) + \ldots + b_n(\eta_n - \xi_n) + \beta' = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées $\xi'_1, \ldots, \xi'_n, \eta'_1, \ldots, \eta'_n$ des points d'intersection de D′ avec P et avec P′ satisferont à ces mêmes équations; on en déduira

$$\eta'_1 - \xi'_1 = \eta_1 - \xi_1, \ldots, \eta'_n - \xi'_n = \eta_n - \xi_n,$$

d'où

$$(\eta'_1 - \xi'_1)^2 + \ldots + (\eta'_n - \xi'_n)^2 = (\eta_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (\eta_n - \xi_n)^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons d'ailleurs que les valeurs de $\eta_1 - \xi_1, \ldots, \eta_n - \xi_n$ déduites des équations (34) varient proportionnellement à la constante β'; d'où cette conclusion :

Trois plans parallèles coupent proportionnellement deux droites quelconques.

25. *Le lieu des points dont la distance à un plan fixe* P, *comptée suivant une direction donnée, est constante sera donc un plan parallèle à* P.

Un système de n plans indépendants P, Q, ... étant donné, la position d'un point dans l'espace sera complétement déterminée lorsqu'on connaîtra sa distance à chacun d'eux, cette distance étant comptée, par exemple, dans la direction de l'intersection des $n-1$ autres plans. En effet, ces distances détermineront n plans, respectivement parallèles à P,Q,..., et dont l'intersection donnera le point cherché.

Les distances ci-dessus $X_1, \ldots, X_n$ formeront donc un nouveau système de coordonnées qui pourront servir, au lieu de $x_1, \ldots, x_n$, pour définir les points de l'espace.

26. Les nouvelles coordonnées sont liées aux anciennes par des équations linéaires.

Soient en effet

$$(35) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + \alpha_n = 0 \end{cases}$$

es équations des plans P,Q, ... Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées d'un point quelconque. La parallèle à l'intersection des plans Q, ..., menée par ce point, aura pour équations

$$(36) \qquad a_{r1}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{rn}(x_n - \xi_n) = 0 \quad (r = 2, \ldots, n),$$

et les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de son intersection avec P satisferont en outre à l'équation de P, ou ce qui revient au même à celle-ci

$$(37) \quad a_{11}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{1n}(x_n - \xi_n) = a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n - \alpha_1.$$

Posons, pour abréger,

$$a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n - \alpha_1 = L,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\frac{d\Delta}{da_{rs}} = b_{rs},$$

$$\sqrt{b_{r1}^2 + \dots + b_{rn}^2} = M_r;$$

on déduira des équations (36) et (37) les suivantes

$$x_1 - \xi_1 = \frac{b_{11}L}{\Delta}, \dots, x_n - \xi_n = \frac{b_{1n}L}{\Delta},$$

$$X_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2} = \frac{M_1}{\Delta}L = \frac{M_1}{\Delta}(a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n - \alpha_1).$$

On trouvera de même, pour toute valeur de r,

$$X_r = \frac{M_r}{\Delta}(a_{r1}\xi_1 + \dots + a_{rn}\xi_n - \alpha_r), \tag{38}$$

Renversant ces égalités, il viendra

$$\xi_r = \frac{b_{1r}}{M_1}X_1 + \dots + \frac{b_{nr}}{M_n}X_n + \frac{b_{1r}\alpha_1 + \dots + b_{nr}\alpha_n}{\Delta}. \tag{39}$$

27. Il est aisé d'exprimer la distance de deux points en fonction des nouvelles coordonnées.

Soient, en effet, $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ et $X'_1, \dots, X'_n$ les coordonnées d'un second point. Elles satisferont aux équation (36) et (39); on aura, par suite,

$$\xi_r - \xi'_r = \frac{b_{1r}}{M_1}(X_1 - X'_1) + \dots + \frac{b_{nr}}{M_n}(X_n - X'_n).$$

La distance D des deux points sera donnée par la formule

$$D^2 = \sum_r (\xi_r - \xi'_r)^2 = \sum_r (X_r - X'_r)^2$$
$$+ 2\sum_{rs} \frac{b_{r1}b_{s1} + \dots + b_{rn}b_{sn}}{M_r M_s}(X_r - X'_r)(X_s - X'_s).$$

Cette formule se simplifie lorsque les nouveaux plans coordonnés sont orthogonaux.

On a, en effet, par définition,

$$a_{r1}a_1 + \dots + a_{rn}a_{sn} = 0, \quad \text{si } r = s. \tag{40}$$

On peut d'ailleurs, sans rien changer au système des nouveaux plans, multiplier l'équation de chacun d'eux par une constante, telle que l'on ait

$$a_{r1}^2 + \dots + a_{rn}^2 = 1.$$

Mais alors $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ seront les coefficients d'une substitution orthogonale; et, d'après les propriétés connues de ces substitutions, on aura

$$a_{1r}^2 + \ldots + a_{nr}^2 = 1, \quad a_{1r}a_{1s} + \ldots + a_{nr}a_{ns} = 0,$$

$$\Delta = \pm 1, \quad \frac{b_{rs}}{\Delta} = a_{sr}, \quad M_r = \sqrt{\Delta^2(a_{1r}^2 + \ldots + a_{nr}^2)} = 1,$$

$$(41) \qquad \frac{b_{r1}b_{s1} + \ldots + b_{rn}b_{sn}}{M_r M_s} = \Delta^2(a_{1r}a_{1s} + \ldots + a_{nr}a_{ns}) = 0;$$

de sorte que D^2 se réduit à une somme de carrés.

Réciproquement, si les équations (41) sont satisfaites, les équations (39) représenteront une substitution orthogonale. La substitution réciproque définie par les équations (38) sera aussi orthogonale. Les équations (40) seront donc satisfaites; les nouveaux plans coordonnés seront donc perpendiculaires entre eux.

IV. INVARIANTS ANGULAIRES.

28. La transformation des coordonnées dans l'espace à n dimensions présente les mêmes avantages que dans la géométrie ordinaire. Elle permet de changer les équations qui représentent une même figure, et de les simplifier par un choix convenable des indéterminées qui figurent dans les transformations.

Deux figures quelconques tracées dans l'espace sont considérées comme *pareilles*, lorsqu'en les rapportant à des systèmes de coordonnées orthogonales, convenablement choisis pour chacune d'elles, on peut les représenter par les mêmes équations.

Si les systèmes orthogonaux auxquels ces deux figures sont respectivement rapportées sont tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une substitution orthogonale de coefficient 1, ces deux figures seront considérées comme *égales* et ne différant que par leur situation dans l'espace; elles seront *symétriques*, si le déterminant de la substitutiin est égal à -1.

29. *Tous les k-plans sont à la fois égaux et symétriques.* Nous avons vu en effet qu'un k-plan quelconque P_k peut être considéré comme résultant de l'intersection de k plans rectangulaires. En un point quelconque de P_k, élevons le P_{n-k} plan qui lui est perpendiculaire. Il sera lui-même l'intersection de $n-k$ plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires aux précédents. Prenant les n plans ainsi définis pour plans coordonnés, les équations de P_k prendront la forme

$$x_1 = 0, \ldots, x_k = 0.$$

Les équations d'un k-plan quelconque étant réductibles à cette même forme, ce k-plan sera identique ou symétrique à P_k. Mais il sera à la fois

identique et symétrique; car P_k est symétrique à lui-même, ses équations n'étant pas altérées lorsqu'on y change x en $-x$ (opération qui est une substitution orthogonale de déterminant -1).

30. Considérons maintenant un système de deux plans P,Q qui se coupent. Prenons pour origine l'un des points de l'intersection, pour plan des x_1 le plan P, pour plan des x_2 un plan rectangulaire à celui-là passant par le biplan (P,Q), et pour les autres plans coordonnés, $n-2$ plans rectangulaires, situés dans le $n-2$-plan perpendiculaire à (P,Q). Les équations des deux plans prendront la forme

$$x_1 = 0,$$
$$ax_1 + bx_2 = 0,$$

ou, en divisant la seconde équation par $\sqrt{a^2+b^2}$, ce qui est permis, et posant $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$,

$$(42) \qquad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

La forme canonique à laquelle nous pouvons réduire les équations d'un système de deux plans contient donc comme paramètre un angle α. Donc tous les systèmes de deux plans ne sont pas pareils, mais diffèrent entre eux par un élément caractéristique.

31. On pouvait voir *a priori* qu'il en devait être ainsi. Considérons en effet les équations de deux plans sous leur forme générale

$$P = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + \alpha = 0,$$
$$Q = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n + \beta = 0,$$

Soient $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées de l'un quelconque q des points de Q. Sa projection $x_1, \ldots, x_n$ sur P sera donnée par les relations

$$x_1 - y_1 = \lambda a_1, \ldots, x_n - y_n = \lambda a_n,$$

λ étant une constante à déterminer par la condition que $x_1, \ldots, x_n$ satisfassent à l'équation $P = 0$, ou ce qui revient au même, à la suivante

$$a_1(x_1 - y_1) + \ldots + a_n(x_n - y_n) = L.$$

en posant, pour abréger, $L = a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - \alpha$.

On déduira de là

$$\lambda = \frac{L}{a_1^2 + \ldots + a_n^2},$$

et la distance D des deux points $y_1, \ldots, y_n$ et $x_1, \ldots, x_n$ sera donnée par la formule

$$(43) \qquad D^2 = \lambda^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = \frac{L^2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Cherchons maintenant la distance Δ de q à l'intersection des plans P, Q. La projection $z_1, \ldots, z_p$ du point p sur son intersection sera donnée par les relations

$$z_1 - y_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, z_n - y_n = \lambda a_n + \mu b_n,$$

les paramètres λ, μ devant être déterminés par la condition que $z_1, \ldots, z_n$ satisfassent aux relations $P = 0$, $Q = 0$, ou, ce qui revient au même, à celles-ci

$$a_1(z_1 - y_1) + \ldots + a_n(z_n - y_n) = L,$$
$$b_1(z_1 - y_1) + \ldots + b_n(z_n - y_n) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda \Sigma_r a_r^2 + \mu \Sigma_r a_r b_r = L, \quad \lambda \Sigma_r a_r b_r + \mu \Sigma_r b_r^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\Sigma b_r^2 . L}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}, \quad \mu = -\frac{\Sigma a_r b_r . L}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\Delta^2 = (\lambda a_1 + \mu b_1)^2 + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n)^2,$$

il vient, en supprimant le facteur commun $\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2$,

$$(44) \qquad \Delta^2 = \frac{\Sigma b_r^2 . L^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}.$$

Cette équation, comparée à l'équation (43), donnera

$$(45) \qquad \frac{D^2}{\Delta^2} = \frac{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2}.$$

Le rapport $\frac{D^2}{\Delta^2}$ est donc indépendant de la situation du point q dans le plan Q, et égal à une constante K.

Remplaçons maintenant le système actuel de coordonnées par un autre système quelconque, également rectangulaire. On aura $\frac{D^2}{\Delta^2} = K'$, K' étant la fonction analogue à K formée avec les nouveaux coefficients. Mais les distances D et Δ ne sont pas altérées par les substitutions orthogonales; on aura donc $K = K'$. Donc la fonction K est un *invariant* pour toute substitution orthogonale; et deux systèmes de deux plans ne pourront être pareils, s'ils donnent des valeurs différentes de cet invariant.

Les deux plans étant mis sous la forme canonique (42), il viendra

$$K = \sin^2\alpha.$$

La quantité

$$1 - K^2 = \frac{(\Sigma a_r b_r)^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2} = \cos^2\alpha$$

sera un autre invariant, symétrique comme le premier par rapport aux coefficients des deux plans.

L'angle α peut être appelé l'*angle des deux plans.*

32. Il est à remarquer que si $\sin^2\alpha$ et $\cos^2\alpha$ sont des invariants, il n'en est pas de même de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, coefficients de l'équation canonique du plan Q. En effet, en changeant le signe d'une des coordonnées x_1, x_2, ou de toutes deux, on pourra changer le signe de ces coefficients.

33. Passons à la considération d'un système de deux multiplans P_k, P_l, ayant un point commun π. Pour traiter la question dans toute sa généralité, nous supposerons :

1° Que P_k et P_l sont dans un même ρ-plan P_ρ (sans être dans un même $\rho + 1$-plan);

2° Que les multiplans P_{n-k}, P_{n-l} élevés par le point π perpendiculairement à P_k et à P_l sont dans un même σ-plan P_σ (sans être dans un même $\sigma + 1$ plan);

3° Que P_{n-k} et P_l sont dans un même τ-plan P_τ (sans être dans un même $\tau + 1$-plan);

4° Que P_{n-l} et P_k sont dans un même υ-plan P_υ (sans être dans un même $\upsilon + 1$-plan).

Nous prendrons pour plans coordonnés :

1° ρ plans rectangulaires

$$x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_ρ ;

2° σ plans rectangulaires

$$y_1 = 0, \ldots, y_\rho = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_σ ;

3° τ plans rectangulaires

$$z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_τ ;

4° υ plans rectangulaires

$$u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_υ ;

5° $k-\rho-\upsilon=\alpha$ plans rectangulaires

$$v_1=0, \ldots, v_\alpha=0$$

choisis abitrairement parmi les plans générateurs du multiplan P_α mené par P_k perpendiculairement à P_ρ et à P_υ;

6° $n-k-\sigma-\tau=\beta$ plans rectangulaires

$$w_1=0, \ldots, w_\beta=0$$

choisis abitrairement parmi les plans générateurs du multiplan P_β mené par P_{n-k} perpendiculairement à P_σ et à P_τ.

Il est clair que les plans coordonnés ainsi choisis seront tous rectangulaires entre eux, et que les équations de P_k prendront la forme

$$x_1=0, \ldots, x_\rho=0,$$
$$u_1=0, \ldots, u_\upsilon=0,$$
$$v_1=0, \ldots, v_\alpha=0.$$

Quant à P_l, il résultera de l'intersection des plans

$$x_1=0, \ldots, x_\rho=0,$$
$$z_1=0, \ldots, z_\tau=0$$

avec un $l-\rho-\tau=\gamma$-plan P_γ perpendiculaire à ceux-ci. P_γ étant d'ailleurs perpendiculaire à P_{n-l}, le sera aux plans

$$y_1=0, \ldots, y_\sigma=0, \quad u_1=0, \ldots, u_\upsilon=0$$

contenus dans P_{n-l}. Donc les équations de ses plans générateurs se réduiront à la forme

$$(46) \qquad \begin{cases} A_1=a_{11}v_1+\ldots+a_{1\alpha}v_\alpha+b_{11}w_1+\ldots+b_{1\beta}w_\beta=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\gamma=a_{\gamma 1}v_1+\ldots+a_{\gamma\alpha}v_\alpha+b_{\gamma 1}w_1+\ldots+b_{\gamma\beta}w_\beta=0. \end{cases}$$

La comparaison des deux multiplans P_k *et* P_l *se trouve ainsi ramenée à celle du* γ*-plan* P_γ *avec le* α*-plan* P_α *intersection des plans*

$$v_1=0, \ldots, v_\alpha=0.$$

Cherchons à effectuer cette dernière comparaison.

34. Il est aisé de voir en premier lieu que *les trois entiers* α, β, γ *sont égaux.*

En effet, si γ était $>\alpha$, on pourrait en combinant les γ équations (46) éliminer $v_1, \ldots, v_\alpha$ et obtenir l'équation d'un plan générateur de P_γ et dont l'équation se réduirait à la forme

$$(47) \qquad c_1w_1+\ldots+c_\beta w_\beta=0.$$

Ce plan serait perpendiculaire à P_α et par suite à P_k; et en joignant son équation à celles qui déterminent P_τ, on aurait un $\tau+1$ plan contenant à la fois P_{n-k} et P_l, contrairement à ce qui a été supposé.

Si γ était $<\alpha$, on pourrait déterminer dans P_α un $\alpha-\gamma$-plan perpendiculaire à P_γ. Car l'équation générale des plans générateurs de P_α

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_\alpha v_\alpha = 0$$

contient α paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ et les conditions de perpendicularité sont au nombre de γ seulement; donc $\alpha-\gamma$ paramètres resteraient indéterminés. En joignant les équations de ce $\alpha-\gamma$-plan à celles de P_υ, on obtiendrait, contre l'hypothèse, un $\upsilon+\alpha-\gamma$-plan contenant à la fois P_k et P_{n-l}.

Donc $\gamma=\alpha$.

Si γ était $>\beta$, on pourrait éliminer $w_1, \ldots, w_\beta$ entre les équations (46) de manière à obtenir un plan générateur de P_γ, dont l'équation serait de la forme

$$c_1 v_1 + \ldots + c_\alpha v_\alpha = 0.$$

Ce plan serait donc l'un des plans générateurs de P_k, et en joignant son équation à celle de P_ρ on obtiendrait, contre l'hypothèse, un $\rho+1$-plan contenant à la fois P_k et P_l.

Si γ était $<\beta$, on pourrait déterminer dans P_β un $\beta-\gamma$-plan perpendiculaire à P_γ. En joignant les équations de ce $\beta-\gamma$-plan à celles de P_σ, on aurait, contre l'hypothèse, un $\sigma+\beta-\gamma$-plan contenant à la fois P_{n-k} et P_{n-l}.

Donc $\gamma=\beta=\alpha$.

Les équations (46) pourront donc s'écrire sous la forme

$$(48)\quad A_r = a_{r1}v_1 + \ldots + a_{r\alpha}v_\alpha + b_{r1}w_1 + \ldots + b_{r\alpha}w_\alpha = 0 \quad (r=1,2,\ldots,\alpha).$$

35. En second lieu, *les α fonctions de la forme*

$$(49)\qquad B_r = a_{r1}v_1 + \ldots + a_{r\alpha}v_\alpha$$

sont toutes distinctes; car, si elles étaient liées par une équation linéaire

$$k_1 B_1 + \ldots + k_\alpha B_\alpha = 0,$$

P_γ aurait un plan générateur

$$k_1 A_1 + \ldots + k_\alpha A_\alpha = 0$$

dont l'équation se réduirait à la forme (47), résultat dont nous avons démontré l'impossibilité (n° 34).

Les fonctions B_r étant distinctes, on pourra résoudre les équations (49) par rapport à $v_1, \ldots, v_\alpha$ et en tirer des relations inverses, de la forme

$$v_r = e_{r1}B_1 + \ldots + e_{r\alpha}B_\alpha \quad (r=1,2,\ldots,\alpha).$$

Cela posé, il est clair que les équations des plans

$$(50) \qquad C_r = e_{r1}A_1 + \ldots + e_{r\alpha}A_\alpha = 0$$

se réduiront à la forme

$$(51) \qquad C_r = v_r + b'_{r1}w_1 + \ldots + b'_{r\alpha}w_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

et l'on pourra considérer P_γ comme déterminé, non plus par l'intersection des plans

$$A_1 = 0, \ldots, A_\alpha = 0,$$

mais par l'intersection des plans

$$C_1 = 0, \ldots, C_\alpha = 0$$

dont les équations ont déjà une forme plus simple.

36. Pour obtenir une simplification ultérieure, considérons la fonction

$$\Sigma_\varrho (b'_{1\varrho}w_1 + \ldots + b'_{\alpha\varrho}w_\alpha)^2 = \Phi(w_1, \ldots, \Phi w_\alpha).$$

On peut déterminer une substitution orthogonale, à coefficients réels,

$$(52) \qquad \begin{vmatrix} w_1 & f_{11}w_1 + \ldots + f_{\alpha 1}w_\alpha \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_\alpha & f_{\alpha 1}w_1 + \ldots + f_{\alpha\alpha}w_\alpha \end{vmatrix},$$

qui, étant opérée sur cette fonction, en fasse disparaître les rectangles (Cauchy, *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires, etc.*; *Exercices de mathématiques*, t. IV). Ces coefficients étant ainsi déterminés, remplaçons les plans coordonnés

$$v_1 = 0, \ldots, v_\alpha = 0,$$

dont l'intersection détermine P_α, par de nouveaux plans rectangulaires

$$(53) \qquad v'_1 = 0, \ldots, v'_\alpha = 0$$

déterminés par les relations

$$(54) \qquad v'_r = f_{r1}v_1 + \ldots + f_{r\alpha}v_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

D'autre part, employons pour définir P_γ, au lieu des équations

$$C_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

le système équivalent formé des équations suivantes

$$(55) \qquad A'_r = f_{r1}C_1 + \ldots + f_{r\alpha}C_{r\alpha} = v'_r + b''_{r1}w_1 + \ldots + b''_{r\alpha}w_\alpha = 0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$b''_{r\rho} = f_{r1} b'_{1\rho} + \ldots + f_{r\alpha} b'_{\alpha\rho} \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, \alpha \\ \rho = 1, 2, \ldots, \alpha \end{pmatrix}.$$

On aura

$$\Sigma_\rho (b''_{1\rho} w_1 + \ldots + b''_{\alpha\rho} w_\alpha)^2 = \Sigma_\rho [\Sigma_r b'_{r\rho} (f_{r1} w_1 + \ldots + f_{r\alpha} w_\alpha)]^2$$
$$= \Phi (f_{11} w_1 + \ldots + f_{\alpha 1} w_\alpha, \ldots, f_{1\alpha} w_1 + \ldots + f_{\alpha\alpha} w_\alpha).$$

Donc cette expression ne contiendra pas les rectangles des variables, ce qui donnera les équations de condition

$$(56) \qquad \Sigma_\rho b''_{r\rho} b''_{s\rho} = 0 \quad (r \gtrless s),$$

lesquelles expriment que les plans $A'_1, \ldots, A'_\alpha$ sont rectangulaires entre eux.

37. Soit d'ailleurs

$$(57) \qquad \Sigma_\rho b''^2_{r\rho} = g_r^2 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Les relations (56) et (57), étant respectivement divisées par $g_r g_s$ et par g_r^2, montrent que les quantités

$$\frac{b''_{11}}{g_1}, \ldots, \frac{b''_{r\rho}}{g_r}, \ldots, \frac{b''_{\alpha\alpha}}{g_\alpha}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Prenant pour coordonnées, au lieu de $w_1, \ldots, w_\alpha$, les suivantes

$$(58) \qquad w'_r = \frac{b''_{r1}}{g_r} w_1 + \ldots + \frac{b''_{r\alpha}}{g_r} w_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

P_α sera toujours déterminé par les équations (53); mais les équations de P_γ se réduiront à la forme simple

$$(59) \qquad A'_r = v'_r + g_r w'_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

où ne figurent plus que α paramètres $g_1, \ldots, g_r$.

Posons

$$g_r = \operatorname{tang} \theta_r,$$

et multiplions les équations (59) par $\cos \theta_r$; elles prendront la forme

$$(60) \qquad A'_r = v'_r \cos \theta_r + w'_r \sin \theta_r = 0.$$

Nous dirons que $\theta_1, \ldots, \theta_\alpha$ sont *les angles des deux α-plans* P_α *et* P_γ.

38. Les quantités $\cos^2 \theta_r$, $\sin^2 \theta_r$ sont des invariants orthogonaux. On peut le démontrer de deux manières.

En premier lieu, soient

$$\lambda_1 v'_1 + \ldots + \lambda_\alpha v_\alpha$$

l'un quelconque des plans générateurs de P_α,

$$\mu_1(v'_1 \cos\theta_1 + w'_1 \sin\theta_1) + \ldots + \mu_\alpha(v'_\alpha \cos\theta_\alpha + w'_\alpha \sin\theta_\alpha)$$

l'un quelconque des plans générateurs de P_γ. L'angle φ de ces deux plans sera donné par la formule

$$(61) \qquad \cos^2\varphi = \frac{(\lambda_1\mu_1 \cos\theta_1 + \ldots + \lambda_\alpha\mu_\alpha \cos\theta_\alpha)^2}{(\mu_1^2 + \ldots + \mu_\alpha^2)(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_\alpha^2)} = \frac{N^2}{ML}.$$

Si l'on fait varier les indéterminées λ et μ, les maxima et minima de cette expression seront évidemment des invariants.

Supposons d'abord que les λ soient seuls variables. Si les λ sont déterminés de manière à donner à $\frac{M}{N}$ sa valeur maximum ou minimum t^2, on aura

$$t^2 = \frac{N^2}{ML} = \frac{N^2 + d.N^2}{ML + MdL},$$

quelles que soient les variations $d\lambda_1, \ldots, d\lambda_\alpha$. On en déduit

$$d.N^2 = t^2 MdL,$$

et, par suite,

$$\frac{dN^2}{d\lambda_1} = t^2 M \frac{dL}{d\lambda_1}, \ldots, \frac{dN^2}{d\lambda_\alpha} = t^2 M \frac{dL}{d\lambda_\alpha},$$

ou

$$(62) \qquad N\mu_1 \cos\theta_1 = t^2 M\lambda_1, \ldots, N\mu_\alpha \cos\theta_\alpha = t^2 M\lambda_\alpha.$$

Tirant de là les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, substituant dans (61) et réduisant, il vient

$$(63) \qquad t^2 = \cos^2\varphi = \frac{\mu_1^2 \cos^2\theta_1 + \ldots + \mu_\alpha^2 \cos^2\theta_\alpha}{\mu_1^2 + \ldots + \mu_\alpha^2} = \frac{R}{S}.$$

39. Faisons maintenant varier les quantités $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$. La loi de variation de t^2, qui résulte de la formule (63) peut être représentée géométriquement. En effet, t^2 ne dépendant que des rapports des quantités $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$, on peut supposer qu'on les fait varier de telle sorte qu'on ait toujours $S = 1$. Cela posé, prenons dans un espace à α dimensions une droite de longueur $r = \frac{1}{t^2}$, et faisant avec les axes coordonnés les angles $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$. Le lieu des extrémités de ces droites sera l'ellipsoïde à α dimensions

$$1 = X_1^2 \cos^2\theta_1 + \ldots + X_\alpha^2 \cos^2\theta_\alpha.$$

40. Il reste à obtenir les maxima et minima de t^2. Soit s^2 l'un d'eux : on aura

$$s^2 = \frac{R}{S} = \frac{R + dR}{S + dS} = \frac{dR}{dS},$$

d'où

$$\frac{dR}{d\mu_1} = s^2 \frac{dS}{d\mu_1}, \ldots, \frac{dR}{d\mu_\alpha} = s^2 \frac{dS}{d\mu_\alpha},$$

ou

$$(64) \qquad \mu_1 \cos^2\theta_1 = \mu_1 s^2, \ldots, \mu_\alpha \cos^2\theta_\alpha = \mu_\alpha s^2.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$s^2 = \cos^2\theta_\rho, \ \mu_1 = \ldots = \mu_{\rho-1} = \mu_{\rho+1} = \ldots = \mu_\alpha = 0,$$

et les équations (62) donneront ensuite les valeurs correspondantes des indéterminées λ :

$$(65) \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\rho-1} = \lambda_{\rho+1} = \ldots = \lambda_\alpha = 0.,$$

Il existe donc α maxima et minima distincts qui correspondront aux angles respectivement formés par les plans $A_1, \ldots, A_\alpha$ avec les plans correspondants $A'_1, \ldots; A'_\alpha$.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Étant donnés deux α-plans P_α et P_γ, n'ayant qu'un seul point commun, si l'on cherche ceux de leurs plans générateurs dont l'angle est maximum ou minimum, on obtiendra deux systèmes associés de plans rectangulaires réels $A_1, \ldots, A_\alpha$ et $A'_1, \ldots, A'_\alpha$: les maxima et minima cherchés ne sont autres que les angles des multiplans P_α et P_γ.

41. Soient, en second lieu, $v'_1, \ldots, v'_\alpha, w'_1, \ldots, w'_\alpha$ les coordonnées d'un point quelconque de P_γ. Sa distance h au multiplan P_α défini par les équations

$$v'_1 = \ldots = v'_\alpha = 0$$

sera évidemment donnée par la formule

$$h^2 = v'^2_1 + \ldots + v'^2_\alpha.$$

D'autre part, sa distance k à l'origine des coordonnées sera donnée par la formule

$$k^2 = v'^2_1 + \ldots + v'^2_\alpha + w'^2_1 + \ldots + w^2_\alpha,$$

ou, en tenant compte des équations (60),

$$k^2 = v'^2_1 + \ldots + v'^2_\alpha + v'^2_1 \cot^2\theta_1 + \ldots + v^2_\alpha \cot^2\theta_\alpha = \frac{v'^2_1}{\sin^2\theta_1} + \ldots + \frac{v'^2_\alpha}{\sin^2\theta_\alpha}.$$

Cela posé, les maxima et minima de $\frac{h^2}{k^2}$ sont évidemment des invariants. Soit u^2 l'un d'entre eux. On aura, comme tout à l'heure,

$$u^2 = \frac{h^2}{k^2} = \frac{h^2 + d.h^2}{y^2 + d.k^2},$$

d'où

$$\frac{d.h^2}{dv'_1} = u^2 \frac{d.k^2}{dv'_1}, \ldots, \frac{d.h^2}{dv'_\alpha} = u^2 \frac{d.k^2}{dv'_\alpha},$$

ou

$$v'_1 = \frac{u^2 v'_1}{\sin^2 \theta_1}, \ldots, v'_\alpha = u^2 \frac{v'_\alpha}{\sin^2 \theta_\alpha}.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$u^2 = \sin^2 \theta_\rho, \; v'_1 = \ldots = v'_{\rho-1} = v'_{\rho+1} = \ldots = v'_\alpha = 0.$$

On aura donc α invariants distincts, qui seront les carrés des sinus des angles $\theta_1, \ldots, \theta_\alpha$.

42. On remarquera ici encore que les quantités $\cos\theta_r$, $\sin\theta_r$, $\operatorname{tang}\theta_r = g_r$ ne sont pas des invariants, car on peut changer à volonté leur signe en changeant le signe d'une des coordonnées. Leurs carrés seulement sont des invariants.

43. Considérons deux systèmes quelconques de deux α-plans P_α et P_γ, P'_α et P'_γ. S'ils ont les mêmes invariants, ils seront pareils, car nous venons de voir qu'on peut les ramener par une substitution orthogonale à une même forme canonique. Mais il est utile de distinguer le cas où ces deux systèmes sont égaux de celui où ils sont symétriques.

Si $n > 2\alpha$, les deux systèmes seront à la fois égaux et symétriques; car chacun d'eux est symétrique à lui-même, son équation ne changeant pas par la substitution orthogonale de déterminant -1 qu'on obtient en changeant le signe d'une des coordonnées qui ne figurent pas dans ses équations canoniques.

Il n'en est plus de même si $n = 2\alpha$. On aura égalité ou symétrie. Voyons comment ces deux cas pourront être distingués l'un de l'autre.

44. Soient, comme précédemment,

$$v_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots \alpha),$$

et

$$A_r = a_{r1} v_1 + \ldots + a_{r\alpha} v_\alpha + b_{r1} w_1 + \ldots + b_{r\alpha} w_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

les équations initiales qui définissent respectivement P_α et P_γ. On pourra de

même met re les équations qui définissent respectivement P'_α et P'_γ sous la forme

$$V_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

et

$$A_{r1}V_1 + \ldots + A_{r\alpha}V_\alpha + B_{r1}W_1 + \ldots + B_{r\alpha}W_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

$V_1 = 0, \ldots, W_\alpha = 0$ désignant des plans rectangulaires.

La substitution

$$| \, v_1, \ldots, w_\alpha \; V_1, \ldots, W_\alpha \, |$$

est orthogonale, et suivant que son déterminant sera égal à ± 1, il est clair que le système P'_α, P'_γ sera égal ou symétrique au système des deux multiplans P_α, P_γ respectivement définis par les équations

$$v_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

et

$$\mathcal{W}_r = A_{r1}v_1 + \ldots + A_{r\alpha}v_\alpha + B_{r1}w_1 + \ldots + B_{r\alpha}w_\alpha \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

La question se trouve ainsi ramenée à déterminer dans quel cas ce nouveau système est égal au système P_α, P_γ et dans quel cas, au contraire, il lui est symétrique,

45. Nous allons prouver que *l'égalité a lieu si le produit des deux déterminants*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1\alpha} \\ \ldots\ldots \\ A_{\alpha 1} \ldots A_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_{11} \ldots B_{1\alpha} \\ \ldots\ldots \\ B_{\alpha 1} \ldots B_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

est de même signe que le produit des deux déterminants

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\alpha} \\ \ldots\ldots \\ a_{\alpha 1} \ldots a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} \ldots b_{1\alpha} \\ \ldots\ldots \\ b_{\alpha 1} \ldots b_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas contraire, on aura la symétrie.

46. Prenons pour définir P_γ, au lieu des plans

$$A_r = 0,$$

les plans

$$C_r = 0$$

définis par les relations (50) ou (51).

Les déterminants analogues à δ_1 et δ_2 par rapport à ce nouveau système de plans seront évidemment égaux à

$$\delta'_1 = \iota\delta_1 = 1, \quad \delta'_2 = \iota\delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \begin{vmatrix} b'_{11} \ldots b_{1\alpha} \\ \ldots\ldots \\ b'_{\alpha 1} \ldots b'_{\alpha\alpha} \end{vmatrix},$$

ε_2' désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_{11} \dots e_{1\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ e_{\alpha 1} \dots e_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

réciproque de δ_1.

On voit par là que δ_2' aura le même signe que $\delta_1\delta_2$.

Prenons maintenant pour coordonnées, au lieu de $v_1, \dots, v_\alpha$, les quantités $v_1', \dots, v_\alpha'$ déterminées par les relations (54), et définissons P_γ par l'intersection des plans $A_r' = 0$ donnés par la formule (55). Le déterminant

$$\delta_2'' = \begin{vmatrix} b_{11}'' \dots b_{1\alpha}'' \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ b_{\alpha 1}'' \dots b_{\alpha\alpha}'' \end{vmatrix}$$

sera évidemment égal à $\delta_2'\psi$, ψ étant le déterminant des coefficients $f_{11}, \dots, f_{\alpha\alpha}$. Ce déterminant est égal à ± 1, la substitution (52) étant orthogonale. On peut le supposer égal à 1 ; car, pour changer son signe, il suffirait de changer simultanément le signe de $f_{11}, \dots, f_{1\alpha}$, ce qui peut se faire sans altérer la propriété qu'a la substitution (52) de faire disparaître les rectangles dans la fonction Φ. On aura, dans cette hypothèse,

$$\delta_2'' = \delta_2.$$

Cela posé, on a évidemment

$$\delta_2'' = g_1 \dots g_\alpha \psi', \tag{66}$$

ψ' étant le déterminant des équations (58). Ces relations étant orthogonales, on aura

$$\psi' = \pm 1$$

D'ailleurs, le signe des quantités $g_1, \dots, g_\alpha$ est arbitraire ; on pourra donc supposer $g_2, \dots, g_\alpha$ positifs, et déterminer le signe de g_1 de telle sorte que ψ' soit égal à 1. On voit alors par l'équation (66) que g_1 aura le même signe que δ_2'', ou que le produit $\delta_1\delta_2$.

On pourra donc, par des transformations orthogonales de déterminant 1, donner aux équations de P_α et P_γ les formes suivantes

$$v_1' = 0, \dots, v_\alpha' = 0, \tag{67}$$

$$v_1' + g_1 w_1' = 0, \dots, v_\alpha' + g_\alpha w_\alpha' = 0. \tag{68}$$

47. Opérant de la même manière sur le système P_α, P_γ, qui a par hypothèse les mêmes invariants $g_1^2, \dots, g_\alpha^2$, on pourra, par des transformations orthogonales de déterminant 1, mettre ses équations sous une forme canonique identique à la précédente, si $\Delta_1\Delta_2$ a le même signe que $\delta_1\delta_2$; sous

une forme qui diffère de la précédente par le signe de g_1, si $\Delta_1\Delta_2$ est de signe contraire à $\delta_1\delta_2$. Il est clair que, dans le premier cas, les deux systèmes P_α, P_γ et P'_α, P'_γ seront égaux; dans le second cas, ils seront symétriques, puisque pour ramener leurs formes canoniques à l'identité, il faudra changer le signe d'une coordonnée.

Notre proposition est donc établie.

48. Nous avons vu, dans ce qui précède, qu'on peut déterminer un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_\rho, y_1, \ldots, y_\sigma, z_1, \ldots, z_\tau, u_1, \ldots, u_\upsilon, v'_1, \ldots, v'_\alpha, w'_1, \ldots, w'_\alpha$, tel que P_k et P_l soient respectivement déterminés par les équations

$$(69) \qquad \begin{cases} x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0, \\ u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0, \\ v'_1 = 0, \ldots, v'_\alpha = 0. \end{cases}$$

et par les équations

$$(70) \qquad \begin{cases} x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0, \\ z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0, \\ v'_1 \cos\theta_1 + w'_1 \sin\theta_1 = 0, \ldots, v'_\alpha \cos\theta_\alpha + w'_\alpha \sin\theta_\alpha = 0. \end{cases}$$

Les multiplans P_{n-k} et P_{n-l} menés par l'origine perpendiculairement aux précédents auront évidemment pour équations

$$(71) \qquad \begin{cases} y_1 = 0, \ldots, y_\sigma = 0, \\ z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0, \\ w'_1 = 0, \ldots, w'_\alpha = 0, \end{cases}$$

et

$$(72) \qquad \begin{cases} y_1 = 0, \ldots, y_\sigma = 0, \\ u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0, \\ -v'_1 \sin\theta_1 + w'_1 \cos\theta_1 = 0, \ldots, -v'_\alpha \sin\theta_\alpha + w'_\alpha \cos\theta_\alpha = 0. \end{cases}$$

La comparaison de ces équations montre :

1° Que P_{n-l} *forme avec* P_k *des angles en nombre* α, *respectivement égaux à* $\frac{\pi}{2}+\theta_1, \ldots, \frac{\pi}{2}+\theta_\alpha$;

2° Que P_{n-k} *et* P_{n-l} *forment entre eux des angles en nombre* α, *respectivement égaux à* $\pi+\theta_1, \ldots, \pi+\theta_\alpha$.

Il résulte de là que P_{n-k} *et* P_{n-l} *auront les mêmes invariants que* P_k *et* P_l.

49. *Un système formé d'un k-plan* P_k *et d'un l-plan* P_l *aura en général* α *invariants angulaires*, α *étant le plus petit des quatre nombres* $k, l, n-k, n-l$.

Admettons en effet que les coefficients de P_k et de P_l ne soient liés par aucune relation particulière, et supposons d'abord que k soit le plus petit

des quatre nombres ci-dessus. On aura $k+l<n$, $k+n-l<n$. Donc P_k n'aura en général aucun plan générateur commun avec P_l ou P_{n-l}. On aura par suite (33)

$$\rho=0,\ \upsilon=0,\ \alpha=k-\rho-\upsilon=k.$$

On voit aisément que les cas particuliers où P_k aurait ρ plans générateurs communs avec P_l et υ plans générateurs communs avec P_{n-l} se déduisent du cas général en exprimant que, parmi les k angles de P_k et de P_l, il y en a ρ égaux à zéro et υ égaux à $\frac{\pi}{2}$.

Soit au contraire $n-k<k, n, n-l$. Les multiplans P_{n-k}, P_{n-l} auront en général $n-k$ invariants angulaires, d'après ce qui précède, et P_k, P_l qui leur sont respectivement perpendiculaires, auront les mêmes invariants (48).

50. Nous avons vu (33) que la recherche des angles de deux multiplans quelconques se ramène immédiatement à celle des angles de deux α-plans, α étant au plus égal à $\frac{n}{2}$. Cette dernière question peut se résoudre, ainsi que nous l'avons fait (34 et suivants), par la réduction des deux α-plans à leur forme canonique. Mais on peut aussi la traiter directement.

Soient en effet

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{\alpha 1}x_1+\ldots+a_{\alpha n}x_n=0 \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} b_{11}x_1+\ldots+b_{1n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{\alpha 1}x_1+\ldots+b_{\alpha n}x_n=0 \end{gathered}$$

les équations des deux α-plans considérés P et Q.

Les plans générateurs de P auront pour équation générale

$$A_1x_1+\ldots+A_nx_n=0,$$

en posant pour abréger

$$(73)\qquad A_1=a_{11}\lambda_1+\ldots+a_{\alpha 1}\lambda_\alpha,\ \ldots,\ A_n=a_{1n}\lambda_1+\ldots+a_{\alpha n}\lambda_\alpha.$$

Ceux de Q auront de même pour équation

$$(74)\qquad B_1x_1+\ldots+B_nx_n=0,$$

en posant

$$B_1=b_{11}\mu_1+\ldots+b_{\alpha 1}\mu_\alpha,\ \ldots,\ B_n=b_{1n}\mu_1+\ldots+b_{\alpha n}\mu_\alpha.$$

L'angle φ des deux plans sera donné par l'expression

$$(75) \qquad \cos^2\varphi = \frac{\left(\sum A_\rho B_\rho\right)^2}{\sum A_\rho^2 \sum B_\rho^2} = \frac{M}{N},$$

dont il reste à déterminer le minimum.

Soit s^2 un des minima cherchés. Les valeurs correspondantes des indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ d'une part, et $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$ d'autre part, ne sont déterminées que par leur rapport, $\frac{M}{N}$ étant homogène et du degré zéro par rapport à chacun de ces systèmes de variables. On pourra donc déterminer les λ et les μ de telle sorte qu'on ait, outre la condition

$$\frac{M}{N} = s^2,$$

les deux conditions auxiliaires suivantes

$$\sum A^2 = 1, \quad \sum B^2 = 1,$$

et par suite

$$N = \sum A^2 \sum B^2 = 1, \quad s = \sqrt{\frac{M}{N}} = \sqrt{M} = \sum A_\rho B_\rho.$$

Cela posé, donnons aux variables λ, μ des accroissements infiniment petits quelconques. On aura, d'après la condition du minimum,

$$s^2 = \frac{M}{N} = \frac{M + dM}{N + dN}.$$

Chassant les dénominateurs et égalant séparément à zéro les coefficients de $d\lambda_1, \ldots, d\lambda_\sigma, d\mu_1, \ldots, d\mu_\alpha$, il viendra

$$(76) \qquad \frac{dM}{d\lambda_\sigma} = s^2 \frac{dN}{d\lambda_\sigma},$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

$$(77) \qquad \frac{dM}{d\mu_\sigma} = s^2 \frac{dN}{d\mu_\sigma},$$

Mais on a

$$\frac{dM}{d\lambda_\sigma} = 2 \sum A_\rho B_\rho \sum a_{\sigma\rho} B_\rho = 2s \sum a_{\sigma\rho} B_\rho,$$

$$\frac{dN}{d\lambda_\sigma} = 2 \sum B^2 \sum a_{\sigma\rho} A_\rho = 2 \sum a_{\sigma\rho} A_\rho.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (76), et supprimant le facteur commun s, il viendra

$$(78) \qquad \sum a_{\sigma\rho} B_\rho = s \sum a_{\sigma\rho} A_\rho \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

L'équation (77) donnera de même

$$(79) \qquad \sum b_{\sigma\rho} A_\rho = s \sum b_{\sigma\rho} B_\rho \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Les équations (73), (74), (78) et (79) forment un système de $2n + 2\alpha$ équations linéaires entre les $2n + 2\alpha$ quantités λ, μ, A, B. En égalant à zéro le déterminant de ce système, on aura l'équation caractéristique qui détermine s. Cette équation est du degré 2α. Mais il est aisé de voir qu'elle ne contiendra que des puissances paires de s.

V. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX MULTIPLANS.

51. Passons maintenant à la considération de deux multiplans P_k, P'_l qui n'aient aucun point commun. Par un point quelconque de P_k menons un l-plan P_l parallèle à P'_l. On pourra choisir les coordonnées de manière à ramener P_k et P_l aux formes canoniques (69) et (70). P_l, rapporté aux mêmes axes, aura pour équations

$$(80) \qquad x_1 = a_1, \ \ldots, \ x_\rho = a_\rho,$$

$$(81) \qquad z_1 = b_1, \ \ldots, \ z_\tau = b_\tau,$$

$$(82) \qquad v'_1 \cos\theta_1 + w'_1 \sin\theta_1 = c_1, \ \ldots, \ v'_\alpha \cos\theta_\alpha + w'_\alpha \sin\theta_\alpha = c_\alpha.$$

Mais, si l'on prend pour coordonnées, au lieu de

$$z_1, \ \ldots, \ z_\tau, w'_1, \ \ldots, w'_\alpha,$$

les quantités

$$z_1 - b_1, \ \ldots, z_\tau - b_\tau, \ w'_1 - \frac{c_1}{\sin\theta_1}, \ \ldots, w'_\alpha - \frac{c_\alpha}{\sin\theta_\alpha},$$

on fera disparaître les constantes b et c. D'autre part, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ des paramètres quelconques assujettis à la relation

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_\rho a_\rho = 0 ;$$

l'équation générale

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_\rho x_\rho = 0$$

représente un $\rho - 1$-plan, résultant de la combinaison de $\rho - 1$ plans générateurs rectangulaires

$$x'_2 = 0, \ \ldots, \ x'_\rho = 0,$$

D'ailleurs P_ρ résulte de l'intersection de $P_{\rho-1}$ et d'un plan x'_1 perpendiculaire à $P_{\rho-1}$. Prenons pour plans coordonnés

$$x'_1 = 0, \ldots, x'_\rho = 0,$$

au lieu de

$$x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0.$$

La forme des équations de P_k ne sera pas changée; mais les équations (80) deviendront

$$x'_1 = \alpha'_1, x'_2 = 0, \ldots, x'_\rho = 0.$$

Les équations de P'_l ne contiendront donc plus qu'un seul terme constant α'_1. Il est aisé de voir que cette dernière constante représente la *plus courte distance* de P_k et de P'_l; c'est donc un invariant nouveau à ajouter aux invariants angulaires précédemment étudiés.

52. Cherchons maintenant comment on pourra calculer *a priori* cette plus courte distance.

Soient $A_1 = 0, \ldots, A_k = 0$ les équations de P_k; $B_1 = 0, \ldots, B_l = 0$ celles de P'_l. On pourra exprimer les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ d'un point quelconque de P_k en fonction linéaire de $n-k$ variables indépendantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$.

En effet, soient $A_{k+1}, \ldots, A_n$ des fonctions linéaires quelconques de $x_1, \ldots, x_n$, choisies de manière à former avec $A_1, \ldots, A_k$ un système de n fonctions distinctes, et posons

$$A_{k+1} = \lambda_1, \ldots, A_n = \lambda_{n-k}.$$

Ces équations, jointes aux suivantes

$$A_1 = 0, \ldots, A_k = 0,$$

fourniront un système de n équations linéaires. En les résolvant par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, on obtiendra pour ces variables des expressions de la forme

$$x_\rho = c_{\rho 1}\lambda_1 + \ldots + c_{\rho, n-k}\lambda_{n-k} + d_\rho.$$

On pourra, de la même manière, exprimer les coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ d'un point quelconque de P'_l en fonction linéaire de $n-l$ variables indépendantes, $\lambda_{n-k+1}, \ldots, \lambda_{2n-k-l}$, par des expressions de la forme suivante

$$-X_\rho = c_{\rho, n-k+1}\lambda_{n-k+1} + \ldots + c_{\rho, 2n-k-l}\lambda_{2n-k-l} + D_\rho.$$

Cela posé, le carré de la plus courte distance cherchée Δ s'obtiendra en cherchant le minimum de l'expression

$$(x_1 - X_1)^2 + \ldots + (x_n - X_n)^2,$$

ou, en substituant pour les x et les X leurs valeurs et posant pour abréger $2n-k-l=m$, $d_\varrho+D_\varrho=\delta_\varrho$, le minimum de l'expression

$$(83)\qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}(c_{\varrho 1}\lambda_1+\ldots+c_{\varrho m}\lambda_m+\delta_\varrho)^2,$$

où toutes les variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont indépendantes.

Ce minimum sera évidemment nul, si $m>n$.

53. Soit au contraire $m<n$. Posons, pour abréger,

$$(84)\qquad c_{\varrho 1}\lambda_1+\ldots+c_{\varrho m}\lambda_m+\delta_\varrho=-\mu_\varrho.$$

On obtiendra le minimum cherché en égalant à zéro les dérivées de l'expression (83) par rapport aux variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, ce qui donnera une série d'équations de la forme

$$(85)\qquad c_{1\sigma}\mu_1+c_{2\sigma}\mu_2+\ldots+c_{n\sigma}\mu_n=0.$$

Les équations (84) et (85) sont au nombre de $m+n$, et linéaires par rapport aux $m+n$ variables λ et μ. On pourra donc calculer ces variables sans difficulté ; on obtiendra des expressions de la forme

$$\lambda_1=-\frac{P_1}{R},\ \ldots,\ \lambda_n=-\frac{P_n}{R},\ \mu_1=-\frac{Q_1}{R},\ \ldots,\ \mu_n=-\frac{Q_n}{R},$$

en posant pour abréger

$$R=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{1m} & c_{2m} & \ldots & c_{nm} \end{vmatrix},$$

$$P_1=\begin{vmatrix} \delta_1 & c_{12} & \ldots & c_{1m} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \delta_2 & c_{22} & \ldots & c_{2m} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_n & c_{n2} & \ldots & c_{nm} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{1m} & c_{2m} & \ldots & c_{nm} \end{vmatrix},\ \text{etc.},$$

$$Q_1 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & \delta_2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} & \delta_n & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2m} & \dots & c_{nm} \end{vmatrix}, \text{ etc.},$$

et le minimum cherché sera donné par la formule

$$\Delta^2 = \frac{Q_1^2 + \dots + Q_n^2}{R^2}.$$

Cette expression peut être simplifiée. Nous allons montrer, en effet, que son numérateur est divisible par R.

54. Et d'abord il résulte évidemment de la forme du déterminant R que l'on aura

$$R = \sum A^2_{\alpha\beta\dots},$$

en désignant par $A_{\alpha\beta\dots}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} \\ c_{\beta 1} & \dots & c_{\beta m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

et la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs distinctes des m indices $\alpha, \beta, \dots$ compris entre 1 et n.

On aura de même

$$P_\rho = \sum A_{\alpha\beta\dots} D^\rho_{\alpha\beta\dots},$$

$D^\rho_{\alpha\beta\dots}$ étant ce que devient $A_{\alpha\beta\dots}$ lorsqu'on y remplace $c_{\alpha\rho}, c_{\beta\rho}, \dots$ par $\delta_\alpha, \delta_\beta, \dots$.

On aura enfin, d'une manière analogue,

$$Q_\rho = (-1)^{\rho+1} \sum{}^{\rho} B_{\rho\alpha\beta\dots} A_{\alpha\beta\dots},$$

où $B_{\rho\alpha\beta\dots}$ représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{\rho 1} & \dots & c_{\rho m} & \delta_\rho \\ c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & \dots & c_{\beta m} & \delta_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

et où la sommation $\sum^{\rho}$ s'étend aux systèmes de valeurs distincts des indices $\alpha, \beta, \ldots$ à l'exclusion de la valeur ρ.

55. Substituons dans Δ^2 les valeurs de $R, Q_1, \ldots, Q_n$, il viendra, en appelant M^2 le minimum cherché,

$$M^2 = \frac{S\left(\sum^{\rho} B_{\rho\alpha\beta\ldots} A_{\alpha\beta\ldots}\right)^2}{\left(\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}\right)^2}$$

la nouvelle sommation représentée par S s'étendant à toutes les valeurs de ρ.

On voit déjà que le numérateur de M^2 est une fonction du second degré des déterminants $A_{\alpha\beta\ldots}$. Nous allons montrer qu'on peut le mettre sous la forme suivante

$$\left(S B^2_{\rho\alpha\beta\ldots}\right)\left(\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}\right),$$

la nouvelle sommation S s'étendant à tous les différents systèmes de valeurs de $\rho, \alpha, \beta, \ldots$.

56. Nous commencerons par l'examen de quelques cas particuliers.

Soit d'abord $n - m = 1$. L'indice ρ étant déterminé, les indices en nombre m, $\alpha, \beta, \ldots$, n'auront plus qu'un seul système de valeurs, la valeur ρ étant écartée. La somme représentée par $\sum^{\rho}$ se réduira donc à un seul terme, et l'on aura, pour le numérateur de Δ^2,

$$S B^2_{\rho\alpha\beta\ldots} A^2_{\alpha\beta\ldots}.$$

D'ailleurs les indices $\rho, \alpha, \beta, \ldots$, en nombre $m+1$, ne sont susceptibles que d'un seul système de valeurs, et en les permutant on changera tout au plus le signe du déterminant $B_{\rho\alpha\beta\ldots}$. Le facteur $B^2_{\rho\alpha\beta\ldots}$ sera donc le même dans tous les termes de la somme S; et il s'y trouvera multiplié par les divers termes de la somme $\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}$. Le numérateur de Δ^2 sera donc égal à $B^2_{\rho\alpha\beta\ldots} \sum A^2_{\alpha\beta\ldots}$; ce qu'il fallait démontrer.

57. Soit en second lieu $m = 1$, n quelconque. On aura

$$\Delta^2 = (c_{11}\lambda_1 + \delta_1)^2 + \ldots + (c_{n1}\lambda_1 + \delta_n)^2,$$

et la valeur de λ_1 qui donne le minimum sera fournie par l'équation

$$c_{11}(c_{11}\lambda_1 + \delta_1) + \ldots + c_{n1}(c_{n1}\lambda_1 + \delta_n) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda_1 = -\frac{\sum_1^n c_{\alpha 1}\,\delta_\alpha}{\sum_1^n c_{\alpha 1}^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression

$$\Delta^2 = \sum\left(c_{\alpha 1}\lambda_1 + \delta_\alpha\right)^2 = \lambda_1^2 \sum c_{\alpha 1}^2 + 2\lambda_1 \sum c_{\alpha 1}\delta_\alpha + \sum \delta_\alpha^2,$$

on aura l'expression du minimum

$$(86)\qquad \sum c_{\alpha 1}^2 \frac{\left(\sum c_{\alpha 1}\delta_\alpha\right)^2 - 2\left(\sum c_{\alpha 1}\delta_\alpha\right)^2 + \sum \delta_\alpha^2 \sum c_{\alpha 1}^2}{\left(\sum c_{\alpha 1}^2\right)^2}$$

$$= \sum c_{\alpha 1}^2 \frac{\mathrm{S}\left(\delta_\rho c_{\alpha 1} - \delta_\alpha c_{\rho 1}\right)^2}{\left(\sum c^2{}_{\alpha 1}\right)^2},$$

la sommation S s'étendant à tous les différents systèmes de valeurs des indices ρ, α. Mais les deux sommes $\sum c_{\alpha 1}^2$ et $\mathrm{S}\,(\delta_\rho c_{\alpha 1} - \delta_\alpha c_{\rho 1})^2$ sont précisément ce que deviennent dans le cas particulier que l'on considère les expressions $\sum A_{\alpha\beta\ldots}^2$ et $\mathrm{S}\,B_{\rho\alpha\beta\ldots}^2$. Le théorème se trouve donc démontré.

58. Cela posé, pour établir d'une manière générale que quels que soient m et n (m étant $< n$), on a la relation

$$(87)\qquad M^2 = \frac{\mathrm{S}\,B_{\rho\alpha\beta\ldots}^2}{\sum A_{\alpha\beta\ldots}^2},$$

il nous suffira de démontrer que si cette relation est vraie pour m et n, ainsi que pour $m+1$ et n (en supposant $m+1 < n$), elle sera encore vraie pour $m+1$, $n+1$. En effet, la proposition est déjà prouvée, quel que soit n, pour $m = 1$ et pour $m = n-1$.

Or, soit

$$(88)\qquad \Delta^2 = \sum_{\rho=1}^{\rho=n+1}\left(c_{\rho 1}\lambda_1 + \ldots + c_{\rho m}\lambda_m + c_{\rho, m+1}\lambda_{m+1} + \delta_\rho\right)^2.$$

Posons

$$(89)\qquad \lambda_\rho = a_{\rho 1}\Delta_1 + \ldots + a_{\rho, m+1}\Delta_{m+1},$$

$\Delta_1, \ldots, \Delta_{m+1}$ étant de nouvelles variables, et $a_{\rho 1}, \ldots, a_{\rho, m+1}$ des coefficients quelconques. La quantité Δ^2 sera une fonction quadratique des nouvelles

variables Λ; mais il est clair que son minimum M^2 ne sera pas altéré par cette transformation. Il en est de même de l'expression

$$\frac{S B^2_{\beta\alpha\delta\ldots}}{\sum A^2_{\alpha\delta\ldots}},$$

car chacun des déterminants partiels qui figurent tant au numérateur qu'au dénominateur se trouvera multiplié après la transformation par un même facteur, égal au déterminant de la substitution (89).

Or on pourra évidemment choisir les nouvelles variables de telle sorte que

$$c_{n+1,1}\lambda_1 + \ldots + c_{n+1,m+1}\lambda_{m+1}$$

se réduise au produit de Λ_{m+1} par un facteur constant. On voit par là que, pour démontrer l'égalité (87) dans le cas général, il suffira de considérer le cas particulier où l'on a $c_{n+1,1} = \ldots = c_{n+1,m} = 0$. Mais, dans ce cas particulier, la démonstration devient facile, comme on va le voir.

59. Supposons, pour simplifier l'écriture, qu'on ait $m = 1$, $n = 3$ (on verra aisément que le procédé de démonstration est général). L'expression dont on aura à chercher le minimum sera

$$\Delta^2 = (c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \delta_1)^2 + (c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \delta_2)^2 + (c_{31}\lambda_1 + c_{32}\lambda_2 + \delta_3)^2 + (c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2.$$

Pour l'obtenir, on pourra évidemment opérer de la manière suivante : on supposera λ_2 constant et λ_1 seul variable, on obtiendra ainsi un certain minimum $\mathfrak{M}^2$, qui sera fonction de λ_2 ; puis on fera varier λ_2 de manière à obtenir un minimum minimorum, qui sera la quantité cherchée M^2.

Or le théorème étant établi pour $m = 1$, $n = 3$, on aura immédiatement le minimum de la somme des trois premiers carrés, en supposant λ_2 constant. Ce minimum sera égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\lambda_2 + \delta_1 \\ c_{21} & c_{22}\lambda_2 + \delta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22}\lambda_2 + \delta_2 \\ c_{31} & c_{32}\lambda_2 + \delta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_{31} & c_{32}\lambda_2 + \delta_3 \\ c_{11} & c_{12}\lambda_2 + \delta_1 \end{vmatrix}^2}{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2}.$$

En y ajoutant le terme constant $(c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2$, on aura pour $\mathfrak{M}^2$ l'expression suivante

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{(\mathcal{A}_{12}\lambda_2 + \mathcal{C}_{12})^2 + (\mathcal{A}_{23}\lambda_2 + \mathcal{C}_{23})^2 + (\mathcal{A}_{31}\lambda_2 + \mathcal{C}_{31})^2 + (c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)(c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2}{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2},$$

en posant pour abréger

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} \\ c_{\beta 1} & c_{\beta 2} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & \delta_\beta \end{vmatrix}.$$

Cela posé, $\mathfrak{M}^2$ ne contenant plus qu'une seule variable λ_2, son minimum M^2 sera égal à

$$(90) \qquad \frac{U + V(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)}{W(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)},$$

en posant pour abréger

$$U = (\mathcal{A}_{12}\mathcal{C}_{23} - \mathcal{A}_{23}\mathcal{C}_{12})^2 + (\mathcal{A}_{12}\mathcal{C}_{31} - \mathcal{A}_{31}\mathcal{C}_{12})^2 + (\mathcal{A}_{23}\mathcal{C}_{31} - \mathcal{A}_{31}\mathcal{C}_{23})^2,$$

$$V = (\mathcal{A}_{12}\delta_4 - \mathcal{C}_{12}c_{42})^2 + (\mathcal{A}_{23}\delta_4 - \mathcal{C}_{23}c_{42})^2 + (\mathcal{A}_{31}\delta_4 - \mathcal{C}_{31}c_{42})^2,$$

et

$$W = (\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{31}^2 + c_{42}^2\,(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2).$$

Or les six termes de W sont précisément les carrés des déterminants binaires $A_{\alpha\beta}$ formés avec les quantités

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42}. \end{matrix}$$

En second lieu, les termes de V sont précisément les carrés de ceux des déterminants ternaires

$$B_{\rho\alpha\beta} = \begin{vmatrix} c_{\rho 1} & c_{\rho 2} & \delta_\rho \\ c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & c_{\beta 2} & \delta_\beta \end{vmatrix},$$

pour lesquels $\rho = 4$.

Enfin, si l'on avait $c_4 = \delta_4 = 0$, M^2 se réduirait à

$$\frac{U}{(\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{31}^2)\,(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)}.$$

Mais, dans ce cas, la fonction Δ contenant dans son expression un carré de moins que précédemment, le théorème lui serait applicable, par hypothèse. L'expression de son minimum serait donc $\frac{B_{123}^2}{\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{31}^2}$. On aura par suite

$$U = (c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)\,B_{123}^2,$$

et, substituant cette valeur dans l'expression (90), il viendra

$$M^2 = \frac{\mathrm{S}\,B_{\rho\alpha\beta}^2}{\sum A_{\alpha\beta}^2},$$

le signe S s'étendant à tous les systèmes de valeurs de ρ, α, β. C'est précisément l'égalité qu'il s'agissait de démontrer.

60. De la formule que nous venons d'établir pour exprimer le minimum d'une somme de carrés de fonctions linéaires, on peut déduire de nombreuses relations entre les déterminants formés avec les coefficients de ces fonctions. Pour les obtenir, il suffit d'observer que le minimum cherché peut s'obtenir en laissant d'abord constantes une partie des variables, et les faisant varier ensuite de manière à obtenir le minimum minimorum.

VI. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

61. Considérons un système quelconque de n plans $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ se coupant en un point quelconque, et prenons-les pour plans coordonnés. La distance de deux points, ayant pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ sera donnée, comme on l'a vu, par une formule quadratique

$$(91) \qquad (x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2 + 2a_{12}(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2) + \ldots = 0.$$

Posant $a_{12} = a_{21}$ et introduisant pour la symétrie de nouveaux coefficients $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ égaux à l'unité, on pourra mettre l'expression (91) sous la forme

$$f(x_1 - x'_1, \ldots, x_n - x'_n) = \sum a_{rs}(x_r - x'_r)(x_s - x'_s) = 0.$$

D'ailleurs cette expression ne peut s'annuler sans qu'on ait identiquement $x_1 - x'_1 = \ldots = x_n - x'_n = 0$. Donc la forme f est définie et positive. Il faudra, pour que cela ait lieu, que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

et ses mineurs de tous les ordres pris par rapport aux coefficients diagonaux,

$$\frac{dD}{da_{rr}}, \frac{d^2D}{da_{rr}da_{ss}}, \ldots,$$

soient positifs.

Ces conditions sont la généralisation de ces propositions de géométrie : *Dans tout trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des autres; et la somme des faces est moindre que quatre droits.*

Nous allons maintenant montrer que *les angles mutuels de tous les multiplans formés avec les plans $x_1, \ldots, x_n$ s'expriment au moyen du déterminant* D *et de ses mineurs.*

Nous supposerons, pour abréger l'écriture, que l'on a $n = 4$.

62. 1° *Angle des deux droites $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ et $x_3 = x_4 = x_1 = 0$.*

Soient $x_1, 0, 0, 0$ les coordonnées d'un point p de la première droite,

$0, \xi_2, 0, 0$ celles de sa projection q, sur la seconde, ξ_2 sera déterminé par la condition que

$$\Delta^2 = x_1^2 + \xi_2^2 - 2a_{12}x_1\xi_2,$$

carré de la distance des deux points p et q, soit minimum. On aura donc

$$\xi_2 = a_{12}x_1.$$

Cette valeur réduira l'expression de Δ^2 à $(1 - a_{12}^2)x_1^2$.

Cela posé, désignons par [234.341] l'angle des deux droites. Nous avons vu (50) que l'on aura

$$\sin^2[234.341] = \frac{\Delta^2}{x_1^2} = 1 - a_{12}^2,$$

et par suite

$$\cos[234.341] = \pm a_{12}.$$

Le choix du signe à donner à ce cosinus est tout à fait arbitraire; mais il peut être fixé par une convention. Nous le considérerons comme positif ou négatif, suivant qu'un point situé sur la partie positive de l'axe des x_1 se projette sur la partie positive ou sur la partie négative de l'axe des x_2. D'après cette convention, on aura

$$\cos[234.341] = a_{12}. \tag{92}$$

63. 2° *Angle de la droite* $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ *avec le biplan* $x_4 = x_1 = 0$.

Désignons cet angle par le symbole [234.41]. Soit $(x_1, 0, 0, 0)$ un point de la droite, $(0, \xi_2, \xi_3, 0)$ sa projection sur le biplan; ξ_2, ξ_3 devront rendre minimum la distance

$$\Delta_1^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 - 2a_{12}x_1\xi_2 - 2a_{13}x_1\xi_3,$$

d'où les équations de condition

$$\begin{aligned} a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 - a_{12}x_1 &= 0, \\ a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 - a_{13}x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations donneront, en remarquant que $a_{23} = a_{32}$, les valeurs suivantes de ξ_2, ξ_3,

$$\xi_2 = -\frac{\dfrac{d^2D}{da_{13}da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1, \quad \xi_3 = -\frac{\dfrac{d^2D}{da_{12}da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1.$$

D'ailleurs en les multipliant respectivement par ξ_2, ξ_3 et les retranchant ensuite de Δ_1^2, il viendra

$$\Delta_1^2 = a_{11}x_1^2 - (a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3)x_1$$

$$= \frac{a_{11}\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}} + a_{12}\dfrac{d^2D}{da_{12}da_{44}} + a_{13}\dfrac{d^2D}{da_{13}da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1^2 = \frac{\dfrac{dD}{da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1^2,$$

d'où

$$\sin^2[234.41] = \frac{\Delta_1^2}{x_1^2} = \frac{\dfrac{dD}{da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}. \tag{93}$$

64. 3° *Angle de la droite* $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ *avec le plan* $x_1 = 0$. Nous désignerons cet angle par [234.1].

Le point $(x_1, 0, 0, 0)$ aura pour projection sur ce plan un point $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, où ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont choisis de manière à rendre minimum l'expression

$$\Delta_2^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 - 2a_{12}x_1\xi_2 - \ldots + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots.$$

Ils satisferont donc aux relations

$$\left\{\begin{array}{l} a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4 - a_{12}\xi_1 = 0, \\ a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4 - a_{13}\xi_1 = 0, \\ a_{24}\xi_2 + a_{34}\xi_3 + a_{44}\xi_4 - a_{14}\xi_1 = 0. \end{array}\right. \tag{94}$$

Ces équations donneront

$$\xi_2 = -\frac{\dfrac{dD}{da_{12}}}{\dfrac{dD}{da_{11}}}, \quad \xi_3 = -\frac{\dfrac{dD}{da_{13}}}{\dfrac{dD}{da_{11}}}, \quad \xi_4 = -\frac{\dfrac{dD}{da_{14}}}{\dfrac{dD}{da_{11}}}. \tag{95}$$

D'ailleurs en multipliant les équations (85) respectivement par ξ_2, ξ_3, ξ_4 et les retranchant de Δ_2^2, il viendra

$$\Delta_2^2 = a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1\xi_2 - a_{13}x_1\xi_3 - a_{14}x_1\xi_4$$

$$= \frac{a_{11}\dfrac{dD}{da_{11}} + a_{12}\dfrac{dD}{da_{12}} + a_{13}\dfrac{dD}{da_{13}} + a_{14}\dfrac{dD}{da_{14}}}{\dfrac{dD}{da_{11}}}x_1^2 = \frac{D}{\dfrac{dD}{da_{11}}}x_1^2,$$

et par suite

$$\sin^2[234.1] = \frac{\Delta_2^2}{x_1^2} = \frac{D}{\dfrac{dD}{da_{11}}}. \tag{96}$$

65. 4° *Angle du plan* $x_1 = 0$ *avec le plan* $x_4 = 0$.

Soit [1.4] cet angle. On aura

$$\sin^2[1.4] = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2},$$

Δ_1 étant la distance d'un point quelconque p du plan $x_4 = 0$ à l'intersection des deux plans $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ et Δ_2 sa distance au plan $x_1 = 0$.

Or prenons pour p le point dont les coordonnées sont $x_1, 0, 0, 0$. Nous avons trouvé

$$\Delta_1^2 = \frac{\dfrac{dD}{da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}} x_1^2, \quad \Delta_2^2 = \frac{D}{\dfrac{dD}{da_{11}}},$$

donc

$$\sin^2[1.4] = \frac{D\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}{\dfrac{dD}{da_{11}}\dfrac{dD}{da_{44}}}.$$

On en déduit

$$\cos^2[1.4] = \frac{\dfrac{dD}{da_{11}}\dfrac{dD}{da_{44}} - D\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}{\dfrac{dD}{da_{11}}\dfrac{dD}{da_{44}}}.$$

Or le numérateur de cette expression est égal (Salmon, *Lessons on higher Algebra*, 2e édition, n° 32) à

$$\frac{dD}{da_{14}}\frac{dD}{da_{41}} = \left(\frac{dD}{da_{14}}\right)^2;$$

on aura donc

$$\cos[1.4] = \pm \frac{\dfrac{dD}{da_{14}}}{\sqrt{\dfrac{dD}{da_{11}}\dfrac{dD}{da_{44}}}}. \tag{97}$$

66. Le choix du signe est encore arbitraire dans cette formule. Pour le fixer par une convention convenable, nous remarquerons que le plan $x_1 = 0$ est coupé par le plan $x_4 = 0$ en deux parties distinctes; l'une *positive*, pour laquelle $x_4 > 0$, l'autre *négative*, pour laquelle $x_4 < 0$. De même, le plan $x_1 = 0$ coupera le pan $x_4 = 0$ en deux parties, l'une positive, pour laquelle $x_1 > 0$, l'autre négative, pour laquelle $x_1 < 0$. Cela posé, nous conviendrons de considérer cos [1.4] comme positif, si la partie positive du plan $x_4 = 0$ se projette sur la partie positive du plan $x_1 = 0$; comme négatif dans le cas contraire.

Or nous avons vu que la projection $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ du point $(x_1, 0, 0, 0)$ sur le plan $x_1 = 0$ est donnée par les formules (94). D'ailleurs $\dfrac{dD}{da_{11}}$ est essentiellement positif. Donc cos [1.4] qui a le même signe que $\dfrac{x_1}{\xi_4}$ sera de signe

contraire à $\frac{dD}{da_{14}}$. Il faudra donc prendre le signe $-$ dans la formule (97).

67. Si au lieu de quatre variables on n'en avait plus que trois, la formule que nous venons d'écrire deviendrait la formule fondamentale des triangles sphériques, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

68. On peut d'ailleurs obtenir pour cos [1.4] de nouvelles expressions exemptes (en apparence) de radical; on a en effet, d'après la formule (93),

$$\frac{dD}{da_{44}} = \sin^2 [234.41] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}.$$

De même

$$\frac{dD}{da_{11}} = \sin^2 [231.14] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}.$$

Substituant ces valeurs dans (97), il viendra

$$\cos [1.4] = \frac{-\frac{dD}{da_{14}}}{\sin [234.41] \sin [231.14] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}},$$

formule où les deux sinus devront être pris avec le signe $+$.

On a d'autre part

$$\frac{dD}{da_{11}} = \frac{D}{\sin^2 [234.1]}, \quad \frac{dD}{da_{44}} = \frac{D}{\sin^2 [123.4]},$$

d'où

$$\cos [1.4] = \frac{-\frac{dD}{da_{14}} \sin [234.1] \sin [123.4]}{D}.$$

69. 5° *Angles du biplan $x_1 = x_2 = 0$ avec le biplan $x_3 = x_4 = 0$.*

La distance Δ_3 d'un point $(x_1, x_2, 0, 0)$ du premier biplan à sa projection $(0, 0, \xi_3, \xi_4)$ sur le second sera donnée par la formule

$$\Delta_3^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{34}\xi_3\xi_4 \\ - 2a_{13}x_1\xi_3 - 2a_{14}x_1\xi_4 - 2a_{23}x_2\xi_3 - 2a_{24}x_2\xi_4,$$

où ξ_3 et ξ_4 seront déterminés par les équations de condition

$$(98) \qquad \begin{cases} a_{33}\xi_3 + a_{23}\xi_4 - a_{13}x_1 - a_{23}x_2 = 0, \\ a_{23}\xi_3 + a_{44}\xi_4 - a_{14}x_1 - a_{24}x_2 = 0, \end{cases}$$

lesquelles, multipliées par ξ_3 et ξ_4 et retranchées de l'expression de Δ_3^2, la réduiront à la forme

$$(99) \qquad \Delta_3^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1\xi_3 - a_{14}x_1\xi_4 - a_{23}x_2\xi_3 - a_{24}x_2\xi_4.$$

Posant d'ailleurs pour abréger

$$\mathcal{A} = \frac{d^2D}{da_{13}da_{22}} = -\frac{d^2D}{da_{12}da_{23}}, \quad \mathcal{B} = \frac{d^2D}{da_{23}da_{11}} = -\frac{d^2D}{da_{21}da_{13}},$$
$$\mathcal{C} = \frac{d^2D}{da_{14}da_{22}} = -\frac{d^2D}{da_{12}da_{24}}, \quad \mathcal{D} = \frac{d^2D}{da_{24}da_{11}} = -\frac{d^2D}{da_{21}da_{14}},$$
$$\mathcal{E} = \frac{d^2D}{da_{11}da_{22}} = -\frac{d^2D}{da_{12}da_{21}}.$$

Les équations (98) donneront

$$\xi_3 = -\frac{\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_2}{\mathcal{E}}, \quad \xi_4 = -\frac{\mathcal{C}x_1 + \mathcal{D}x_2}{\mathcal{E}},$$

valeurs qui substituées dans (99) donneront

$$\Delta_5^2 = \frac{Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2}{\mathcal{E}},$$

où l'on a

$$M = a_{11}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{A} + a_{14}\mathcal{C} = \frac{dD}{da_{22}}, \quad P = \frac{dD}{da_{11}},$$
$$\begin{aligned} 2N &= 2a_{12}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{B} + a_{23}\mathcal{A} + a_{14}\mathcal{D} + a_{24}\mathcal{C} \\ &= a_{12}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{B} + a_{14}\mathcal{D} + a_{21}\mathcal{E} + a_{23}\mathcal{B} + a_{24}\mathcal{C} \\ &= -\frac{dD}{da_{21}} - \frac{dD}{da_{12}} = -2\frac{dD}{da_{12}}. \end{aligned}$$

D'autre part, la distance Δ_4 du point $(x_1, x_2, 0, 0)$ à l'origine des coordonnées, intersection des deux biplans considérés sera donnée par la formule

$$\Delta_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2,$$

et les carrés des sinus des angles cherchés seront donnés par les maxima et minima de la formule

$$\frac{\Delta_5^2}{\Delta_4^2} = \frac{Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2}{\mathcal{E}(x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + x_2^2)} = \frac{\Phi}{\Psi}.$$

Les valeurs du rapport $\frac{x_1}{x_2}$ qui rendent minimum cette expression seront données par les formules

$$(100) \qquad \begin{cases} Mx_1 + Nx_2 = \rho\,\mathcal{E}(x_1 + a_{12}x_2), \\ Nx_1 + Px_2 = \rho\,\mathcal{E}(a_{12}x_1 + x_2), \end{cases}$$

ρ étant un facteur constant qui doit être choisi de telle sorte que les deux équations (90) se réduisent à une seule. On aura donc

$$\begin{vmatrix} M-\mathcal{E}\rho & N-a_{12}\mathcal{E}\rho \\ N-a_{12}\mathcal{E}\rho & P-\mathcal{E}\rho \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs les équations (100) respectivement multipliées par x_1 et x_2 et ajoutées ensemble donneront

$$\Phi = \rho\Psi.$$

Donc les maxima et minima cherchés de l'expression $\frac{\Phi}{\Psi}$ seront les racines de l'équation en ρ.

VII. CINÉMATIQUE.

70. Nous appellerons *mouvement* d'un corps dans l'espace l'opération qui consiste à opérer sur les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de chacun de ses points la substitution

$$(101) \qquad \Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n & a_{n1}x_n + \ldots + a_{nn}x_n + \alpha_n \end{vmatrix},$$

$a_{11}, \ldots, a_{nn}$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale ayant pour déterminant $+1$.

Si la substitution se réduit à

$$(102) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \alpha_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n & x_n + \alpha_n \end{vmatrix},$$

elle représentera une *translation*.

Si elle laisse immobile un point, elle représentera une *rotation autour de ce point;* si elle laisse immobiles tous les points d'un k-plan, ce sera une *rotation autour de ce k-plan.*

71. Il est clair que *le mouvement général représenté par les équations* (101) *se décompose en deux autres* : 1° *Une rotation autour de l'origine*

$$(103) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{vmatrix};$$

2° *La translation* (102).

Il est clair que *cette translation peut elle-même se décomposer en une infinité de translations successives infiniment petites opérées suivant la même direction.*

Nous allons montrer d'autre part que *la rotation* (103) *se décompose elle-même en une infinité de rotations infiniment petites.*

72. La chose est évidente s'il s'agit d'une rotation autour d'un des biplans coordonnés, tel que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; car deux mouvements de cette espèce,

$$(104) \qquad \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha \\ x_2 & -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \\ x_3 & x_3 \\ \cdots & \cdots \end{array} \right|$$

et

$$(104) \qquad \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta \\ x_2 & -x_1 \sin\beta + x_2 \cos\beta \\ x_3 & x_3 \\ \cdots & \cdots \end{array} \right|,$$

étant opérés successivement, donnent pour mouvement résultant le suivant

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \cos(\alpha+\beta) + x_2 \sin(\alpha+\beta) \\ x_2 & -x_1 \sin(\alpha+\beta) + x_2 \cos(\alpha+\beta) \\ x_3 & x_3 \\ \cdots & \cdots \end{array} \right|.$$

Soit donc m un entier très-grand. Le mouvement (104) s'obtiendra en répétant m fois le mouvement très-petit

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \cos\frac{\alpha}{m} + x_2 \sin\frac{\alpha}{m} \\ x_2 & -x_1 \sin\frac{\alpha}{m} + x_2 \cos\frac{\alpha}{m} \\ x_3 & x_3 \\ \cdots & \cdots \end{array} \right|,$$

73. Nous allons maintenant montrer : 1° que *toute rotation autour d'un ρ-plan*, tel que $x_1 = \ldots = x_\rho = 0$ (et, par suite, en faisant $\rho = n$, toute rotation autour de l'origine), *résulte de la combinaison de rotations autour des biplans coordonnés ;* 2° *que parmi les rotations autour de ce ρ-plan, il en est une qui remplace x_1 par $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1\rho}x_\rho$, quels que soient $a_{11}, \ldots, a_{1\rho}$, pourvu qu'ils satisfassent à l'unique condition*

$$a_{11}^2 + \ldots + a_{1\rho}^2 = 1.$$

Cela est évident pour les rotations autour d'un biplan.

Supposons que ce soit prouvé pour les rotations autour d'un ρ-plan; nous allons voir que ce sera encore vrai pour les rotations autour d'un $\rho+1$-plan.

On aura par hypothèse une substitution orthogonale de la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1\rho}x_\rho \\ \cdot & \cdot \\ x_\rho & a_{\rho 1}x_1 + \ldots + a_{\rho\rho}x_\rho \\ x_{\rho+1} & x_{\rho+1} \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

dérivée des substitutions analogues à (104), $a_{11}, \ldots, a_{\rho 1}$ étant assujettis à cette seule condition

$$a_{11}^2 + \ldots + a_{\rho 1}^2 = 1.$$

Combinant cette substitution avec la suivante

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos\alpha + x_{\rho+1} \sin\alpha \\ \cdot & \cdot \\ x_{\rho+1} & -x_{\rho+1} \sin\alpha + x_{\rho+1} \cos\alpha \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

on aura comme résultante une substitution autour du $\rho+1$-plan $x_1 = \ldots = x_{\rho+1} = 0$, laquelle remplacera x_1 par $a_{11} \cos\alpha\, x_1 + \ldots + a_{1\rho} \cos\alpha\, x_\rho + \sin\alpha\, x_{\rho+1}$, expression dont les coefficients seront évidemment assujettis à la seule condition

$$(a_{11} \cos\alpha)^2 + \ldots + (a_{1\rho} \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Soit maintenant U une rotation quelconque effectuée autour du $\rho+1$-plan $x_1 = \ldots = x_{\rho+1} = 0$; $b_{11}x_1 + \ldots b_{1,\rho+1}x_{\rho+1}$ l'expression par laquelle elle remplace x_1; on pourra choisir S et T de telle sorte qu'on ait $a_{11}\cos\alpha = b_{11}$, $\ldots$, $a_{1\rho} \cos\alpha = b_{1\rho}$, $\sin\alpha = b_{1,\rho+1}$; cela fait, on aura $U = STV$, V étant une nouvelle substitution qui n'altérera plus x_1. Donc V sera une rotation autour du ρ-plan $x_2 = \ldots = x_{\rho+1} = 0$ et pourra s'obtenir, par hypothèse, en combinant ensemble des rotations autour des biplans coordonnés.

74. On obtient aisément la forme générale des substitutions linéaires orthogonales infiniment voisines de l'unité. Posons en effet dans les équations de l'orthogonalité

$$a_{1\rho}^2 + \ldots + a_{n\rho}^2 = 1, \tag{105}$$

$$a_{1\rho}a_{1\sigma} + \ldots + a_{n\rho}a_{n\sigma} = 0, \tag{106}$$

$$a_{\rho\rho} = 1 + \varepsilon_{\rho\rho}, \quad a_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\rho\sigma},$$

$\varepsilon_{\rho\rho}$ et $\varepsilon_{\rho\sigma}$ étant des quantités très-petites, dont on puisse négliger les produits et les carrés. Les équations (105) et (106) donneront $\varepsilon_{\rho\rho} = 0$, $\varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0$, ce qui donnera pour l'expression générale des rotations infiniment petites la suivante

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \ldots \\ x_2 & -\varepsilon_{12}x_1 + x_2 + \ldots \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \tag{107}$$

En particulier, une rotation infiniment petite autour du biplan (x_1, x_2) sera de la forme

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + \varepsilon x_2 \\ x_2 & -\varepsilon x_1 + x_2 \\ x_3 & x_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right|.$$

75. Pour pénétrer plus avant dans la nature des mouvements que l'on peut exécuter dans l'espace, il importe de simplifier leur expression par un changement de coordonnées convenable. Mais avant de traiter cette question, il convient de dire quelques mots des substitutions linéaires générales, dont les substitutions orthogonales que nous considérons ici ne sont qu'un cas particulier.

Soit

$$S = \left| \begin{array}{ll} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array} \right|$$

une substitution linéaire. Elle multipliera la fonction linéaire

$$y = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

par un facteur constant s, si l'on a les équations

$$(108) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}c_1 + \ldots + a_{n1}c_n = sc_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ a_{n1}c_1 + \ldots + a_{nn}c_n = sc_n. \end{array} \right.$$

Pour pouvoir satisfaire à ces équations sans annuler à la fois $c_1, \ldots, c_n$, il faudra que l'on ait

$$(109) \qquad \left| \begin{array}{ll} a_{11} - s \ldots & a_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{1n} \quad \ldots & a_{nn} - s \end{array} \right| = 0.$$

Cette équation donnera, pour s, n valeurs généralement distinctes $s_1, \ldots, s_n$ (nous laissons de côté le cas des racines égales, qui sort de notre sujet actuel ; il peut d'ailleurs se traiter par des procédés semblables à ceux que nous avons exposés tout au long dans notre *Traité des substitutions*, liv. II, chap. II, pour une question analogue). Ces valeurs étant substituées successivement dans les équations (108), elles détermineront les rapports des quantités $c_1, \ldots, c_n$. On obtiendra donc n fonctions

$$y_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n, \ldots, y_n = c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n,$$

que S multiplie respectivement par $s_1, \ldots, s_n$. En les prenant pour variables indépendantes à la place de $x_1, \ldots, x_n$, on donnera à S la forme canonique

$$(110) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & s_1 y_1 \\ \cdot & \cdot \\ y_n & s_n y_n \end{vmatrix}.$$

On voit par ce qui précède que cette forme canonique est unique. Pour que deux substitutions S et S′ soient transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, il sera évidemment nécessaire et suffisant qu'elles aient la même forme canonique. Donc, l'équation en s qui détermine les coefficients de la forme canonique doit être la même pour S que pour S′. Les n coefficients de cette équation seront autant d'*invariants*, dont les valeurs caractériseront ce qui, dans la substitution considérée, est permanent et indépendant du choix des indices.

76. Les invariants de la substitution S satisfont à des équations différentielles partielles, qu'il est aisé d'établir.

Soit $\varphi(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ un de ces invariants; si S, transformé par une substitution linéaire quelconque T, prend la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a'_1 x_{11} + \ldots + a'_{1n} x_n \\ \cdot & \cdot \\ x_n & a'_{n1} x_1 + \ldots + a'_{nn} x_n \end{vmatrix},$$

on aura la condition

$$(111) \qquad \varphi(a'_{11}, \ldots, a'_{nn}) = \varphi(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Supposons que T soit une substitution infiniment voisine de l'unité et de la forme

$$(112) \qquad \begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_{\rho-1} & x_1, \ldots, x_{\rho-1} \\ x_\rho & x_\rho + \varepsilon x_\sigma \\ x_{\rho+1}, \ldots, x_n & x_{\rho+1}, \ldots, x_n \end{vmatrix},$$

ε étant très-petit; il viendra

$$\begin{aligned} a'_{pq} &= a_{pq} && \text{si } p \gtrless \rho,\ q \gtrless \sigma, \\ a'_{p\sigma} &= a_{p\sigma} - \varepsilon a_{p\rho} && \text{si } p \gtrless \rho, \\ a'_{\rho q} &= a_{\rho q} + \varepsilon a_{\sigma q} && \text{si } q \gtrless \sigma, \\ a_{\rho\sigma} &= a_{\rho\sigma} + \varepsilon a_{\sigma\sigma} - \varepsilon a_{\rho\rho} - \varepsilon^2 a_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (111) et négligeant le carré de ε, il viendra

$$-\sum_p \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\rho} + \sum_q \frac{d\varphi}{da_{\rho q}} a_{\sigma q} + \frac{d\varphi}{da_{\rho\sigma}} (a_{\sigma\sigma} - a_{\rho\rho}) = 0,$$

expression qui prendra la forme plus simple

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\rho} = \sum \frac{d\varphi}{da_{\rho q}} a_{\sigma q},$$

en supprimant les restrictions $p \lessgtr \rho$, $q \lessgtr \sigma$.

En faisant varier ρ et σ, on obtiendra une suite d'équations analogues, qui suffiront à exprimer que φ est invariable par les substitutions linéaires de déterminant 1 ; car on sait que toute substitution de cette sorte s'obtient en combinant des substitutions analogues à (112).

77. Pour que φ soit invariable par toute transformation linéaire, il faudra de plus qu'il ne change pas, lorsque la transformante sera de la forme

$$\begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_{\rho-1} & x_1, \ldots, x_{\rho-1} \\ x_\rho & (1+\varepsilon)x_\rho \\ x_{\rho+1}, \ldots, x_n & x_{\rho+1}, \ldots, x_n \end{vmatrix}.$$

Mais on aura alors

$$\begin{aligned} a'_{pq} &= a_{pq} \text{ si } p \gtrless \rho, q \gtrless \rho \text{ ou si } p = q = \rho, \\ a'_{\rho p} &= (1 = \varepsilon) a_{\rho p}, \\ a'_{p\rho} &= \frac{1}{1+\varepsilon} a_{p\rho}, \end{aligned}$$

et l'équation (111) donnera l'équation différentielle

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{\rho p}} = \sum \frac{d\varphi}{da_{p\rho}}.$$

78. Si l'on veut que la substitution U, qui transforme S en S', soit non-seulement linéaire, mais orthogonale, on aura $\frac{n(n-1)}{2}$ nouvelles équations de condition, exprimant que *les carrés des cosinus des angles mutuels des plans*

$$y_1 = 0, \ldots, y_n = 0,$$

sont égaux à ceux des plans

$$y'_1 = 0, \ldots, y'_n = 0,$$

auxquels il faut rapporter S' *pour la ramener à sa forme canonique.*

En effet, s'il existe des variables $x'_1, \ldots, x'_n$ liées orthogonalement à $x_1, \ldots, x_n$, et telles que S', rapporté à ces nouvelles variables, ait la même forme que S rapporté à $x_1, \ldots, x_n$; S', rapporté aux variables

$$y'_1 = c_{11}x'_1 + \ldots + c_{1n}x'_n, \ldots, y'_n = c_{n1}x'_1 + \ldots + c_{nn}x'_n,$$

aura la forme canonique (110). D'ailleurs le système d'axes $x'_1, \ldots, x'_n$ étant

orthogonal comme le système $x_1, \ldots, x_n$, les carrés des cosinus des angles mutuels des plans $y'_1, \ldots, y'_n$ seront évidemment donnés par les mêmes formules que ceux des plans $y_1, \ldots, y_n$.

Réciproquement, si les carrés des cosinus des angles des plans $y'_1, \ldots, y'_n$ sont égaux à ceux des plans $y_1, \ldots, y_n$, il est clair que ceux de $x'_1, \ldots, x'_n$ sont égaux à ceux de $x_1, \ldots, x_n$. Ils seront donc nuls, et les axes $x'_1, \ldots, x'_n$ rectangulaires ; et la substitution

$$| x_1, \ldots, x_n \quad x'_1, \ldots, x'_n | ,$$

par laquelle on passe de S′ à S, sera orthogonale.

Si donc on se borne à des transformations orthogonales, S aura, outre les n invariants précédemment trouvés, $\frac{n(n-1)}{2}$ invariants orthogonaux, donnés par la formule

$$\cos^2(y_r, y_s) = \frac{(c_{r1}c_{s1} + \ldots + c_{rn}c_{sn})^2}{(c_{r1}^2 + \ldots + c_{rn}^2)(c_{s1}^2 + \ldots + c_{sn}^2)} .$$

Les coefficients c, qui figurent dans ces invariants, dépendent des irrationnelles s_r, s_ϱ ; mais on pourra remplacer ces invariants irrationnels par les coefficients de l'équation qui les détermine, lesquels sont symétriques en $s_1, \ldots, s_n$ et par suite rationnels.

79. Les invariants orthogonaux satisfont aux équations différentielles suivantes

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\varrho} - \sum \frac{d\varphi}{da_{p\varrho}} a_{p\sigma} = \sum \frac{d\varphi}{da_{\varrho q}} a_{\sigma q} - \sum \frac{d\varphi}{da_{\sigma q}} a_{\varrho q} .$$

On les obtiendra aisément en exprimant qu'ils ne sont pas altérés lorsqu'on transformera S par une rotation infiniment petite autour de l'un quelconque des biplans coordonnés. Mais ces équations différentielles ne suffiront pas pour caractériser complétement l'invariance. Car elles expriment seulement que φ ne varie pas lorsqu'on transforme S par une substitution orthogonale de déterminant 1. Il faut encore exprimer que φ ne change pas lorsqu'on transforme x par une substitution orthogonale de déterminant -1 ; par exemple, lorsqu'on change le signe de l'une des variables.

80. Supposons maintenant que la substitution S soit orthogonale, et admettons, pour fixer les idées, que l'équation caractéristique en s ait une racine réelle s_1. Le plan $y_1 = 0$ sera réel, et l'on pourra trouver un système de n plans orthogonaux $y_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$ dont il fasse partie. En les prenant pour plans coordonnés, S prendra la forme

$$\left| \begin{array}{l} y_1 \quad s_1 y_1 \\ x'_2 \quad a'_{21} y_1 + a'_{22} x'_2 + \ldots + a'_{2n} x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n \quad a'_{n1} y_1 + a'_{2n} x'_2 + \ldots + a'_{nn} x'_n \end{array} \right| ,$$

et comme elle n'a pas cessé d'être orthogonale, on aura

$$s_1^2 = 1,\ s_1^2 + a_{21}'^2 + \ldots + a_{n1}'^2 = 1,$$

d'où

$$s_1 = \pm 1,\ a_{21}' = \ldots = a_{n1}' = 0,$$

et l'équation caractéristique de S deviendra

$$(s - s_1) \begin{vmatrix} a_{22}' - s & \ldots & a_{2n}' \\ a_{n2}' & \ldots & a_{nn}' - s \end{vmatrix} = 0.$$

81. Admettons, pour fixer les idées, que le dernier déterminant que nous venons d'écrire, égalé à zéro, admette une racine imaginaire $s_2 = p + qi$; il admettra également sa conjuguée $s_3 = p - qi$; et si $X_2 = Z_2 + iZ_3$ est la fonction imaginaire de $x_2', \ldots, x_n'$ que S multiplie par s_2, la fonction conjuguée $X_3 = Z_2 - iZ_3$ sera évidemment multipliée par s_3. Donc S remplacera les fonctions réelles Z_2 et Z_3 par $pZ_2 - qZ_3$ et $qZ_2 + pZ_3$.

Cela posé, on peut déterminer dans le biplan $Z_2 = Z_3 = 0$ deux plans rectangulaires $z_2 = \lambda Z_2 + \mu Z_3 = 0$, $z_3 = \lambda' Z_2 + \mu' Z_3 = 0$, et la substitution S remplacera z_2, z_3 par des fonctions de Z_2, Z_3, lesquelles pourront s'exprimer en fonction de z_2 et z_3.

Prenons maintenant pour plans coordonnés, au lieu de $x_2', \ldots, x_n'$, les plans $z_2 = 0, z_3 = 0$ et $n - 3$ plans rectangulaires $x_4'' = \ldots = x_n'' = 0$ situés dans le $n - 3$-plan perpendiculaire au triplan $y_1 = z_2 = z_3 = 0$. La substitution S prendra la forme

$$\begin{vmatrix} y_1 & \mp y_1 & & & \\ z_2 & tz_2 & + & sz_3 & \\ z_3 & tz_2 & + & uz_3 & \\ x_4'' & a_{42}''z_2 + a_{43}''z_3 & + & a_{44}''x_4'' & + \ldots + a_{4n}''x_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n'' & a_{n2}''z_2 + a_{n3}''z_3 & + & a_{n4}''x_4'' & + \ldots + a_{nn}''x_n'' \end{vmatrix},$$

et comme elle est orthogonale, on aura

$$r^2 + s^2 = 1,\ t^2 + u^2 = 1,\ rt + su = 0,$$
$$r^2 + t^2 + a_{42}''^2 + \ldots + a_{n2}''^2 = 1,\ s^2 + u^2 + a_{43}''^2 + \ldots + a_{n3}''^2 = 1.$$

On déduit des trois premières équations

$$r = \cos\alpha,\ s = \sin\alpha,\ t = -\sin\alpha,\ u = \cos\alpha,$$
$$r^2 + t^2 = s^2 + u^2 = 1,$$

d'où

$$a_{42}'' = \ldots = a_{n2}'' = a_{43}'' = \ldots = a_{n3}'' = 0.$$

Cela posé, suivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{44}'' - s & \ldots & a_{4n}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n4}'' & \ldots & a_{nn}'' - s \end{vmatrix}$$

aura une racine réelle ou un couple de racines imaginaires, on appliquera de nouveau à S un des deux modes de réduction ci-dessus. Poursuivant ainsi, on arrivera finalement à mettre S sous une forme telle que la suivante, où nous changeons pour plus de commodité, l'ordre et la désignation des variables

$$S = \left| \begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1, -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ y_{2\rho-1}, y_{2\rho} & y_{2\rho-1} \cos\alpha_\rho + y_{2\rho} \sin\alpha_\rho, -y_{2\rho-1} \sin\alpha_\rho + y_{2\rho} \cos\alpha_\rho \\ y_{2\rho+1}, \ldots, & y_{2\rho+\sigma} - y_{2\rho+1}, \ldots, -y_{2\rho+\sigma} \\ y_{2\rho+\sigma+1}, y_n & y_{2\rho+\sigma+1}, \ldots, y_n \end{array} \right| .$$

Le déterminant de la substitution ci-dessus est évidemment égal à $(-1)^\sigma$; et comme il est égal à 1, par hypothèse, σ sera un nombre pair $2\sigma'$

82. Cela posé, admettons d'abord que n soit un nombre pair 2μ ; $\tau = 2\mu$. Si l'on a $\sigma = 0, \tau = 0$, S sera de la forme

$$(113)\quad S = \left| \begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1, -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos\alpha_\mu + y_{2\mu} \sin\alpha_\mu, -y_{2\mu-1} \sin\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu \end{array} \right| ,$$

laquelle forme générale contient comme cas particulier celui où l'on aurait $\sigma = 2\sigma'$, $\tau = 2\tau'$. Il suffirait en effet, pour obtenir la substitution relative à ce cas, de poser dans l'expression précédente

$$(114)\qquad \alpha_{\mu-\sigma'-\tau'} = \ldots = \alpha_{\mu-\tau'} = \pi,\ \alpha_{\mu-\tau'+1} = \ldots = \alpha_\mu = 0.$$

Si n est un nombre impair $2\mu+1$, $\tau = 2\mu+1-2\rho-2\sigma'$ sera impair, et l'on aura, en supposant $\sigma = 0, \tau = 1$,

$$(115)\quad S = \left| \begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1, -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos\alpha_\mu + y_{2\mu} \sin\alpha_\mu, -y_{2\mu-1} \sin\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu \\ y_{2\mu+1} & y_{2\mu+1} \end{array} \right| .$$

Et la formule relative au cas où l'on aurait $\sigma = 2\sigma'$, $\tau = 2\tau'+1$ s'obtiendra encore comme cas particulier de la précédente, en y faisant les suppositions (114).

83. Les expressions canoniques (113) et (115), auxquelles a été ramenée la substitution S, donnent immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Dans l'espace à 2μ dimensions, toute rotation autour d'un point est la résultante de μ rotations effectuées autour de μ biplans rectangulaires $x_1 = x_2 = 0, \ldots, x_{2\mu-1} = x_{2\mu} = 0$ passant par ce point.*

Théorème II. — *Dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, toute rotation autour d'un point est une rotation autour d'une droite $x_1 = \ldots = x_{2\mu} = 0$ passant par ce point, et sera la résultante de μ rotations effectuées autour de μ biplans rectangulaires $x_1 = x_2 = 0, \ldots, x_{2\mu-1} = x_{2\mu} = 0$ passant par cette droite.*

Les μ biplans ainsi définis seront dits les biplans *principaux* de la substitution considérée. On peut d'ailleurs évidemment, sans altérer la forme canonique de S, choisir à volonté dans chacun de ces biplans les deux plans rectangulaires que l'on prendra pour plans coordonnés.

84. Le théorème que, dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, toute rotation autour d'un point s'opère autour d'une droite a été déjà donné par M. Schläfli (*Journal de Crelle*, t. 65). L'auteur signale également l'existence de μ invariants dans la substitution orthogonale. Mais il ne nous paraît pas avoir établi que ces invariants sont les seuls ; et il ne donne pas la réduction de la substitution à sa forme canonique, laquelle nous semble indispensable pour se rendre un compte bien net de la nature de ces invariants.

85. Il est aisé d'*exprimer les cosinus des angles* $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ *en fonction des invariants de la substitution* S.

En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse d'un espace à 2μ dimensions. L'équation caractéristique (109) deviendra, en y supposant S ramenée à la forme canonique (113),

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 - s & \sin\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 - s & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 - s & \sin\alpha_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 - s & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$
$$= (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \ldots (s^2 - 2s\cos\alpha_n + 1).$$

Comparant cette forme réduite à la forme générale

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - s & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = f(s) = s^{2\mu} + A_1 s^{2\mu-1} + \ldots + A_{2\mu},$$

et posant, pour abréger,

$$B_1 = \sum_r \cos\alpha_r,\ B_2 = \sum_{r,r'} \cos\alpha_r \cos\alpha_{r'},\ \ldots,$$

il vient

$$(116)\quad \begin{cases} A_1 = -2B_1, \\ A_2 = 4B_2 + n, \\ A_3 = -8B_3 - 2(n-1)B_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_m = \sum (-2)^{m-2\rho} \dfrac{(n-m+2\rho)\ldots(n-m+\rho+1)}{1.2\ldots\rho} B_{m-2\rho}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

la sommation s'étendant depuis $\rho = 0$ jusqu'à $\rho = \frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ suivant que m est pair ou impair.

En renversant les relations (116), on obtiendra $B_1, \ldots, B_\mu$ en fonction des invariants $A_1, \ldots, A_{2\mu}$. D'ailleurs $B_1, \ldots, B_\mu$ sont les coefficients d'une équation du degré μ, dont $\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_\mu$ sont les racines.

S'il s'agit d'un espace à $2\mu + 1$ dimensions, S aura la forme canonique (115) qui a pour équation caractéristique

$$\begin{aligned} 0 &= (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \ldots (s^2 - 2s\cos\alpha_{2\mu} + 1)(1 - s) \\ &= (s^{2\mu} + A_1 s^{2\mu-1} + \ldots + A_{2\mu})(1 - s), \end{aligned}$$

les coefficients $A_1, \ldots, A_{2\mu}$ étant définis par les relations (116).

En comparant cette équation à l'équation générale

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - s & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = f(s) = -s^{2\mu+1} + C_1 s^{2\mu} + \ldots + C_{2\mu+1},$$

on aura les invariants $C_1, \ldots, C_{2\mu+1}$ exprimés par les relations

$$C_1 = 1 - A_1, \ldots, C_m = A_m - A_{m-1}.$$

Donc, ici encore, les invariants s'exprimeront en fonction de $B_1, \ldots, B_{2\mu}$ et réciproquement.

De ce qui précède, on déduit cette conséquence remarquable :

86. Théorème III. — *Si deux substitutions orthogonales* S, S′ *sont transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, on pourra toujours opérer cette transformation par une substitution orthogonale.*

En effet, si S′ est transformable en S, elle aura les mêmes invariants que S ; donc les quantités $\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_\mu$ seront égales aux quantités analogues $\cos \alpha'_1, \ldots, \cos \alpha'_\mu$ que contient la forme canonique de S′. Donc S et S′ auront même forme canonique, au signe près des sinus des angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$. Mais on peut changer à volonté le signe de $\sin\alpha_1$, par exemple, car il suffit de changer le signe d'une des deux coordonnées x_1, x_2 ; changement qui reste sans influence sur l'orthogonalité des axes coordonnés. Donc S et S′ ont même forme canonique, et l'on passera de l'une à l'autre par la substitution orthogonale qui sert à passer des coordonnées rectangulaires $x_1, \ldots, x_n$ aux coordonnées $x'_1, \ldots, x'_n$ également rectangulaires, pour les quelles S′ est réduite à sa forme canonique.

87. Les substitutions S, S′ seront dites *semblables* ou *inversement semblables*, suivant que la substitution orthogonale qui permet de transformer l'une dans l'autre a pour déterminant $+1$ ou -1.

Il est intéressant de déterminer à quel caractère on pourra distinguer l'une de l'autre ces deux sortes de similitude.

Supposons d'abord $n = 2\mu$, et considérons les deux expressions

$$f(1) = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & \dots & a_{1,2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2\mu,1} & \dots & a_{2\mu,2\mu} - 1 \end{vmatrix}, \quad f(-1) = \begin{vmatrix} a_{11} + 1 & \dots & a_{1,2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2\mu,1} & \dots & a_{2\mu,2\mu} + 1 \end{vmatrix},$$

qui toutes deux sont des invariants. Leur produit, effectué suivant la règle connue de la multiplication des déterminants, et simplifié à l'aide des équations qui définissent l'orthogonalité, se réduira à

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{21} - a_{12} & a_{31} - a_{13} & \dots \\ -a_{21} + a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ -a_{31} + a_{13} & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, gauche, symétrique, et de degré pair est un carré parfait, que nous pourrons désigner par R^2. Comme c'est d'ailleurs un invariant, la quantité R ne pourra que changer de signe lorsqu'on transformera S par une substitution orthogonale quelconque.

Or, si la substitution orthogonale qui change S en S′ a son déterminant égal à $+1$, elle résultera de la combinaison successive de substitutions infiniment petites. Transformant successivement S par ces substitutions composantes, on ne pourra altérer à chaque fois R que d'une quantité infiniment petite; et comme R doit rester invariable, ou changer de signe, il restera invariable. *On aura donc* $R = R'$, R' étant la fonction analogue à R formée avec les coefficients de S′.

Réciproquement, si $R = R'$, *la substitution qui sert à passer de* S *à* S′ *aura pour déterminant* $+1$. En effet, soit S″ ce que devient S en y changeant le signe de l'une des variables ; la fonction R sera changée en $R'' = -R$; et les substitutions orthogonales par lesquelles on passe de S à S″ ou de S″ à S′ auront pour déterminant -1. La substitution résultante, qui sert à passer de S à S′, aura donc le déterminant $+1$.

Soit maintenant $n = 2\mu + 1$. L'équation $f(s) = 0$ aura une racine égale à 1 ; et l'on pourra trouver une fonction des variables que S n'altère pas. Ses coefficients seront des fonctions rationnelles de $a_{11}, \dots, a_{nn}$, et l'on pourra, par un changement d'indices indépendants qui n'introduit aucune irrationnelle, mettre S sous la forme

$$\begin{vmatrix} x'_1 & b_{11}x'_1 + \dots + b_{1,2\mu}x'_{2\mu} \\ \cdot & \cdot \\ x'_{2\mu} & b_{2\mu,1}x'_1 + \dots + b_{2\mu,2\mu}x'_{2\mu} \\ x'_{2\mu+1} & x'_{2\mu+1} \end{vmatrix},$$

et la quantité $\mathfrak{R}$, formée avec $b_{11}, \dots, b_{2\mu,2\mu}$ comme R l'était tout à l'heure avec $a_{11}, \dots, a_{2\mu,2\mu}$, indiquera par son signe celui du déterminant de la substitution qui transforme S′ en S.

Lorsque la substitution S est mise sous sa forme canonique, on trouve immédiatement

$$R = \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_\mu.$$

88. La détermination des invariants $B_1, \ldots, B_\mu$ s'obtient d'une manière plus élégante lorsque la rotation S est infiniment petite.

Nous avons vu que S sera de la forme (107) et l'équation en s sera

$$f(s) = \begin{vmatrix} 1-s & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \ldots \\ \varepsilon_{21} & 1-s & \varepsilon_{23} & \ldots \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1-s & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

avec la condition $\varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0$.

Cette équation, développée suivant les puissances de $1 - s = t$, sera de la forme

$$t^n + s_1 t^{n-1} + \ldots + s_\rho t^{n-\rho} + \ldots = 0, \tag{117}$$

s_ρ désignant la somme des mineurs dérivés du déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \ldots \\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} & \ldots \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

en y supprimant $n - \rho$ colonnes choisies à volonté, et les lignes de même rang. Chacun de ces mineurs étant un déterminant gauche sera nul si ρ est impair, un carré si ρ est pair.

D'autre part, S étant supposé réduit à sa forme canonique, on aura, si $n = 2\mu$,

$$f(s) = (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \ldots (s^2 - 2s\cos\alpha_\mu + 1).$$

Cette expression, égalée à 0, donnera pour s les racines

$$\cos\alpha_1 \pm i\sin\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_\mu \pm i\sin\alpha_\mu,$$

lesquelles se réduiront sensiblement, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ étant très-petits, à

$$1 \pm i\alpha_1, \ldots, 1 \pm i\alpha_\mu.$$

L'équation (117) en t aura donc pour racines $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_\mu$, et, en prenant $-t^2$ pour inconnue, l'équation aura pour racines $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_\mu^2$.

Si $n = 2\mu + 1$, on aura

$$f(s) = (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \ldots (s^2 - 2s\cos\alpha_\mu + 1)(1 - s).$$

L'équation en t aura une racine nulle, que l'on supprimera ; prenant ensuite $-t^2$ pour inconnue, on aura ici encore une équation du degré μ, déterminant $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_\mu^2$.

89. Cherchons maintenant à simplifier l'expression d'un mouvement quelconque, défini par la substitution (101). On prendra d'abord pour axes coordonnés ceux qui réduisent à sa forme canonique la substitution sans termes constants

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots & \dots \\ x_n & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{vmatrix}.$$

Il est clair que la substitution Σ rapportée à ces nouveaux axes sera de la forme

$$\begin{vmatrix} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1 + \delta_1, \; -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_2 + \delta_2 \\ \dots & \dots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu + \delta_{2\mu-1}, \; -y_{2\mu-1} \sin\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu + \delta_{2\mu} \end{vmatrix},$$

si $n = 2\mu$, et de la forme

$$\begin{vmatrix} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1 + \delta_1, \; -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_1 + \delta_2 \\ \dots & \dots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos\alpha_\mu + y_{2\mu} \sin\alpha_\mu + \delta_{2\mu-1}, \; -y_{2\mu-1} \sin\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu + \delta_{2\mu} \\ y_{2\mu+1} & y_{2\mu+1} + \delta_{2\mu+1} \end{vmatrix},$$

si $n = 2\mu + 1$.

Mais on pourra simplifier encore cette expression par un nouveau changement d'axes. En effet, supposons pour fixer les idées que $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$ ne soient pas nuls, mais que $\alpha_{\rho+1}, \dots, \alpha_\mu$ le soient.

Posons $z_1 = y_1 + d_1$, $z_2 = y_2 + d_2$; Σ remplacera z_1, z_2 par

$$z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_1' + h_1, \; -z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_1 + h_2,$$

en posant

$$h_1 = \delta_1 + d_1(1 - \cos\alpha_1) - d_2 \sin\alpha_1,$$
$$h_2 = \delta_2 + d_1 \sin\alpha_1 + d_2(1 - \cos\alpha_1),$$

et l'on pourra déterminer d_1, d_2 de telle sorte que h_1 et h_2 s'annulent, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & 1 - \cos\alpha_1 \end{vmatrix} = 2 - 2\cos\alpha_1$$

étant différent de zéro.

On fera disparaître de même par un changement d'origine les constantes $\delta_3, \dots, \delta_{2\rho}$.

D'autre part, Σ remplace les variables $y_{2\rho+1}, \dots, y_n$ par $y_{2\rho+1} + \delta_{2\rho+1}, \dots, y_n + \delta_n$; elle n'altérera donc pas la fonction

$$\Psi = \lambda_{2\rho+1} y_{2\rho+1} + \dots + \lambda_n y_n,$$

si l'on a la condition

$$\lambda_{2\rho+1}\delta_{2\rho+1}+\ldots+\lambda_n\delta_n=0.$$

Cette condition détermine une seule des quantités λ en fonction des autres, qui restent arbitraires. Les fonctions de la forme Ψ que Σ n'altère pas, égalées à zéro, détermineront donc un $n-2\rho-1$-plan $P_{n-2\rho-1}$, dans lequel on pourra trouver $n-2\rho-1$ plans rectangulaires $z_{2\rho+1},\ldots,z_{n-1}$, le $n-2\rho$-plan $y_{2\rho+1}=\ldots=y_n=0$ résultera d'ailleurs de l'intersection de $P_{n-2\rho-1}$ avec un dernier plan z_n perpendiculaire aux précédents. Prenant ces plans pour plans coordonnés, au lieu de $y_{2\rho+1},\ldots,y_n$, Σ prendra la forme

$$(118)\quad \left|\begin{array}{ll} z_1,z_2 & z_1\cos\alpha_1+z_2\sin\alpha_1,\ -z_1\sin\alpha_1+z_2\cos\alpha_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_{2\rho-1},z_{2\rho} & z_{2\rho-1}\cos\alpha_\rho+z_{2\rho}\sin\alpha_\rho,\ -z_{2\rho-1}\sin\alpha_\rho+z_{2\rho}\cos\alpha_\rho \\ z_{2\rho+1},\ldots,\ z_{n-1} & z_{2\rho+1},\ldots,\ z_{n-1} \\ z_n & z_n+\delta \end{array}\right|.$$

Donc le mouvement cherché résultera de la combinaison d'un mouvement de rotation autour d'un 2ρ-plan, joint à un mouvement de translation le long d'un axe perpendiculaire. Un semblable mouvement peut s'appeler *hélicoïdal*.

D'ailleurs, si l'on a $\rho=0$, le mouvement se réduit à une translation ; si $n-2\rho=0$ ou $n-2\rho>0$, mais $\delta=0$, il se réduit à une rotation. On a donc ce théorème :

Tout mouvement est une rotation, ou une translation, ou un mouvement hélicoïdal.

90. Dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, le mouvement hélicoïdal est la règle, et les autres sont des cas particuliers ; car $n-2\rho$ n'est pas nul et δ diffère en général de zéro.

Au contraire, dans l'espace à 2μ dimensions, on a en général $\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu$ différents de zéro, et l'on aura par suite $n-2\rho=0$, sauf les cas particuliers.

91. Voici enfin deux derniers théorèmes, qui sont la généralisation de ceux qui ont servi de point de départ à M. Chasles dans ses belles recherches sur le déplacement des solides.

Supposons $\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho$, δ infiniment petits, et négligeons les carrés de ces quantités. Il viendra, pour la représentation canonique d'un mouvement infiniment petit

$$(119)\quad \left|\begin{array}{ll} z_1,z_2 & z_1+\alpha_1z_2,\ -\alpha_1z_1+z_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ z_{2\rho-1},z_{2\rho} & z_{2\rho-1}+\alpha_\rho z_{2\rho},\ -\alpha_\rho z_{2\rho-1}+z_\rho \\ z_{2\rho+1},\ldots,\ z_{n-1} & z_{2\rho+1},\ldots,\ z_{n-1} \\ z_n & z_n+\delta \end{array}\right|,$$

et soient $\Delta\zeta_1, \ldots, \Delta\zeta_n$ les accroissements des coordonnées du point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Le plan mené par ce point normalement au déplacement aura pour équation

$$\begin{aligned}0 &= (z_1 - \zeta_1)\Delta\zeta_1 + \ldots + (z_n - \zeta_n)\Delta\zeta_n \\ &= (z_1 - \zeta_1)\alpha_1\zeta_2 - (z_2 - \zeta_2)\alpha_1\zeta_1 + \ldots + (z_{2\rho-1} - \zeta_{2\rho-1})\alpha_1\zeta_{2\rho} \\ &\qquad - (z_{2\rho} - \zeta_{2\rho})\alpha_1\zeta_{2\rho-1} + (z_n - \zeta_n)\delta \\ &= \alpha_1(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1) + \ldots + \alpha_\rho(z_{2\rho-1}\zeta_{2\rho} - z_{2\rho}\zeta_{2\rho-1}) + \delta(z_n - \zeta_n).\end{aligned}$$

Cette équation étant symétrique par rapport à $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ et $z_1, \ldots, z_n$, on a le théorème de réciprocité suivant :

Théorème. — *Si le plan normal au déplacement du point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ passe par le point $z_1, \ldots, z_n$, le plan normal du déplacement de $z_1, \ldots, z_n$ passera par $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.*

92. Si ce point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ se meut dans un k-plan

$$A_1 = \ldots = A_k = 0, \tag{120}$$

les plans normaux aux déplacements se couperont suivant un $n-k+1$-plan *conjugué au k-plan*, lequel s'obtiendra en éliminant k des quantités $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de l'équation du plan normal à l'aide des équations (120), et égalant à zéro les coefficients des quantités restantes.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, qu'on a $k \leqslant n-k+1$, d'où $k \leqslant \frac{n+1}{2}$, $2k-1 \leqslant n$.

93. Théorème. — *Si les deux multiplans conjugués P_k, P_{n-k+1} ne sont pas contenus dans un même plan, le mouvement considéré S pourra se décomposer en deux rotations autour de ces multiplans.*

En effet, soit p' un point de P_{n-k+1} situé en dehors de P_k. Par ce point et par P_k on pourra faire passer un $k-1$-plan P_{k-1}. Soit p'' un point de P_{n-k+1} non contenu dans P_{k-1} ; par p'' et P_{k-1}, on fera passer un $k-2$-plan P_{k-2}, etc. On arrivera enfin à un plan P_1 passant par P_k et par $k-1$ points convenablement choisis dans P_{n-k+1}.

Cela posé, nous prendrons pour plan des x_1 le plan P_1 ; pour plan des x_2, un plan mené par P_2 perpendiculairement à P_1 ; ... ; pour plan des x_k, un plan mené par P_k perpendiculairement à P_{k-1} ; enfin, si $2k-1 < n$, $n-2k+1$ plans rectangulaires et perpendiculaires à P_{2k-1},

$$x_{2k} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Soient respectivement

$$\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n, \ldots, \zeta_1^{(k-1)}, \ldots, \zeta_n^{(k-1)}$$

les coordonnées de $p', \ldots, p^{(k-1)}$. Les points $p', p'', \ldots, p^{(k-1)}$ étant respectivement dans les multiplans $P_1, \ldots, P_{k-1}$, on aura

$$(121)\qquad \begin{cases} \zeta'_1 = 0, \\ \zeta''_1 = \zeta''_2 = 0, \\ \zeta_1^{(k-1)} = \zeta_2^{(k-1)} = \ldots = \zeta_{k-1}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs p' n'est pas dans P_2, p'' n'est pas dans P_3, etc. ; donc on aura

$$\zeta'_2 \gtrless 0,\ \zeta''_3 \gtrless 0, \ldots,\ \zeta_k^{(k-1)} \gtrless 0.$$

94. Cela posé, soit $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ un point quelconque de P_{n-k+1}; $\Delta\zeta_1, \ldots, \Delta\zeta_n$ les changements de ces coordonnées par suite du mouvement considéré. Le plan normal au déplacement sera

$$(122)\qquad (x_1 - \zeta_1)\Delta\zeta_1 + \ldots + (x_n - \zeta_n)\Delta\zeta_n = 0.$$

Par hypothèse, il doit passer par le multiplan P_k. Donc l'équation (122) doit être satisfaite identiquement en y posant $x_1 = \ldots = x_k = 0$, ce qui donne les conditions

$$(123)\qquad \Delta\zeta_{k+1} = \ldots = \Delta\zeta_n = 0,$$

$$(124)\qquad \zeta_1\Delta\zeta_1 + \ldots + \zeta_k\Delta\zeta_k = 0.$$

Soit d'ailleurs $z_1, \ldots, z_n$ un autre point de P_{n-k+1}; la distance de ce point au précédent ne doit pas être altérée; donc on aura

$$(z_1 - \zeta_1)(\Delta z_1 - \Delta\zeta_1) + \ldots + (z_n - \zeta_n)(\Delta z_n - \Delta\zeta_n) = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (123) et (124) et des relations analogues relatives à $z_1, \ldots, z_n$,

$$(125)\qquad z_1\Delta\zeta_1 + \zeta_1\Delta z_1 + \ldots + z_k\Delta\zeta_k + \zeta_k\Delta z_k = 0.$$

L'équation (125), appliquée au point p^{k-1} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la dernière, se réduira à

$$\zeta_k^{(k-1)}\Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0.\ \text{d'où}\ \Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0.$$

95. Soient maintenant $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ des quantités très-petites ; considérons la substitution

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon_1 x_k \\ x_2 & x_2 + \varepsilon_2 x_k \\ \cdot & \cdot \\ x_k & -\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 - \ldots + x_k \\ x_{k+1} & x_{k+1} \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

laquelle est une rotation autour de P_k. Pour que S se décompose en deux rotations autour de P_k et autour de P_{n-k+1}, il est évidemment nécessaire

et suffisant qu'il en soit de même de $ST' = S'$. D'ailleurs S' fera subir aux coordonnées du point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ les variations suivantes

$$(126) \qquad \Delta'\zeta_1 = \Delta\zeta_1 + \varepsilon_1\zeta_k, \ \Delta'\zeta_2 = \Delta\zeta_2 + \varepsilon_2\zeta_k, \ldots,$$

$$(127) \qquad \Delta'\zeta_k = \Delta\zeta_k - \varepsilon_1\zeta_1 - \varepsilon_2\zeta_2 - \ldots,$$

$$(128) \qquad \Delta'\zeta_{k+1} = \Delta\zeta_{k+1}, \ldots, \Delta'\zeta_n = \Delta\zeta_n,$$

et, d'après ces formules, il est clair que si les Δ satisfont comme on l'a supposé aux relations (123), (124) et (125), les Δ' satisferont aux relations toutes semblables

$$(129) \qquad \Delta'\zeta_{k+1} = \ldots = \Delta'\zeta_n = 0,$$

$$(130) \qquad \zeta_1\Delta'\zeta_1 + \ldots + \zeta_k\Delta'\zeta_k = 0,$$

$$(131) \qquad z_1\Delta'\zeta_1 + \zeta_1\Delta' z_1 + \ldots + z_k\Delta'\zeta_k + \zeta_k\Delta' z_k = 0.$$

Si maintenant on détermine ces arbitraires ε par les relations

$$\Delta\zeta_1^{(k-1)} + \varepsilon_1\zeta_k^{(k-1)} = 0, \ldots, \Delta\zeta_{k-1}^{(k-1)} + \varepsilon_{k-1}\zeta_k^{(k-1)} = 0,$$

ce qui ne peut souffrir de difficulté, $\zeta_k^{(k-1)}$ n'étant pas nul, on aura

$$(132) \qquad \Delta'\zeta_1^{(k-1)} = \ldots = \Delta'\zeta_{k-1}^{(k-1)} = 0.$$

On a d'ailleurs, $\zeta_1^{(k-1)}, \ldots, \zeta_{k-1}^{(k-1)}$ étant nuls,

$$(133) \qquad \Delta'\zeta_k^{(k-1)} = \Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0.$$

Donc la substitution T ne déplacera plus le point $p^{(k-1)}$.

96. Remplaçons maintenant, dans les équations (130) et (131), $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ par les valeurs particulières $\zeta_1^{(k-2)}, \ldots, \zeta_k^{(k-2)}$ et $z_1, \ldots, z_k$ par $\zeta_1^{(k-1)}, \ldots, \zeta_k^{(k-1)}$. Elles se réduiront, en tenant compte des relations (121) et (133), à

$$\zeta_k^{(k-2)}\Delta'\zeta_k^{(k-2)} + \zeta_{k-1}^{(k-2)}\Delta'\zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0,$$

$$\zeta_k^{(k-1)}\Delta'\zeta_k^{(k-2)} = 0,$$

d'où l'on déduit, $\zeta_k^{(k-1)}$ et $\zeta_{k-1}^{(k-2)}$ n'étant pas nuls,

$$\Delta'\zeta_k^{(k-2)} = 0, \ \Delta'\zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0.$$

Cela posé, considérons les substitutions

$$T' = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + \varepsilon'_1 x_{k-1} \\ x_2 & x_2 + \varepsilon'_2 x_{k-2} \\ \cdots & \cdots \\ x_{k-1} & -\varepsilon'_1 x - \varepsilon'_2 x_2 - \ldots + x_{k-1} \\ x_k & x_k \\ \cdots & \cdots \end{array} \right|,$$

laquelle est une rotation autour de P_k; S' sera décomposable en deux rotations autour de P_k et P_{n-k+1}, si $S'T' = S''$ l'est.

Les variations que S'' fait subir aux coordonnées de $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ seront représentées par les formules

$$\begin{aligned} \Delta''\zeta_1 &= \Delta'\zeta_1 + \varepsilon'\zeta_{k-1}, \ldots, \\ \Delta''\zeta_{k-1} &= \Delta'\zeta_{k-1} - \varepsilon'\zeta_1, \ldots, \\ \Delta''\zeta_\rho &= \Delta'\zeta_\rho \quad (\rho > k-1), \end{aligned}$$

et il est clair : 1° que les Δ'' satisferont aux relations (129), (130), (131); 2° qu'on aura

$$\Delta''\zeta_1^{(k-1)} = \ldots = \Delta''\zeta_k^{(k-1)} = 0, \quad \Delta''\zeta_k^{(k-2)} = \Delta''\zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0;$$

3° qu'on pourra déterminer les ε' de telle sorte que les autres coordonnées de $p^{(k-2)}$ ne subissent plus aucun changement.

Continuant ainsi, on arrivera à une dernière substitution

$$\Sigma = STT' \ldots,$$

laquelle ne déplace plus aucun des points $p', \ldots, p^{(k-1)}$.

97. Mais la substitution Σ se réduit à une rotation autour de P_{n-k+1}. Pour le prouver, il suffit de montrer qu'elle laisse invariables les coordonnées d'un point quelconque $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de ce multiplan. Or les variations $\Delta\zeta_1, \ldots, \Delta\zeta_n$ qu'elle fait subir à ces coordonnées satisfont aux équations (129), (130) et (131). Donc $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n$ ne sont pas altérés par Σ. Quant aux autres coordonnées, on aura les équations suivantes, déduites de (131) en y remplaçant successivement $z_1, \ldots, z_n$ par les coordonnées des points $p', \ldots, p^{(k-1)}$ (que Σ ne déplace pas), et en tenant compte des équations (121),

$$\begin{aligned} &\zeta_k^{(k-1)}\Delta\zeta_k = 0, \\ &\zeta_{k-1}^{(k-2)}\Delta\zeta_{k-1} + \zeta_k^{(k-2)}\Delta\zeta_k = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\zeta_2\Delta\zeta_2 + \ldots + \zeta_k\Delta\zeta_k = 0, \end{aligned}$$

équations d'où l'on déduit successivement

$$\Delta\zeta_k = 0, \ldots, \Delta\zeta_2 = 0.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation

$$\zeta_1\Delta\zeta_1 + \ldots + \zeta_k\Delta\zeta_k = 0$$

la réduiront à

$$\zeta_1\Delta\zeta_1 = 0.$$

Donc si ζ_1 n'est pas nul, on aura $\Delta\zeta_1 = 0$ et notre proposition sera démontrée.

Supposons, au contraire, que ζ_1 soit nul. Par hypothèse, P_{n-k+1} contient un point $z_1, \ldots, z_n$ qui n'est pas contenu dans le plan $x_1 = 0$. Donc z_1 ne sera pas nul : d'ailleurs on aura, par ce qui précède, $\Delta z_1 = \ldots = \Delta z_n = 0$. Donc l'équation (125), appliquée aux deux points $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ et $z_1, \ldots, z_n$, se réduira à

$$z_1 \Delta \zeta_1 = 0, \text{ d'où } \Delta \zeta_1 = 0,$$

ce qui complète la démonstration.

98. Comme application particulière, proposons-nous de résoudre le problème de la composition des rotations autour d'un point dans l'espace à quatre dimensions.

Si l'on pose $n = 4$, la formule (97) qui représente une rotation infiniment petite R autour de l'origine contiendra six paramètres variables ε_{12}, ε_{13}, ε_{14}, ε_{23}, ε_{24}, ε_{34}. Cela devait être; car une semblable rotation dépend de six éléments : 1° quatre angles, définissant la situation de ses biplans principaux ; 2° les amplitudes α, β des rotations partielles autour de ces biplans.

Cherchons à mettre la substitution sous une forme où ces deux sortes d'éléments soient immédiatement en évidence.

Soient $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ les plans coordonnés, et supposons que l'un B des biplans principaux de R fasse les angles φ et ψ avec le biplan A formé des deux plans $x = 0$, $y = 0$. On pourra, comme nous l'avons montré (IV), remplacer x, y, z, u par de nouvelles coordonnées rectangulaires

$$x' = x\cos\lambda + y\sin\lambda, \quad y' = -x\sin\lambda + y\cos\lambda,$$
$$z' = z\cos\rho + y\sin\rho, \quad u' = -z\sin\rho + u\cos\rho,$$

telles que les biplans A et B soient respectivement représentés par les équations

$$x' = 0, \quad y' = 0$$

et

$$X = x'\cos\varphi + z'\sin\varphi = 0, \quad Y = y'\cos\psi + u'\sin\psi = 0.$$

Le second biplan principal de R, étant perpendiculaire à B, sera l'intersection des deux plans

$$Z = -x'\sin\varphi + z'\cos\varphi = 0, \quad U = -y'\sin\psi + u'\cos\psi = 0.$$

Cela posé, prenons X, Y, Z, U pour plans coordonnés ; la rotation R prendra sa forme canonique

$$\begin{vmatrix} X, Y & X + \alpha Y, & -\alpha X + Y \\ Z, U & Z + \beta U, & -\beta Z + U \end{vmatrix}.$$

La même substitution, rapportée aux coordonnées x', y', z', u', prendra la forme

$$\left|\begin{array}{l} x' \; x' + ay' + bu' \\ y' - bx' + y' + cz' \\ z' - cy' + z' + du' \\ u' - bx' - dz' + u' \end{array}\right|,$$

en posant pour abréger

$$(134) \quad \left\{\begin{array}{l} a = \alpha \cos\varphi \cos\psi + \beta \sin\varphi \sin\psi, \\ b = -\alpha \cos\varphi \sin\psi + \beta \sin\varphi \cos\psi, \\ c = \alpha \sin\varphi \cos\psi - \beta \cos\varphi \sin\psi, \\ d = \alpha \sin\varphi \sin\psi + \beta \cos\varphi \cos\psi. \end{array}\right.$$

Enfin cette même substitution, rapportée aux coordonnées primitives x, y, z, u, sera de la forme

$$\left|\begin{array}{l} x \quad x + ay + ez + fu \\ y - ax + y + gz + hu \\ z - ex - gy + z + du \\ u - fx - hy - dz + u \end{array}\right|,$$

e, f, g, h étant déterminés par les relations

$$(135) \quad \left\{\begin{array}{l} e = -b \sin\rho \cos\lambda - c \cos\rho \sin\lambda, \\ f = \quad b \cos\rho \cos\lambda - c \sin\rho \sin\lambda, \\ g = -b \sin\lambda \sin\rho + c \cos\lambda \cos\rho, \\ h = \quad b \sin\lambda \cos\rho + c \cos\lambda \sin\rho \end{array}\right.$$

99. Posons maintenant

$$\begin{array}{ll} \alpha + \beta = 2\mathcal{A}, & \alpha - \beta = 2\mathcal{B}, \\ \varphi - \psi = m, & \varphi + \psi = n, \\ \lambda + \rho = \mu, & \lambda - \rho = \nu. \end{array}$$

Les formules (134) et (135) deviendront

$$\begin{array}{l} a = \mathcal{A} \cos m + \mathcal{B} \cos n, \\ b = \mathcal{A} \sin m - \mathcal{B} \sin n, \\ c = \mathcal{A} \sin m + \mathcal{B} \sin n, \\ d = \mathcal{A} \sin m - \mathcal{B} \cos n, \\ -e = \mathcal{A} \sin m \sin \mu + \mathcal{B} \sin n \sin \nu, \\ f = \mathcal{A} \sin m \cos \mu - \mathcal{B} \sin n \cos \nu, \\ g = \mathcal{A} \sin m \cos \mu - \mathcal{B} \sin n \cos \nu, \\ h = \mathcal{A} \sin m \sin \mu - \mathcal{B} \sin n \sin \nu. \end{array}$$

100. Considérons maintenant diverses rotations $R_1, R_2, \ldots, R_k$; et soient $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, m_i, n_i, \mu_i, \nu_i, a_i, \ldots, h_i$ les valeurs des paramètres $\mathcal{A}, \mathcal{B}, m, n, \mu, \nu, a, \ldots, h$ pour la substitutions R_i ; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, m, n, \mu, \nu, a, \ldots, h$ leurs valeurs pour la substitution résultante R.

Les quantités $a_1, \ldots, h_1, \ldots, a_k, \ldots, h_k$ étant supposées infiniment petites, on aura évidemment, en négligeant les termes du second ordre,

$$R' = R_1 \ldots R_k = \begin{vmatrix} x & x & & +y\sum_r a_r + z\sum_r e_r + u\sum_r f_r \\ y & -x\sum_r e_r + y & & +z\sum_r g_r + u\sum_r h_r \\ z & -x\sum_r e_r - y\sum_r g_r + z & & +u\sum_r d_r \\ u & -x\sum_r f_r - y\sum_r h_r - z\sum_r d_r + u & & \end{vmatrix} \quad (r=1,2,\ldots,k).$$

On aura donc

$$(136)\quad \begin{cases} \mathcal{A}\cos m = \frac{1}{2}(a+d) = \frac{1}{2}\sum(a_r - d_r) = \sum \mathcal{A}_r \cos m_r, \\ \mathcal{A}\sin m \sin\mu = \frac{1}{2}(h-e) = \frac{1}{2}\sum(h_r - e_r) = \sum \mathcal{A}_r \sin m_r \sin\mu_r, \\ \mathcal{A}\sin m \cos\mu = \frac{1}{2}(f+g) = \frac{1}{2}\sum(f_r + g_r) = \sum \mathcal{A}_r \sin m_r \cos\mu_r, \end{cases}$$

$$(136)\quad \begin{cases} \mathcal{B}\cos n = \frac{1}{2}(a-d) = \frac{1}{2}\sum(a_r - d_r) = \sum \mathcal{B}_r \cos n_r, \\ \mathcal{B}\sin n \sin\nu = -\frac{1}{2}(e+h) = -\frac{1}{2}\sum(e_r + h_r) = \sum \mathcal{B}_r \sin n_r \sin\nu_r, \\ \mathcal{B}\sin n \cos\nu = \frac{1}{2}(g-f) = \frac{1}{2}\sum(g_r - f_r) = \sum \mathcal{B}_r \sin n_r \cos\nu_r. \end{cases}$$

De ces formules résulte cette conséquence remarquable que les six paramètres $\mathcal{A}, m, \mu, \mathcal{B}, n, \nu$ se partagent en deux groupes, $\mathcal{A}, m, \mu$ et $\mathcal{B}, n, \nu$, de telle sorte que les valeurs des paramètres de chaque groupe dans la rotation résultante dépendent exclusivement des valeurs de ces mêmes paramètres dans les substitutions composantes.

101. La loi de cette dépendance peut d'ailleurs se représenter géométriquement d'une manière fort simple. Menons dans l'espace ordinaire, à partir de l'origine des coordonnées, une droite OA de longueur $\mathcal{A}$, ayant l'angle μ pour azimuth et l'angle m pour co-latitude. Menons de même une autre droite OB de longueur $\mathcal{B}$, d'azimuth ν et de co-latitude n. Le système de ces deux droites donnera une image géométrique de la rotation R.

Cela posé, les équations (136) expriment que la droite OA a pour projections sur ces trois axes coordonnés la somme des projections des droites $OA_1, \ldots, OA_k$ relatives aux rotations composantes $R_1, \ldots, R_k$. De même les

équations (137) expriment que 0B a pour projections la somme des projections de $0B_1, \ldots, 0B_7$. On a donc ce théorème :

Pour obtenir chacune des deux droites représentatives de la résultante d'un nombre quelconque de rotations concourantes, il suffira de composer, suivant les règles de la statique, les correspondantes qui servent à représenter les rotations composantes.

Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques ; par M. Laguerre.

(Séance du 26 mai 1875)

I

1. Je m'appuierai, dans tout ce qui suit, sur la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant données un nombre quelconque de courbes* K, K,′ K″,... *et un lieu* C *défini par la condition qu'il y existe une relation, du reste arbitraire, entre les directions d'un certain nombre des tangentes que l'on peut mener aux courbes données par un point de ce lieu ; appelons* C_0 *le lieu que l'on obtient en remplaçant, dans la définition de la courbe* C, *la courbe* K *par les points de contact des tangentes qu'on peut lui mener par un point* M *du plan : cela posé, la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe* C, *se confond avec la droite polaire du même point relativement à la courbe* C_0 (*).

Démonstration. — Soient

$$(1) \qquad U = (a, b, c, \ldots) = 0, \quad U' = (a', b', c', \ldots) = 0, \ldots$$

les équations mixtes des courbes K, K′, ..., et $V(a, b, \ldots; a', b', \ldots) = 0$ l'équation cartésienne de la courbe C ; cherchons d'abord ce que devient cette équation quand on substitue à la courbe K les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point (x, y) du plan. Soit $\omega = ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite quelconque ; l'équation mixte de la première polaire relativement à K est (F. B. N° 3)

$$(2) \qquad uU_2 - vU_1 + \omega\Pi = 0,$$

$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ étant l'équation de la première polaire de la droite de l'infini ; si nous éliminons λ et μ entre les équations (1) et (2), nous obtiendrons l'équation cartésienne des tangentes menées à K aux points de rencontre de cette courbe avec la droite donnée ; si ensuite, en faisant pour abréger $X = \xi - x$, $Y = \eta - y$, et en considérant ξ et η comme les coordonnées courantes, nous remplaçons respectivement dans l'équation ainsi

(*) J'emploie ici les notations de mon *Mémoire sur l'application des formes binaires à la géométrie* (*Journ. de Math.*, 3e série, t. I).

obtenue u, v et ω par μ', $-\lambda'$ et $\lambda'Y-\mu'X$, nous aurons l'équation mixte des points de contact des tangentes menées du point (x, y) à la courbe K. Faisant d'abord la substitution indiquée dans l'équation (2), il vient

$$(2)' \qquad \lambda'\frac{dU}{dx}+\mu'\frac{dU}{dy}+n(\lambda'Y-\mu'X)\,\Pi(\lambda,\mu)=0,$$

et c'est entre cette équation et l'équation (1) que nous devons éliminer λ et μ ; comme nous avons à déterminer la droite polaire du point (ξ, η) relativement à C_0, j'observe d'abord que l'on peut négliger les puissances de X et de Y supérieures à la première. L'équation mixte des points de contact devient alors simplement, en supprimant les accents,

$$(3) \qquad U(\lambda,\mu)+n(\lambda Y-\mu X)\,\Pi(\lambda,\mu)=0,$$

ou encore

$$(a,b,c)+[n\alpha Y,\,(n-1)\,\beta Y-\alpha X,\,(n-2)\,\gamma Y-2\beta X,\,\ldots].$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe C_0 s'obtiendra (en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première) en y remplaçant respectivement a, b, c, ... par $a+n\alpha Y$, $b+(n-1)\,\beta Y-\alpha X$, $c+(n-2)\,\gamma Y-2\beta X$, ..., et en substituant aux lettres x et y les lettres ξ,η dans les polynômes $a',b',\ldots,a'',b'',\ldots,\ldots$

Désignant, pour un instant, les résultats de cette substitution par A', B', ..., A'', B'', ..., ..., l'équation de la courbe C_0 sera

$$V_1=V(a+n\alpha Y,\ldots;A',B',\ldots;A'',B'',\ldots)=0,$$

et l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à C_0

$$\xi\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right)+\eta\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right)+\rho\left(\frac{dV_1}{d\rho}\right)=0,$$

les lettres ξ et η étant de nouveau remplacées par les lettres x et y dans les dérivées partielles.

On a évidemment

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right)=-\alpha\frac{dV}{db}-2\beta\frac{dV}{dx}-\ldots+\frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx}+\ldots+\frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx}+\ldots,$$

ou, en vertu de formules que j'ai données dans le mémoire déjà cité (F. B. N° 4),

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right)=\frac{dV}{da}\frac{da}{dx}+\frac{dV}{db}\frac{dV}{dx}+\ldots+\frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx}+\ldots+\frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx}+\ldots=\frac{dV}{dx}.$$

On démontrerait de même que $\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right)=\frac{dV}{dy}$ et $\left(\frac{dV_1}{d\zeta}\right)=\frac{dV}{dz}$.

La proposition est donc complètement établie.

Remarque. — Dans la définition de la courbe C_0, on voit que la courbe K a été remplacée par un système de points; il est clair que l'on pourrait faire de même pour chacune des autres courbes K′, K″, ..., et même pour toutes ces courbes.

2. La proposition précédente permet de résoudre dans un grand nombre de cas intéressants le problème suivant qui comprend, en particulier, le problème de la construction de la tangente :

Étant donnée une courbe, construire la droite polaire d'un point du plan relativement à cette courbe.

Ainsi, la podaire d'une courbe K étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle droit cette courbe et un point fixe P, on a immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée la podaire C *d'un point* P *relativement à une courbe* K, *la polaire* (*) *d'un point* M *du plan relativement à la podaire est la polaire du même point relativement aux divers cercles ayant pour diamètres les droites qui joignent le point* P *aux points de contact des tangentes menées du point* M *à la courbe* K.

Semblablement, une spirique A étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle donné α une conique B, on peut énoncer ce théorème :

La polaire d'un point M *relativement à la spirique* A *est la polaire de ce même point relativement aux deux cercles capables de l'angle donné et ayant pour corde commune la droite qui joint les points de contact des tangentes menées de* M *à la conique* B.

3. Les conséquences les plus importantes du théorème I sont contenues dans les propositions suivantes que j'ai déjà données dans une note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* (**).

Théorème II. — *Étant données deux courbes quelconques* K^m *et* K^n, *de classe respectivement égale à m et à n, la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux mn tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux mn droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Théorème III (corrélatif du précédent). — *Étant données deux courbes quelconques* C^m *et* C^n, *d'ordre respectivement égal à m et à n, le pôle d'une droite quelconque, relativement aux mn points d'intersection de ces courbes, est le pôle de la même droite relativement aux mn points d'intersection des tangentes menées à* C^m *aux points où cette courbe rencontre la droite avec les tangentes menées à* C^n *en ses points de rencontre avec la droite.*

(*) Ici, comme dans la suite de cette note, j'appelle simplement *polaire* d'un point la *droite polaire* de ce point.

(**) *Comptes rendus de l'Acad. des sc.* (mai 1875).

Théorème IV. — *La polaire d'un point quelconque relativement à une courbe de $n^{ème}$ classe est la polaire du même point relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point à la courbe.*

Remarque. — Si la courbe a des tangentes d'inflexion et des tangentes doubles, ces droites doivent être considérées comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque tangente double, et trois fois chaque tangente d'inflexion.

Théorème V (corrélatif du précédent). — *Le pôle d'une droite quelconque relativement à une courbe du $n^{ème}$ ordre est le pôle de la même droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection des tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite.*

Remarque. — Si la courbe a des points doubles et des points de rebroussement, ces points doivent être considérés comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque point double et trois fois chaque point de rebroussement.

II

4. Considérons une courbe gauche quelconque K et une droite de l'espace Δ; par cette droite, menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement aux points d'intersection du plan et de la courbe ; lorsque le plan tourne autour de la droite, le lieu du pôle est une droite que j'appellerai la polaire de Δ relativement à la courbe gauche et que je désignerai par la notation $\Delta(K)$.

Poncelet a donné de belles propriétés de ces polaires (*) ; on voit immédiatement, par exemple, que la polaire d'une droite relativement à une courbe gauche est la polaire de cette droite relativement aux tangentes menées à cette courbe aux points où elle est coupée par un plan quelconque mené par la droite. Je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué comment on peut déterminer la polaire d'une droite relativement à une courbe, lorsqu'au lieu de donner cette courbe on la définit comme l'intersection de deux surfaces. Je m'occuperai simplement ici du cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces, les autres cas se ramenant évidemment à celui-là.

Du théorème III on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème VI. — *Une courbe gauche étant l'intersection complète de deux*

(*) *Propriétés projectives des figures. Section IV.* Poncelet, au lieu du mot *polaire*, emploie l'expression d'*axe des moyennes harmoniques*.

surfaces S *et* S', *la polaire d'une droite relativement à cette courbe est la polaire de cette même droite relativement aux diverses droites d'intersection des plans menés tangentiellement à* S *aux points où cette surface rencontre la droite avec les plans menés tangentiellement à* S' *aux points où la droite coupe cette surface.*

5. Considérons une surface quelconque Σ et une droite de l'espace Δ; par cette droite menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement à la courbe d'intersection de la surface et du plan (la courbe étant considérée comme étant d'une classe donnée); lorsque le plan tourne autour de la droite, le pôle décrit une droite que j'appellerai la polaire de Δ, relativement à la surface et que je représenterai par la notation $\Delta(\Sigma)$.

Cette polaire peut être évidemment encore définie comme l'enveloppe des plans polaires des différents points de Δ relativement aux cônes circonscrits à Σ et ayant ces points pour sommets (ces cônes étant considérés comme d'un ordre donné).

Par suite, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à son ordre, c'est-à-dire n'a ni ligne double ni ligne de rebroussement, on déduit immédiatement du théorème V la proposition suivante:

Théorème VII. — *Si une surface du $n^{ème}$ ordre n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de cette droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites suivant lesquelles se coupent les plans qui touchent la surface aux points où elle rencontre la droite.*

De même, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à sa classe, le théorème IV donne la proposition suivante corrélative de la précédente :

Théorème VIII. — *Si une surface de $n^{ème}$ classe n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de la droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{}$ *droites qui joignent deux à deux les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite donnée.*

6. En particulier, si l'on considère une surface développable G ayant pour arête de rebroussement une courbe gauche K et un point quelconque M de la droite Δ, le plan polaire de M, relativement à l'ensemble des plans osculateurs de la courbe qui passent par ce point, enveloppe, quand le point M se déplace sur la droite, la polaire de cette droite relativement à G.

Si la développable G est définie au moyen de deux surfaces inscrites S et S', on a le théorème suivant corrélatif du théorème VI :

Théorème IX. — *Une surface développable* G *étant la développable complète circonscrite à deux surfaces* S *et* S', *la polaire d'une droite relativement à cette développable est la polaire de cette droite relativement aux droites qui*

joignent chacun des points de contact des plans menés par la droite tangentiellement à S *à chacun des points de contact des plans menés par la même droite tangentiellement à* S'.

7. En particulier, considérons une suite de surfaces homofocales du second ordre (Σ) inscrite dans la développable isotrope Γ.

Soient Σ et Σ' deux quelconques de ces surfaces; d'une droite Δ on peut leur mener quatre plans tangents, les droites qui joignent les points de contact sur l'une des surfaces avec les points de contact sur l'autre forment un quadrilatère gauche Q.

De ce qui précède, il résulte que :

La polaire de la droite Δ *par rapport au quadrilatère* Q (*) *est la même, quelles que soient les deux surfaces homofocales considérées, et se confond avec la polaire de cette même droite relativement à la développable isotrope circonscrite.*

En particulier, si la surface Σ' se réduit à l'ombilicale, la polaire de Δ se réduit à la polaire de cette droite relativement aux normales que l'on peut mener à Σ aux deux points où cette surface est touchée par les plans tangents qu'on peut lui mener par Δ. D'où cette conséquence :

Étant donné un système de surfaces homofocales du second ordre (Σ) *et une droite fixe* Δ, *si par* Δ *on mène les plans tangents à une surface quelconque* Σ *du système et si l'on prend la polaire de* Δ *relativement aux normales qu'on peut mener à* Σ *aux deux points de contact, la polaire de* Δ *relativement à ces normales est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère et elle se confond avec la polaire relativement à la développable isotrope circonscrite au système* (**).

III

8. Les deux théorèmes généraux VII et VIII s'appliquent, avec quelques modifications, à toute surface donnée, en sorte qu'ils fournissent en réalité deux moyens distincts de construire la polaire d'une droite donnée relativement à cette surface. Il serait facile d'énoncer à ce sujet les propositions générales, mais je crois inutile de le faire et je me contenterai d'énoncer les résultats relatifs à deux surfaces particulières des plus simples.

(*) Ce quadrilatère Q jouit encore de plusieurs autres propriétés intéressantes; ainsi *la somme de deux de ses côtés contigus est égale à la somme des deux autres.* (Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace, *Nouv. Ann. de Math.*, 1872.)

(**) Cette proposition s'étend évidemment à un système de surfaces homofocales quelconques; on peut la considérer comme l'extension à l'espace de ce théorème que j'ai donné depuis longtemps :

Le centre harmonique d'un point, par rapport aux points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à une courbe de $n^{ème}$ *classe, est le centre harmonique du même point relativement aux* n *foyers de la courbe.*

Considérons, en premier lieu, une cubique gauche K et la développable du 4ème ordre G dont elle est l'arête de rebroussement; soient $\Delta(K)$ et $\Delta(G)$ les polaires d'une même droite Δ relativement à la courbe gauche et à la développable (Cff. N° 4 et N° 6).

Si, d'un point quelconque M de la droite Δ, on mène le cône contenant la courbe K, ce cône est du 3ème degré et de la 4ème classe; il a trois plans d'inflexion, qui sont les plans osculateurs que l'on peut mener à K par le point M. Le plan polaire de M relativement à ce cône contient la polaire $\Delta(K)$; du théorème IV et des considérations ci-dessus développées (N° 6) résulte la proposition suivante :

Théorème X. — *En désignant par t l'ensemble des 6 droites qui joignent deux à deux les 4 points de la courbe* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a la relation*

$$2\Delta(t) = \Delta(K) + 3\Delta(G).$$

9. Concevons maintenant que, par la droite Δ, on mène un plan quelconque; il coupe la surface G suivant une courbe du 4ème ordre et de la 3ème classe ayant pour point de rebroussement ses trois points de rebroussement sur K. Le pôle de Δ relativement à cette courbe est sur $\Delta(G)$; du théorème V résulte la proposition suivante :

Théorème XI. — *En désignant par* T *l'ensemble des 6 droites suivant lesquelles se coupent les plans osculateurs menés aux points de* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(G) + 3\Delta(K).$$

Remarque. — On déduit de là

$$4\Delta(G) = 3\Delta(t) - \Delta(T)$$

et

$$4\Delta(K) = 3\Delta(T) - \Delta(t);$$

on voit que les polaires d'une droite relativement à K et à G sont déterminées quand on connaît les quatre tangentes à la courbe qui la rencontrent. Par suite :

Deux droites Δ et Δ', conjuguées par rapport à la cubique gauche K *ont mêmes polaires relativement à cette cubique, et relativement à la développable dont elle est l'arête de rebroussement.*

Ces deux polaires sont également conjuguées par rapport à la cubique.

10. Considérons en second lieu une surface réglée S du 3ème ordre (et par conséquent de 3ème classe); appelons D la directrice double de cette surface et D' la seconde directrice rectiligne; on sait que tout plan passant par D' est doublement tangent à la surface.

Cela posé, soient Δ une droite quelconque de l'espace et $\Delta(S)$ sa polaire relativement à S ; si l'on mène par Δ un plan quelconque, il coupe S suivant une courbe du 3ème ordre et de la 4ème classe, ayant pour point double le point de rencontre de ce plan avec D. Du théorème IV, on déduit la proposition suivante :

Théorème XII. — *En désignant par t le triangle formé par les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à* S *par la droite* Δ, *on a*

$$2\Delta(t) = \Delta(S) + 2\Delta(D).$$

11. Prenons maintenant un point quelconque M sur la droite Δ et imaginons le cône circonscrit à la surface et ayant ce point pour sommet; ce cône est de la 3ème classe et du 4ème ordre, il a pour plan double le plan mené par le point M et par la droite D'.

Du théorème V résulte donc la proposition suivante :

Théorème XIII. — *En désignant par* T *les arêtes du trièdre formé par les plans menés tangentiellement à* S *en ses points de rencontre avec* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(S) + 2\Delta(D').$$

Des deux relations précédentes, on déduit

$$\Delta(T) + \Delta(D) = \Delta(t) + \Delta(D'),$$

identité sur laquelle je reviendrai plus tard.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 17 FÉVRIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN

Est présenté, comme nouveau membre de la Société, M. Denys Cochin, à Paris.

M. Halphen communique un mémoire *Sur une question d'élimination.*

M. Laguerre communique des *Théorèmes analogues au théorème de Rolle, et relatifs aux racines imaginaires des équations algébriques.*

M. Mannheim présente quelques observations au sujet de la communication faite par M. Laguerre dans la précédente séance.

SÉANCE DU MERCREDI 3 MARS 1875

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN

M. Denys Cochin est élu membre de la Société.

Est présenté, comme nouveau membre, M. Maloizel, ancien élève de l'École polytechnique, à Paris.

M. Fouret communique une note sur la *Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré.*

M. Halphen fait une communication *Sur les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale polaire.*

SÉANCE DU MERCREDI 17 MARS 1875

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Maloizel est élu membre de la Société.

Sont présentés, comme nouveaux membres, MM. Tannery, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris; Puiseux, membre de l'Institut, à Paris.

M. Laguerre fait une communication *Sur l'intégrale de l'équation d'Euler.*

M. Halphen communique une note *Sur certaines perspectives gauches des courbes algébriques planes.*

SÉANCE DU MERCREDI 31 MARS 1875

PRÉSIDÉE PAR M. LEMONNIER

MM. Tannery et Puiseux sont élus membres de la Société.

M. Fouret communique quelques *Théorèmes sur les implexes et sur les systèmes de surfaces.*

M. Halphen présente quelques observations sur le même sujet.

M. de Polignac communique quelques *Théorèmes relatifs à des systèmes de courbes.*

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Brocard, d'une *Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant.*

SÉANCE DU MERCREDI 14 AVRIL 1875

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN

M. Fouret communique *Quelques propriétés des faisceaux de systèmes de courbes.*

M. le comte Hugo communique *Quelques remarques sur les publications, en langue allemande, relatives à l'histoire de la géométrie.*

M. Halphen présente *Quelques observations au sujet d'un théorème de M. Maximilien Marie, concernant les périodes cycliques des intégrales quadratrices des courbes algébriques.*

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Saltel, de plusieurs *Notes relatives aux cycliques et aux cyclides.*

SÉANCE DU MERCREDI 28 AVRIL 1875

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM

Est présenté, comme nouveau membre de la Société, M. Bischoffsheim, à Paris.

M. le comte Hugo fait une communication *Sur les ovhélites planétaires.*

M. Halphen communique le théorème suivant : *Étant données, sur une surface quelconque, plusieurs séries de courbes, telles que deux courbes quelconques de deux mêmes séries se coupent sous le même angle, les centres de courbure géodésique des courbes de toutes les séries, relatifs à un même point, sont en ligne droite.*

SÉANCE DU MERCREDI 12 MAI 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ

M. Bischoffsheim est élu membre de la Société.

Le secrétaire annonce que M. Bischoffsheim s'est fait inscrire comme *sociétaire perpétuel.*

M. Fouret fait une communication *Sur un nouveau mode de génération des courbes planes d'ordre n à point multiple d'ordre n — 1.*

M. Perrin présente quelques observations au sujet de cette communication.

M. Halphen présente quelques remarques sur le même sujet, et une extension de ce mode de génération à toutes les courbes unicursales.

M. de Polignac fait une communication *Sur un nouvel algorithme destiné à représenter le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, et sur quelques applications de cet algorithme.*

M. Jordan communique à la Société un *Essai sur la géométrie à n dimensions.*

SÉANCE DU MERCREDI 26 MAI 1875

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM

M. Halphen présente quelques observations au sujet d'un théorème de M. Laguerre, concernant les polaires des courbes algébriques, et le déduit d'un théorème de M. Liouville.

M. Laguerre communique, sur le même sujet, un théorème plus général, et en fait quelques applications.

SÉANCE DU MERCREDI 23 JUIN 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ

Est présenté, comme nouveau membre de la Société, M. Sancery, professeur de mathématiques, à Paris.

Le secrétaire donne lecture d'une lettre de M. Carl Ohrtmann, qui demande à échanger contre le *Bulletin* le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.

M. Halphen présente un mémoire de M. Schubert *Sur la détermination des caractéristiques des systèmes de cubiques planes et gauches*. M. Halphen rappelle, à ce sujet, quelques considérations développées par lui dans un précédent mémoire, et dont M. Schubert a fait usage dans le sien.

SÉANCE DU MERCREDI 7 JUILLET 1875

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN

M. Sancery est élu membre de la Société.

M. Tchebycheff communique une note *Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions*.

SÉANCE DU MERCREDI 21 JUILLET 1875

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN

L'Association française pour l'avancement des sciences invite la Société mathématique à déléguer un de ses membres pour la représenter aux séances qui doivent se tenir à Nantes. M. Mannheim est délégué.

M. Perrin fait une communication *Sur le principe d'un compas à $n+1$ tiges articulées permettant de partager un angle donné en n parties égales.*

M. Sancery donne lecture d'un mémoire *Sur les nombres qui appartiennent à un exposant donné suivant un module de la forme p^μ et $2p^\mu$.*

M. Fouret fait une communication *Sur quelques propriétés des rayons de courbure.*

FIN DU TOME TROISIÈME

TABLE DES MATIÈRES

État de la Société au 31 janvier 1875 5
Statuts de la Société. 9
Règlement administratif. 10

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

Séance du mercredi 11 novembre 1874. 16
Séance du mercredi 25 novembre 1874. 16
Séance du mercredi 9 décembre 1874. 17
Séance du mercredi 23 décembre 1874. 17
Séance du mercredi 6 janvier 1875. 17
Séance du mercredi 20 janvier 1875. 18
Séance du mercredi 3 février 1875. 19
Séance du mercredi 17 février 1875. 181
Séance du mercredi 3 mars 1875. 182
Séance du mercredi 17 mars 1875. 182
Séance du mercredi 31 mars 1875. 182
Séance du mercredi 14 avril 1875. 182
Séance du mercredi 28 avril 1875. 183
Séance du mercredi 12 mai 1875. 183
Séance du mercredi 26 mai 1875. 184
Séance du mercredi 23 juin 1875. 184
Séance du mercredi 7 juillet 1875. 184
Séance du mercredi 21 juillet 1875. 184

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur une propriété du polynôme $(x^2-1)^n$; par M. C. de Polignac. 19
Sur le contact des surfaces; par M. Halphen 28
Sur la courbure des surfaces de carène; par H. A. de Saint-Germain. 37
Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle; par M. Brocard. 38
Sur l'intégration de quelques équations différentielles; par M. L. V. Turquan. 40
Questions. 46
Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant; par M. H. Brocard 47
Mémoire sur la transformation des formes quadratiques; par M. H. Lemonnier. 48

Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; par M. Halphen. 76
Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré; par M. G. Fouret. . 93
Sur la génération des cycliques et cyclides; par M. L. Saltel. 95
Seconde note sur la génération des cycliques; par M. L. Saltel. 99
Sur les foyers des cycliques; par M. L. Saltel. 100
Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler; par M. Laguerre. 101
Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions; par M. Tchebychef. 103
Essai sur la géométrie à n dimensions; par M. Camille Jordan. 103
Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques; par M. Laguerre. 174

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

COMITÉ DE RÉDACTION.

BRISSE (Ch.).
JORDAN (Camille).
LAGUERRE.
LEVY (Maurice).
MANNHEIM.
SARRAU.

3612 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUATRIÈME. — ANNÉE 1875-76.

PARIS,

AU SIÉGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1876

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 JANVIER 1876.

(Les initiales S. P. désignent les sociétaires perpétuels.)

ACHARD (Marc), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
ALLÉGRET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont.
ANDRÉ (Désiré), agrégé de l'Université, à Paris.
ANTOINE (Ch.), ingénieur de la Marine, à Brest.
AOUST (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, à Paris.
BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BAILLOUD, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, à Paris.
BENOIST, docteur en droit, à Chalon-sur-Saône.
BERDELLÉ, ancien garde-général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, à Paris.
BEYNAC, professeur de Mathématiques, à Paris.
BIENAYMÉ (Alexis), capitaine du Génie, à Versailles.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, à Brest.
BIENAYMÉ (J.), membre de l'Institut, à Paris. S. P.
BISCHOFFSHEIM, banquier, à Paris. S. P.
BLEYNIE (Martial), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à Paris.
BOUCHÉ (A.), ancien élève de l'École Normale, directeur de l'École préparatoire d'Angers.
BOUFFET (M.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne.
BOURGET, agrégé de l'Université, à Paris.
BRÉMARD, architecte, à Paris.
BRIOSCHI, professeur à l'Université de Pavie (Italie).
BRISSE (A.), ingénieur en chef du desséchement du lac Fucino (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
BROCARD, capitaine du Génie, à Alger. S. P.
BRUNET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
CABART (Maurice), à Paris.
CAHEN, lieutenant du Génie, à Versailles.
CATALAN, professeur à l'Université de Liége (Belgique).
CHARLON, directeur de *la Confiance*, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, à Paris, S. P.
CHEVALLIER, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
CIVIALE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.

CLAVEUX, sous-intendant de 1re classe, à Versailles.
COCHIN (Denys), à Paris.
COLLET, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Troyes.
COLLIGNON (Éd.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
COMBEROUSSE (de), professeur à l'École Centrale, à Paris.
COMBETTE, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
CORNU (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
COURCELLES (C.), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
CUVINOT, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Mantes.
DARBOUX, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.
DESCHAMPS, bibliothécaire du Dépôt central de l'Artillerie, à Paris.
DESQ (L.), capitaine d'Artillerie, à Bourges.
DEWULF (Ed.), commandant du Génie, à Toulon.
DOSTOR (G.), docteur ès sciences, à Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).
DURRANDE (H.), professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Nîmes.
FLORENTIN, capitaine d'Artillerie, à Paris.
FLYE SAINTE-MARIE (C.), capitaine d'Artillerie, à Paris.
FONTÈS (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Condom (Gers).
FOURET (G.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
GARIEL (M.-C.), professeur à l'École de Médecine, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire, à Paris, S. P.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, professeur de Mathématiques, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à la Havane (Cuba).
GOFFART (M.), professeur de Mathématiques, à Paris.
GONZALÈS (José), directeur de l'Observatoire de Bogota (Colombie).
GOURNERIE (de la), membre de l'Institut, à Paris.
GRAINDORGE (J.), docteur ès sciences, à Liége (Belgique).
HAAG, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
HALPHEN (G.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris, S. P.
HATON DE LA COUPILLIÈRE, ingénieur des Mines, à Paris, S. P.
HATT (Ph.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HENRY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
HÉRAUD (G.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HERMARY, capitaine au 25e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris, S. P.
HILAIRE, professeur au lycée de Douai.
HIRST, directeur des études à l'École Navale de Greenwich.
HOUBIGANT (J.), commandant du Génie en retraite, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, à Paris.
HUYOT (E.), ingénieur des Mines, à Paris.
JACQUIER (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Bordeaux.
JANIN, capitaine au 13e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, à Paris.
JORDAN (C.), ingénieur des Mines, à Paris, S. P.
JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau
JULLY, chef d'institution, à Paris.
JUNG, professeur, à Milan.
KŒBLER, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAFONTAINE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris
LAGUERRE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAISANT, capitaine du Génie, à Sidi-Bel-Abbès.
LAQUIÈRE, capitaine d'Artillerie, à Blidah (Algérie).

LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LAX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.
LEFÉBURE DE FOURCY (R.), à Paris.
LEFFLER (Dr Mittag), professeur à l'Université d'Upsal (Suède).
LEHR, professeur au lycée de Marseille.
LEMOINE (E.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LÉVY (Albert), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LEVY (Maurice), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LEZ (H.), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
LIGUINE, professeur à l'Université d'Odessa (Russie).
LUCAS (E.), professeur au lycée de Moulins,
MALEYX (L.), professeur au collége Stanislas, à Paris.
MALLOIZEL, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
MANNHEIM (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
MAREL, colonel d'État-major en retraite, à Hussein-Dey, près d'Alger.
MARGERIE, sous-directeur de l'École Monge, à Paris.
MARIE (Maximilien), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
MARSILLY (général de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Auxerre.
MATHIEU, professeur à la Faculté des Sciences, à Nancy.
MICHELET, ingénieur civil, à Paris.
MIGNON (A.), capitaine au 6e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (G. de), lieutenant du Génie, à Paris.
MOREL (A.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
MOUTARD (Th.), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
NICOLAÏDÈS, professeur à l'Université d'Athènes (Grèce).
OVIDIO (Enrico d'), professeur à l'Université de Turin (Italie).
PARMENTIER (Th.), général de brigade, à Tours.
PARRAN (A.), ingénieur des Mines, à Paris.
PERCIN (A.), capitaine au 21e régiment d'Artillerie, à la Rochelle.
PERRIER, capitaine d'État-major, membre du Bureau des Longitudes, à Paris
PERRIN, ingénieur des Mines, à Paris.
PHILIPPE, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à Paris.
PICART (A.), député à l'Assemblée nationale, à Versailles.
PICQUET (H.), capitaine du Génie, à Paris.
PISTOYE (L. de), capitaine d'Artillerie, à La Fère.
PLOCQ (A.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Dunkerque.
POLIGNAC (Camille de), à Paris, S. P.
POUILLOT (J.), professeur à l'École normale de Cluny.
PUISEUX, membre de l'Institut, à Paris.
PUTZ (H.), lieutenant-colonel d'Artillerie, à Vernon (Eure).
RADAU (R.), à Paris.
RANCY (de), sous-directeur de *l'Aigle*, à Paris.
REINACH (baron de), banquier, à Paris.
RENAN, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
RESAL, membre de l'Institut, à Paris.
REY, professeur à l'École du Génie, à Arras.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RODET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, à Paris.
ROUCHÉ (E.), professeur à l'École Centrale, à Paris.
ROUSSELIN (A.), professeur au lycée de Douai.
ROUX (François), architecte, à Paris.
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Charles), membre de l'Institut, à Paris.

SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, à Paris.
SAINT-GERMAIN (A. de), professeur à la Faculté des Sciences, à Caen.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon.
SALTEL, professeur, à Châtellerault.
SANCERY, professeur, à Paris.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Senlis.
SCHÖNDÖRFFER, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
SCRIVANOFF (Grégoire), étudiant à l'Université de Saint-Pétersbourg (Russie).
SIVERING, ingénieur en chef des Travaux publics, à Luxembourg (grand-duché de Luxembourg).
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STUDNICKA, professeur à l'Université de Prague (Bohême).
TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.
TANNERY, ingénieur des Manufactures de l'État, à Bordeaux.
TARBOURIECH, agrégé de l'Université, à Paris.
TERRIER, agrégé de l'Université, à Paris.
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
TISSERAND, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
TRESCA (É.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.
TURPAULT, à Paris.
TURQUAN, docteur ès sciences, à la Chapelle Saint-Mesmin (Loiret).
VACOSSIN, capitaine d'État-major, à Paris.
VACQUANT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
VINTÉJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur au lycée d'Alger.
WELSCH, lieutenant d'Artillerie, à Saint-Omer.
WEYR (Édouard), étudiant à l'Université de Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague (Bohême).
WICKERSHEIM, ingénieur des Mines, à Paris.

STATUTS DE LA SOCIÉTÉ.

Article premier. La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siége est à Paris.

Art. 2. Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux mathématiques.

Art. 3. La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Art. 4. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

Art. 5. Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Art. 6. L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

Art. 7. Le conseil est présidé par le président de la Société.

Art. 8. Le bureau est composé de :

1 président;
4 vice-présidents;
2 secrétaires;
2 vice-secrétaires;
1 trésorier;
1 archiviste.

Art. 9. Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

Art. 10. Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

Art. 11. Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

Art. 12. Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

Art. 13. Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

Art. 14. Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

Art. 15. La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé des recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ADMISSION.

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II.

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ.

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortants du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du *Bulletin* devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, des œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le *Bulletin*.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III.

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ.

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin et, s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du *Bulletin* et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et les recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin, il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée, signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société

des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par le secrétaire; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du *Bulletin* et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la Science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ.

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année

sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin des séances* avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du *Bulletin*. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{9}{10}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V.

RÉVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

47. Toute proposition de révision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de révision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

De la répartition des nombres entre les diviseurs de $\varphi(M)$, *lorsque* M *est une puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance;* par M. L. Sancery.

(Séance du 21 juillet 1875.)

Il n'y a, ce me semble, aucun auteur qui, traitant des racines primitives, expose la théorie de la répartition des nombres entre les divers diviseurs de $\varphi(M)$, lorsque M est un nombre de la forme p^ν ou $2p^\nu$, p étant un nombre premier impair. Pourtant cette théorie ne relève que d'un théorème unique, théorème simple et fort général, qui comprend, comme cas particulier, tout ce que l'on rencontre dans les ouvrages relativement aux racines primitives selon les modules p^ν ou $2p^\nu$, et même ce théorème-ci, dû à M. Arndt, et inséré au *Journal de Crelle*, t. 31, p. 260, année 1846 : « *Quando g ad exponentem* $p-1$ *pertinet sec. mod. p (quo facto g radix primitiva est), ad unum horum pertinere debet* $p-1$, $(p-1)p$, $(p-1)p^2$, ..., $(p-1)p^{\nu-1}$, *sec. mod.* p^ν. » Or cette répartition des nombres entre les divers diviseurs de $\varphi(M)$ n'est pas sans jeter quelque clarté sur la théorie de l'équation binôme $x^m = a + \mathfrak{M}(M)$, M ayant l'une des trois formes p, p^ν, $2p^\nu$. C'est ainsi que, entre autres choses, elle permet d'arriver aux deux théorèmes suivants, dans les énoncés desquels n représente l'exposant auquel appar-

tient a suivant le module M; Δ le plus grand commun diviseur entre m et $\frac{\varphi(M)}{n}$; Δ_1 le produit des puissances qui se trouvent dans Δ des facteurs premiers communs à Δ et n, en sorte que $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$; $1, \delta_2, \delta'_2, \delta''_2, \ldots, \Delta_2$ les diviseurs de Δ_2 et Δ'' un quelconque d'entre eux.

Théorème I. — *L'équation* $x^m = a + \mathfrak{M}(M)$ *possède*

$$\frac{\varphi(n\Delta_1)}{\varphi(n)}, \quad \frac{\varphi(n\Delta_1\delta_2)}{\varphi(n)}, \quad \frac{\varphi(n\Delta_1\delta'_2)}{\varphi(n)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(n\Delta_1\Delta_2)}{\varphi(n)}$$

solutions prises respectivement parmi les nombres qui, suivant le module M, *appartiennent aux exposants*

$$n\Delta_1, \quad n\Delta_1\delta_2, \quad n\Delta_1\delta'_2, \quad \ldots, \quad n\Delta_1\Delta_2.$$

Ces différents groupes de racines fournissent le résidu a par des puissances de degrés inférieurs à m et égaux respectivement à

$$\alpha\Delta_1, \quad \alpha\Delta_1\delta_2, \quad \alpha\Delta_1\delta'_2, \quad \ldots, \quad \alpha\Delta_1\Delta_2,$$

α ayant dans chaque cas une valeur particulière qu'on peut obtenir directement par la résolution d'une congruence du premier degré.

Théorème II. — *Quand on connaît un nombre appartenant à l'exposant* $n\Delta_1\Delta''$, *on peut déterminer* $\Delta_1\Delta''$ *solutions de l'équation proposée.*

Abordant la théorie en question, je commencerai par énoncer et démontrer ce théorème :

Théorème. — *Dans la suite des nombres entiers donnés par la formule* $a + px$, *où a est un entier inférieur au nombre premier p, appartenant suivant le module p à l'exposant θ, on trouve autant de nombres* A *que l'on veut, tels que* $A^\theta - 1$ *soit divisible par une puissance donnée de p,* p^{t+1}, *et ne le soit pas par la puissance immédiatement supérieure; ces nombres ont pour expression générale*

$$a + pz_1 + p^2 z_2 + p^3 z_3 + \ldots + p^t z_t + p^{t+1} z_{t+1} + p^{t+2} Z,$$

$z_1, z_2, \ldots, z_t, z_{t+1}$ *étant des nombres fixes moindres que p, qui.*

lorsqu'ils ne sont pas nuls, peuvent toujours être déterminés successivement par la résolution de congruences du premier degré, $\zeta_{\iota+1}$ ayant les $p-1$ valeurs différentes de $z_{\iota+1}$ prises dans la suite 0, 1, 2, ..., $p-1$, *et* Z *étant un nombre entier quelconque.*

Soit $p^{1+\mu}$ la plus haute puissance de p qui divise $a^\theta - 1$. Considérons le nombre $a + p^{1+\lambda}z$, z étant un nombre entier non divisible par p, on aura

$$(a + p^{1+\lambda}z)^\theta - 1 = a^\theta - 1 + \theta a^{\theta-1}p^{1+\lambda}z + \frac{\theta(\theta-1)}{1.2}a^{\theta-2}p^{2+2\lambda}z^2 + \ldots,$$

ou, en posant $a^\theta - 1 = p^{1+\mu}Q$,

$$(1) \qquad (a + p^{1+\lambda}z)^\theta - 1 = p^{1+\mu}Q + \theta a^{\theta-1}p^{1+\lambda}z + \mathfrak{M}p^{2+2\lambda}.$$

Si λ est moindre que μ, tous les termes du second membre étant divisibles par $p^{1+\lambda}$, et le deuxième terme n'admettant pas pour diviseur une puissance de p supérieure à $p^{1+\lambda}$, l'expression $(a + p^{1+\lambda}z)^\theta - 1$ est exactement divisible par $p^{1+\lambda}$ et non par une puissance plus élevée. Il résulte de là que les nombres compris dans les formules

$$a + pz, \quad a + p^2z, \quad a + p^3z, \quad \ldots, \quad a + p^\mu z$$

rendent la fonction $X^\theta - 1$ divisible respectivement par

$$p, \quad p^2, \quad p^3, \quad \ldots, \quad p^\mu,$$

et non par une puissance plus élevée. Comme z est un nombre premier avec p, on peut le représenter par $\zeta + pZ$, ζ *étant l'un des nombres* 1, 2, 3, ..., $p-1$, et Z un entier quelconque. Les formules ci-dessus deviennent alors

$$a + p\zeta + p^2Z, \quad a + p^2\zeta + p^3Z, \quad a + p^3\zeta + p^4Z, \quad \ldots, \quad a + p^\mu\zeta + p^{1+\mu}Z.$$

Si λ est égal à μ, tous les termes du second membre de l'identité (1) sont divisibles par $p^{1+\mu}$, et l'on a

$$(a + p^{1+\mu}z)^\theta - 1 = p^{1+\mu}(Q + \theta a^{\theta-1}z + \mathfrak{M}p^{1+\mu}).$$

Si le nombre $Q + \theta a^{\theta-1}z$ n'est pas divisible par p, $p^{1+\mu}$ est la plus haute puissance de p qui divise $(a + p^{1+\mu}z)^\theta - 1$; mais, si ce nombre est divisible par p, il n'en est plus ainsi. Soit donc z_1 la

valeur de z moindre que p qui satisfait à la congruence

$$(2) \qquad Q + \theta a^{\theta-1} z = \mathfrak{M} p,$$

et ζ_1 un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, différent de z_1, les nombres compris dans la formule

$$a + p^{1+\mu}\zeta_1 + p^{2+\mu}Z$$

rendront $X^\theta - 1$ divisible par $p^{1+\mu}$ et non par une puissance plus élevée. Au contraire, la formule

$$a + p^{1+\mu}z_1 + p^{2+\mu}Z$$

donnera des nombres rendant $X^\theta - 1$ divisible par une puissance de p supérieure à $p^{1+\mu}$.

Si λ est supérieur à μ, on pourra écrire l'identité (1)

$$(a + p^{1+\lambda}z)^\theta - 1 = p^{1+\mu}(Q + \theta a^{\theta-1}p^{\lambda-\mu}z + \mathfrak{M} p^{1+\mu}).$$

On voit alors que le premier membre n'admettra pas pour diviseur une puissance de p supérieure à $p^{1+\mu}$; d'ailleurs les nombres $a + p^{1+\lambda}z$ sont actuellement compris parmi ceux qui ont pour expression $a + p^{1+\mu}\zeta_1 + p^{2+\mu}Z$ et correspondent au cas où $\zeta_1 = 0$. L'hypothèse $\lambda > \mu$ ne donne donc rien de particulier.

Considérons actuellement les nombres compris dans la formule

$$a + p^{1+\mu}z_1 + p^{2+\mu+\lambda}z,$$

z_1 étant la valeur fournie par la congruence (2). On aura, en posant $(a + p^{1+\mu}z_1)^\theta - 1 = p^{2+\mu+\mu'}Q'$,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a + p^{1+\mu}z_1 + p^{2+\mu+\lambda}z)^\theta - 1 \\ &\quad = p^{2+\mu+\mu'}Q' + \theta(a + p^{1+\mu}z_1)^{\theta-1}p^{2+\mu+\lambda}z + \mathfrak{M} p^{4+\mu+\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Tant que λ sera inférieur à μ', la plus haute puissance de p qui divise le premier membre de cette identité sera égale à $p^{2+\mu+\lambda}$, et par conséquent les nombres compris dans les formules

$$a + p^{1+\mu}z_1 + p^{2+\mu}z, \quad a + p^{1+\mu}z_1 + p^{3+\mu}z, \quad \ldots, \quad a + p^{1+\mu}z_1 + p^{1+\mu+\mu'}z,$$

ou bien dans celles-ci, obtenues en remplaçant, comme plus haut,

z par $\zeta + pZ$,

$$a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu} \zeta + p^{3+\mu} Z,$$
$$a + p^{1+\mu} z_1 + p^{1+\mu} \zeta + p^{4+\mu} Z,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a + p^{1+\mu} z_1 + p^{1+\mu+\mu'} \zeta + p^{2+\mu+\mu'} Z,$$

rendront la fonction $X^\theta - 1$ respectivement divisible par

$$p^{2+\mu}, \quad p^{3+\mu}, \quad \dots, \quad p^{1+\mu+\mu'}.$$

Si λ est égal à μ', l'identité (3) peut s'écrire

$$(a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu+\mu'} z)^\theta - 1$$
$$= p^{2+\mu+\mu'} [Q' + \theta (a + p^{1+\mu} z_1)^{\theta-1} z + \mathfrak{M} p^{2+\mu+\mu'}].$$

Alors on voit que la plus haute puissance de p qui divise le premier membre est égale à $p^{2+\mu+\mu'}$ lorsque $Q' + \theta(a + p^{1+\mu} z_1)^{\theta-1} z$ n'est pas divisible par p, mais que, quand p divise cette quantité, le premier membre admet pour diviseur une puissance de p supérieure à $p^{2+\mu+\mu'}$. Soit donc z_2 la valeur de z moindre que p qui satisfait à la congruence

$$(4) \qquad Q' + \theta (a + p^{1+\mu} z_1)^{\theta-1} z = \mathfrak{M} p,$$

et ζ_2 un quelconque des nombres $0, 1, 2, \dots, p-1$ différent de z_2, les nombres compris dans la formule

$$a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu+\mu'} \zeta_2 + p^{3+\mu+\mu'} Z$$

rendront $X^\theta - 1$ divisible par $p^{2+\mu+\mu'}$ et non par une puissance plus élevée. Au contraire, la formule

$$a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu+\mu'} z_2 + p^{3+\mu+\mu'} Z$$

donnera des nombres rendant $X^\theta - 1$ divisible par une puissance de p supérieure à $p^{2+\mu+\mu'}$.

Si λ est supérieur à μ', l'identité (3) devient

$$(a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu+\lambda} z)^\theta - 1$$
$$= p^{2+\mu+\mu'} [Q' + \theta (a + p^{1+\mu} z_1)^{\theta-1} z^{\lambda-\mu'} + \mathfrak{M} p^{2+\mu+\mu'}];$$

la plus haute puissance de p qui divise le premier membre est donc égale à $p^{2+\mu+\mu'}$; d'ailleurs les nombres $a + p^{1+\mu} z_1 + p^{3+\mu+\lambda} z$

sont actuellement compris parmi ceux qui ont pour expression $a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu+\mu'} \zeta_2 + p^{3+\mu+\mu'} Z$ et correspondent au cas où $\zeta_2 = 0$; l'hypothèse $\lambda > \mu'$ n'apprend donc rien de nouveau.

On pourrait considérer de même les nombres compris dans la formule

$$a + p^{1+\mu} z_1 + p^{2+\mu+\mu'} z_2 + p^{3+\mu+\mu'+\lambda} z,$$

et refaire les raisonnements précédents. Ces raisonnements peuvent donc être reproduits indéfiniment; par conséquent on peut trouver parmi les valeurs de $a + px$ autant de nombres que l'on voudra, rendant la fonction $X^0 - 1$ divisible par une puissance quelconque de p, $p^{\iota+1}$, et non par la suivante, et obtenir l'expression générale de ces nombres par la résolution de congruences du premier degré.

Si l'on suppose $\mu = \mu' = \ldots = 0$, on trouve que les nombres rendant la fonction $X^0 - 1$ uniquement divisible par p sont donnés par la formule

$$a + p\zeta_1 + p^2 Z,$$

que ceux qui rendent $X^0 - 1$ divisible par p^2 et non par p^3 sont compris dans la formule

$$a + pz_1 + p^2\zeta_2 + p^3 Z,$$

et qu'en général les nombres rendant $X^0 - 1$ divisible par $p^{1+\iota}$ et non par $p^{2+\iota}$ ont pour expression

$$a + pz_1 + p^2 z_2 + p^3 z_3 + \ldots + p^\iota z_\iota + p^{\iota+1}\zeta_{\iota+1} + p^{\iota+2} Z,$$

$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\iota, z_{\iota+1}$ étant des nombres fixes moindres que p, que l'on peut toujours déterminer successivement par la résolution de congruences du premier degré à une inconnue, $\zeta_{\iota+1}$ ayant les $p - 1$ valeurs différentes de $z_{\iota+1}$ prises dans la suite $0, 1, 2, \ldots, p - 1$, et Z étant un nombre entier quelconque. La formule de tous les nombres rendant $X^0 - 1$ divisible par $p^{\iota+1}$ est

$$a + pz_1 + p^2 z_2 + \ldots + p^\iota z_\iota + p^{\iota+1} Z.$$

Il est à remarquer que les deux expressions précédentes renferment comme cas particuliers toutes celles que nous avons antérieurement établies, pourvu, ce qui n'avait pas lieu précédemment,

qu'on admette que $z_1, z_2, \ldots, z_{i+1}$ puissent être des quantités nulles.

Applications. — I. Le nombre 1 appartient à l'exposant 1, et la fonction $X^\theta - 1$, devenant nulle pour $X = 1$, $\theta = 1$, est divisible par une puissance quelconque de p; le nombre μ peut donc être regardé comme infini, et par suite

$$1 + p\zeta + p^2 Z, \quad 1 + p^2\zeta + p^3 Z, \quad 1 + p^3\zeta + p^4 Z, \quad \ldots,$$

représentent les nombres qui, appartenant à l'exposant 1, rendent $X - 1$ divisible respectivement par p, p^2, p^3, ..., et non par les puissances immédiatement supérieures.

II. Le nombre $p - 1$ appartient à l'exposant 2 suivant le module p, car $(p-1)^2 - 1 = p(p-2)$; de plus il est le seul nombre moindre que p qui appartienne à cet exposant. On peut donc obtenir immédiatement les formules des nombres qui, appartenant à l'exposant 2, rendent la fonction $X^2 - 1$ uniquement divisible par $p, p^2, p^3, \ldots$. Ainsi les nombres $-1 + p\zeta + p^2 Z$ rendent $X^2 - 1$ divisible par p et non par p^2, et les nombres $-1 + p^2\zeta + p^3 Z$ rendent $X^2 - 1$ divisible par p^2 et non par p^3, ...

Je vais montrer maintenant que, lorsqu'on prend pour module une puissance p^ν d'un nombre premier p, la suite des nombres premiers avec le module peut être distribuée en autant de classes qu'il y a de diviseurs pour $\varphi(p^\nu)$, les nombres d'une classe appartenant à un même exposant diviseur de $\varphi(p^\nu)$.

Théorème fondamental. — *Un nombre* A *appartenant à l'exposant* θ, *suivant le module premier impair* p, *appartient, suivant le module* p^ν, *à l'exposant* θ, *si la plus haute puissance de* p *qui divise* $A^\theta - 1$ *est égale ou supérieure à* p^ν, *et, lorsque cette plus haute puissance est inférieure à* p^ν, *en la désignant par* p^μ, *le nombre* A *appartient à l'exposant* $\theta p^{\nu-\mu}$.

I. Soit a un des nombres moindres que p appartenant à l'exposant θ, suivant le module p, tous les nombres congrus à a donnés par la formule $A = a + px$ appartiennent au même exposant et satisfont à la relation $A^\theta = (a + px)^\theta = 1 + \mathfrak{M}p$. De plus, les puissances de A ayant pour exposant un multiple de θ sont les seules qui, divisées par p, donnent le résidu 1. Si maintenant, suivant le module p^ν, le nombre A appartient à l'exposant t, on aura

$A^t = 1 + \mathfrak{M} p^\nu$, et, par conséquent, aussi $A^t = 1 + \mathfrak{M} p$; d'où il suit que t est égal à θ ou à un de ses multiples.

II. Désignons par p^μ la plus haute puissance de p, qui divise $A^\theta - 1$, en sorte que $A^\theta - 1 = Q p^\mu$, Q n'étant pas divisible par p.

1° Soit $\mu \geq \nu$. Il est clair que A appartient à l'exposant θ suivant le module p^ν, puisque A^θ, divisé par p^ν, donne le résidu 1, et que toute puissance de A, d'un degré inférieur à θ, diminuée d'une unité, n'étant pas divisible par p, ne peut l'être par p^ν. Ainsi la première partie du théorème se trouve démontrée.

2° Soit $\mu < \nu$. Si l'on élève les deux membres de l'égalité $A^\theta = 1 + Q p^\mu$ à la puissance λ, il vient

$$A^{\theta\lambda} = (1 + Q p^\mu)^\lambda = 1 + \lambda Q p^\mu + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} Q^2 p^{2\mu} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} Q^3 p^{3\mu} + \ldots,$$

d'où

$$A^{\theta\lambda} - 1 = p^\mu(\lambda Q + \mathfrak{M} p^\mu).$$

Par là on voit que, si λ ne renferme en facteur aucune puissance de p, la quantité $A^{\theta\lambda} - 1$ ne peut être divisible par une puissance de p supérieure à la $\mu^{\text{ième}}$. Donc $A^{\theta\lambda} - 1$ ne sera divisible par p^ν que si $\lambda = \lambda_1 p^\rho$, λ_1 étant premier avec p. Si l'on remplace λ par cette valeur, le développement précédent devient

$$A^{\theta\lambda_1 p^\rho} = 1 + \lambda_1 p^\rho Q p^\mu + \frac{\lambda_1 p^\rho(\lambda_1 p^\rho - 1)}{1.2} Q^2 p^{2\mu}$$
$$+ \frac{\lambda_1 p^\rho(\lambda_1 p^\rho - 1)(\lambda_1 p^\rho - 2)}{1.2.3} Q^3 p^{3\mu} + \ldots.$$

Or on peut reconnaître que tous les termes, à partir du troisième inclusivement, sont divisibles par $p^{\rho+2\mu}$. Prenons, en effet, l'un de ces termes

$$\frac{\lambda_1 p^\rho(\lambda_1 p^\rho - 1)(\lambda_1 p^\rho - 2)\ldots(\lambda_1 p^\rho - h + 1)}{1.2.3\ldots h} Q^h p^{h\mu},$$

et écrivons-le comme il suit :

$$p^\rho \lambda_1 \frac{(\lambda_1 p^\rho - 1)(\lambda_1 p^\rho - 2)\ldots(\lambda_1 p^\rho - h + 1)}{1.2\ldots(h-1)} \frac{1}{h} Q^h p^{h\mu}.$$

L'expression

$$\frac{(\lambda_1 p^\rho - 1)(\lambda_1 p^\rho - 2)\ldots(\lambda_1 p^\rho - h + 1)}{1.2\ldots(h-1)} = F,$$

dont les deux termes renferment le même nombre de facteurs formés de nombres entiers consécutifs, se réduit, comme on le sait, à un nombre entier. Il suit de là, puisque les coefficients binomiaux sont aussi entiers, que, lorsque h est premier avec p, $\frac{\lambda_1 F}{h}$ doit être un nombre entier. Le terme considéré est donc divisible par $p^{\rho+h\mu}$, et, par conséquent, par $p^{\rho+2\mu}$, puisque $h \geq 2$.

Lorsque h n'est pas premier avec p, mais est égal à $h_1 p^s$, on ne voit pas aussi aisément que le terme considéré soit divisible par $p^{\rho+2\mu}$; mais, si on l'écrit de la manière suivante :

$$p^\rho \lambda_1 \frac{(\lambda_1 p^\rho - 1)(\lambda_1 p^\rho - 2)\ldots(\lambda_1 p^\rho - h + 1)}{1.2\ldots(h-1)} \frac{1}{h_1} Q^h \frac{p^{h_1 p^s \mu}}{p^s},$$

on reconnaît encore, h_1 étant premier avec p, que

$$\lambda_1 \frac{(\lambda_1 p^\rho - 1)(\lambda_1 p^\rho - 2)\ldots(\lambda_1 p^\rho - h + 1)}{1.2\ldots(h-1)} \frac{1}{h_1}$$

est un nombre entier. Par conséquent, pour que ce terme soit divisible par $p^{\rho+2\mu}$, il suffit que

$$\frac{p^{h_1 p^s \mu - 2\mu}}{p^s}$$

soit entier. Or il en sera toujours ainsi, si la condition

$$\mu(h_1 p^s - 2) \geq s$$

est d'elle-même vérifiée. On voit immédiatement, p étant un nombre premier impair et s un entier quelconque, que la condition

$$p^s - 2 \geq s,$$

qui revient à $\log p \geq \frac{\log(s+2)}{s+2} \frac{s+2}{s}$, est satisfaite. En effet, les deux rapports

$$\frac{\log(s+2)}{s+2}, \quad \frac{s+2}{s}$$

diminuent quand s augmente, et sont moindres que $\frac{\log(1+2)}{1+2}$, $\frac{1+2}{1}$; donc $\frac{\log(s+2)}{s}$ est égal ou inférieur à $\log 3$; d'ailleurs $\log p$

est égal ou supérieur à log3 : donc la condition

$$p^{\nu} - 2 \geqq s$$

est toujours vérifiée. On en déduit successivement

$$h_1 p^{\nu} - 2 \geqq s, \quad \mu(h_1 p^{\nu} - 2) \geqq s,$$

et ce dernier résultat constitue justement l'inégalité qu'il importait d'établir; par conséquent, tous les termes du développement ci-dessus sont, à partir du troisième inclusivement, divisibles par $p^{\rho+2\mu}$. Il en résulte que l'on a

$$A^{\theta\lambda_1 p^{\rho}} - 1 = p^{\rho+\mu}(\lambda_1 Q + \mathfrak{M} p^{\mu});$$

cette égalité montre que $A^{\theta\lambda_1 p^{\rho}} - 1$ n'est divisible par p^{ν} que sous la condition

$$\rho + \mu \geqq \nu.$$

Par conséquent, en prenant $\lambda_1 = 1$, $\rho + \mu = \nu$ ou $\rho = \nu - \mu$, on aura dans $\theta p^{\nu-\mu}$ l'exposant de la plus petite puissance de A qui, divisée par p^{ν}, donne le résidu 1, et A appartient à l'exposant $\theta p^{\nu-\mu}$. La seconde partie du théorème est donc démontrée.

Corollaire I. — *Les nombres fournis par la formule $a + px$, a étant moindre que p et appartenant à l'exposant θ suivant le module p, appartiennent, suivant le module p^{ν}, aux divers exposants*

$$\theta, \quad \theta p, \quad \theta p^2, \quad \ldots, \quad \theta p^{\nu-1}.$$

Un nombre appartient

à l'exposant	θ	*lorsque*	$\mu \geqq \nu$,
»	θp	»	$\mu = \nu - 1$,
»	θp^2	»	$\mu = \nu - 2$,
»	.. ,		.....,
»	$\theta p^{\nu-1}$	»	$\mu = \nu - (\nu - 1) = 1$.

Réciproquement,

Si un nombre appartient, suivant le module p^{ν}, à un exposant θp^{i}, i n'étant pas nul, ce nombre rend la fonction $X^{\theta} - 1$ divisible par $p^{\nu-i}$, et non par une puissance plus élevée.

Corollaire II. — *Puisque un diviseur quelconque de $\varphi(p^\nu)$ est de la forme θp^σ, θ étant l'un des diviseurs de $p-1$, l'unité et $p-1$ compris, et σ pouvant prendre toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $\nu-1$ inclusivement, il existe des nombres appartenant à un diviseur quelconque de $\varphi(p^\nu)$ pris pour exposant.*

Corollaire III. — *Un nombre* A *appartient à l'exposant $p^{\nu-1}(p-1)$, c'est-à-dire est racine primitive pour le module p^ν, quand il est racine primitive pour le module p, et qu'en outre $A^{p-1}-1$ n'est divisible que par la première puissance de p.*

Corollaire IV. — *On peut, en se servant de la formule donnée par le premier théorème, répartir entre les diviseurs $\theta, \theta p, \theta p^2, \ldots, \theta p^{\nu-1}$ les nombres appartenant, suivant le module p, à l'exposant θ.*

En effet, cette formule, donnant les nombres qui rendent $X^\theta - 1$ divisible par p^{i+1} et non par p^{i+2}, fournit par cela même les nombres appartenant à l'exposant $\theta p^{\nu-i-1}$; mais, pour opérer la répartition, il sera plus simple dans la pratique de procéder par exclusion. Il faudra prendre les nombres $a, b, c, \ldots$, moindres que p, appartenant à l'exposant θ pour le module p, former les suites des nombres moindres que p^ν qui leur sont congrus suivant le même module, puis chercher pour chaque suite les nombres qui rendent la fonction $X^\theta - 1$ divisible par p^2 et les supprimer : tous les nombres restants appartiendront à l'exposant $\theta p^{\nu-1}$; chercher dans les suites des nombres rendant $X^\theta - 1$ divisible par p^2 ceux pour lesquels cette fonction est divisible par p^3, et les supprimer : tous les nombres restants appartiendront à l'exposant $\theta p^{\nu-2}$, et ainsi de suite.

Remarque I. — On peut reconnaître que ce corollaire renferme comme cas particulier la proposition donnée par M. Lebesgue dans le *Journal de Liouville*, 1re série, t. XIX, p. 334, année 1854.

Remarque II. — Les applications ci-dessus I et II donnent les nombres appartenant aux exposants

$$\begin{array}{lllll} 1, & p, & p^2, & \ldots, & p^{\nu-1}; \\ 2, & 2p, & 2p^2, & \ldots, & 2p^{\nu-1}. \end{array}$$

Corollaire V. — *Il existe, suivant le module p^ν, $\varphi(\theta p^{\nu-i})$ nombres appartenant à l'exposant $\theta p^{\nu-i}$.*

En effet, les nombres appartenant à l'exposant $\theta p^{\nu-i}$ sont fournis par la formule

$$a + pz_1 + p^2 z_2 + \ldots + p^{i-1} z_{i-1} + p^i \zeta_i + p^{i+1} Z;$$

or, pour une valeur donnée de a et une de ζ_i, cette expression fournit $p^{\nu-i-1}$ valeurs moindres que p^ν, puisque Z peut prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p^{i+1}-1$; par conséquent, en tenant compte des $\varphi(\theta)$ valeurs de a et des $p-1$ valeurs de ζ_i, l'expression précédente donne $\varphi(\theta)(p-1)p^{\nu-i-1}$ valeurs moindres que p^ν appartenant à l'exposant $\theta p^{\nu-i}$; mais $\varphi(\theta)(p-1)p^{\nu-i-1} = \varphi(\theta p^{\nu-i})$: la proposition est donc établie.

En particulier, il existe $\varphi[(p-1)p^{\nu-1}]$ ou $\varphi.\varphi(p^\nu)$ nombres appartenant à l'exposant $(p-1)p^{\nu-1}$, c'est-à-dire $\varphi.\varphi(p^\nu)$ racines primitives pour le module p^ν.

On passe des résultats obtenus pour le module p^ν à ceux qui sont propres au module $2p^\nu$ à l'aide du théorème suivant :

Théorème. — *Tout nombre impair qui appartient, selon le module p^ν, à l'exposant θ_1, appartient au même exposant suivant le module $2p^\nu$.*

Nous observerons d'abord que les nombres premiers avec le module $2p^\nu$ se trouvent dans la suite des nombres impairs, puisque l'égalité $\varphi(2p^\nu) = \varphi(p^\nu)$ montre que les diviseurs de $\varphi(p^\nu)$ sont ceux de $\varphi(2p^\nu)$. Cela posé, soit A un nombre impair appartenant à l'exposant θ_1, suivant le module p^ν, on aura $A^{\theta_1} - 1 = \mathfrak{M} p^\nu$, et, puisque $A^{\theta_1} - 1$ est pair, on a aussi $A^{\theta_1} - 1 = \mathfrak{M}\, 2p^\nu$. Ainsi A ne peut, suivant le module $2p^\nu$, appartenir à un exposant supérieur à θ_1. Si maintenant, suivant le module $2p^\nu$, A appartenait à un exposant θ'_1, moindre que θ_1, on aurait $A^{\theta'_1} - 1 = \mathfrak{M}\, 2p^\nu$, et par conséquent $A^{\theta'_1} - 1 = \mathfrak{M} p^\nu$, ce qui n'est pas. Le nombre A appartient donc au même exposant selon les deux modules.

Corollaire I. — *Il existe des nombres appartenant, suivant le module $2p^\nu$, à tous les diviseurs de $\varphi(2p^\nu)$.*

Corollaire II. — *La totalité des nombres appartenant, suivant le module $2p^\nu$, à l'exposant $\theta p^{\nu-i}$, est égale à $\varphi(2\theta p^{\nu-i})$.*

En effet, si l'on veut avoir la totalité des nombres impairs moindres que $2p^\nu$, appartenant à l'exposant $\theta p^{\nu-i}$, il suffit d'observer que, si $a, b, c, \ldots$ sont des nombres moindres que p^ν appartenant à

l'exposant $\theta p^{\nu-i}$, suivant le module p^ν, les nombres appartenant au même exposant et moindres que $2p^\nu$ sont

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad a+p^\nu, \quad b+p^\nu, \quad c+p^\nu, \quad \ldots.$$

Or, p^ν étant impair, les deux nombres a, $a+p^\nu$ sont de parités différentes; par conséquent il n'y en a qu'un des deux qui appartienne, selon le module $2p^\nu$, à l'exposant $\varphi(\theta p^{\nu-i})$; la suite précédente offre donc autant de nombres appartenant à l'exposant $\theta p^{\nu-i}$, pour le module $2p^\nu$, qu'il y en a dans la première suite $a, b, c, \ldots$, c'est-à-dire $\varphi(\theta p^{\nu-i})$, ou bien $\varphi(2\theta p^{\nu-i})$. En particulier, il existe $\varphi.\ \varphi(2p^\nu)$ racines primitives pour le module $2p^\nu$.

Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes; par M. Halphen.

(Séance du 1er décembre 1875.)

1. C'est dans le Calcul intégral que la notion du *genre* des courbes algébriques a pris naissance. Par cette voie, il est immédiatement visible que le genre se conserve dans les transformations *uniformes*. Pour introduire dans la Géométrie cette notion nouvelle, il fallait connaître l'expression analytique du genre. Cette question était résolue dans des cas particuliers, notamment dans celui où la courbe considérée ne contient que des singularités *ordinaires*. J'en ai donné la solution générale suivante :

Soient p le genre, m le degré, c la classe d'une courbe algébrique, N *la somme des ordres de multiplicité de tous ses points singuliers, et* T *le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers. Ces éléments satisfont à la relation*

$$(1) \qquad 2(p-1) = c - 2m + N - T\,[1].$$

Le nombre p, défini par cette relation, se conserve dans les trans-

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1833, et t. LXXX, p. 638.

formations uniformes. C'est ce que nous apprend le Calcul intégral. Il est naturel de désirer une démonstration directe de cette proposition. On en possède déjà plusieurs pour le cas particulier déjà cité, où la courbe considérée ne contient que des singularités ordinaires [1]. On peut passer de là au cas général, comme je l'ai déjà montré, en employant diverses transformations uniformes particulières, qui changent une courbe quelconque en une autre n'offrant que des singularités ordinaires; mais ces détours peuvent être évités; l'objet de ce petit Mémoire est de présenter une démonstration directe de la proposition suivante : *L'expression qui figure au second membre de l'équation* (1) *a la même valeur pour deux courbes quelconques se correspondant* point par point [2].

2. Il est nécessaire de donner quelques explications préliminaires au sujet des *systèmes circulaires*. Soient O l'origine des coordonnées (x, y), un point singulier d'une courbe plane algébrique S, et k l'ordre de multiplicité de ce point. Pour une valeur infiniment petite de x, k valeurs de y sont infiniment petites. On sait que ces k valeurs se répartissent en *systèmes circulaires* [3], c'est-à-dire en des groupes tels que les n valeurs, comprises dans l'un quelconque d'entre eux, forment une seule et même fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$. Or on prouve aisément que cette répartition ne dépend pas des axes de coordonnées, pourvu toutefois que l'axe des y ne soit pas une tangente de S au point O. On a donc ainsi une répartition des branches de S, au point O, en des groupes bien définis, que j'appelle *systèmes circulaires* de branches. Le nombre n est l'*ordre de multiplicité*, le point O est l'*origine* d'un tel système circulaire.

Soit $f(t)$ une fonction synectique pour les petites valeurs de t, et ne s'évanouissant pas avec cette variable; soient n et r des entiers positifs. Les équations

$$(2) \qquad x = t^n, \quad y = t^r f(t)$$

---

(1) Clebsch et Gordan, *Fonct. ab.*; Zeuthen, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

(2) Au congrès de l'Association française, j'ai donné cette année, du même théorème, une autre démonstration, fondée sur des considérations géométriques.

(3) Puiseux, *Journal de Mathématiques*; 1850.

définissent, de la manière la plus générale, y comme fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$, s'évanouissant avec x. Pour chaque valeur de x, cette fonction a un nombre de valeurs égal à n ou à un diviseur de n. Donc, sous les conditions que y ait précisément n valeurs et que r ne soit pas inférieur à n (pour que l'axe des y ne soit pas la tangente), les équations (2) définissent, de la manière la plus générale, un système circulaire de branches dont l'ordre de multiplicité est n, et dont l'origine est le point O. Si r est supérieur à n, la tangente est l'axe des x. Pour que les axes soient quelconques, on doit supposer $r = n$. Si la fonction y, définie par (2), a moins de n valeurs, les équations (2) définissent, en supposant toujours $r = n$, un système circulaire dont l'ordre de multiplicité est égal au nombre de ces valeurs.

Au lieu des équations (2), considérons celles-ci :

$$(3) \qquad x = t^n \varphi(t), \quad y = t^n \psi(t),$$

n étant toujours un entier positif, et φ et ψ des fonctions de même définition que f. On démontre aisément que l'élimination de t entre les équations (3) conduit à

$$y = x\theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

où θ est encore une fonction de même définition que f. C'est précisément la forme du résultat auquel conduit l'élimination de t entre les équations (2), où l'on suppose $r = n$. Ainsi, de même que les équations (2), les équations (3) définissent, sans plus de généralité, un système circulaire de branches dont l'origine est en O, et dont l'ordre de multiplicité est n ou un diviseur de n.

3. Soit S une courbe contenant le système circulaire de branches représenté par les équations (2). Je suppose que l'ordre de multiplicité de ce système circulaire soit effectivement n. Je désigne abréviativement le système circulaire par (S). Soit maintenant Σ une seconde courbe, qui soit une transformée *rationnelle* de S. Si x, y sont les coordonnées d'un point a de S, les coordonnées ξ, η du point correspondant α de Σ sont des fonctions rationnelles de x, y. Si donc a est infiniment voisin de O, et sur une branche de (S), les coordonnées de α sont des fonctions synectiques de t, sauf au cas

où elles seraient infinies. J'écarte ce cas en employant, au besoin, une transformation homographique. Les coordonnées de α tendent donc, pour t infiniment petit, vers des limites finies et déterminées d'une seule manière. Donc, en premier lieu, au point O, considéré sur S comme limite des points du système circulaire (S), correspond un seul point Ω sur Σ. Supposant alors Ω origine des coordonnées ξ, η, j'ai, pour les valeurs des coordonnées de α, des expressions telles que

$$(4) \qquad \xi = t^{\sigma}\Phi(t), \quad \eta = t^{\sigma}\Psi(t),$$

où Φ et Ψ sont des fonctions de même définition que f, et où σ est un entier positif. Comme on l'a vu au n° 2, les équations (4) définissent un système circulaire de branches (Σ), dont l'ordre de multiplicité est σ ou un diviseur de σ. Si ν est l'ordre de multiplicité de (Σ), σ est ainsi un multiple entier de ν. Donc :

Théorème I. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes planes algébriques dont la seconde soit une transformée rationnelle de la première :*

1° *A un système circulaire de branches* (S) *de la première correspond un seul système circulaire de branches* (Σ) *de la seconde.*

2° *Soient n et ν les ordres respectifs de multiplicité des systèmes circulaires correspondants* (S), (Σ) ; *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de* (S), *correspond sur* (Σ) *un point dont la distance à l'origine de* (Σ) *est un multiple entier de ν.*

Il est visible que le nombre entier $\frac{\sigma}{\nu}$ est égal au nombre des points a de (S) qui correspondent à un point α de (Σ). Si donc on suppose maintenant que la courbe S soit, à son tour, une transformée rationnelle de Σ, c'est-à-dire que les courbes S et Σ se correspondent *point par point*, σ est égal à ν. On a donc cette nouvelle proposition :

Théorème II. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes algébriques se correspondant* point par point, *et n et ν les ordres de multiplicité respectifs de deux systèmes circulaires correspondants* (S), (Σ) : *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de* S *correspond un point de* (Σ) *à distance infiniment petite d'ordre ν de l'origine de* (Σ).

4. Le théorème II est le point essentiel de cette théorie. Je n'aurai recours dans ce qui va suivre à aucun autre résultat nouveau. Toutefois, avant d'arriver à l'objet même de ce travail, je crois utile de rappeler brièvement un procédé pour déterminer l'ordre de multiplicité d'un système de solutions de deux équations à deux inconnues. Ce procédé a pour point de départ la proposition suivante :

Soit $F(x, y) = 0$ *l'équation sous forme entière d'une courbe algébrique plane. Le nombre des intersections de cette courbe et d'une autre courbe* S, *du même plan, confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des quantités infiniment petites* $F(x, y)$, *quand on suppose le point* (x, y) *placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de* O, *sur les diverses branches de* S.

Je suppose que, au point O, la courbe S comprenne divers systèmes circulaires (S), (S′), ... Soit h la somme des ordres des quantités infiniment petites $F(x, y)$, quand on suppose le point (x, y) placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de O, sur les diverses branches de (S). Soit de même h' le nombre analogue pour (S′), ... Le nombre des intersections des deux courbes en O est $h + h' + \ldots$.

Soit maintenant n l'ordre de multiplicité de (S), que je suppose défini par les équations (2). Pour calculer l'élément de h, relatif à une quelconque des branches de (S), on substituera dans $F(x, y)$ les valeurs de x et y, données par (2), en supposant t infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{n}$. Par suite h se compose de n éléments égaux. Donc h est égal à l'ordre d'infiniment petit auquel appartient $F(x, y)$ quand on suppose t infiniment petit du premier ordre. En d'autres termes, h est égal à l'exposant de t au premier terme de $F(x, y)$, ordonné suivant les puissances ascendantes de t, après substitution à x et y des valeurs (2). C'est ce qu'on peut exprimer brièvement en disant que :

Le nombre des intersections d'un système circulaire (S) *avec une courbe* $F(x, y) = 0$, *qui passe à l'origine* O *de ce système circulaire, est égal à l'ordre d'infiniment petit auquel appartient le polynôme entier* $F(x, y)$, *quand on y suppose le point* (x, y)

placé sur une branche de (S) *à une distance de l'origine de* (S) *dont l'ordre infinitésimal est égal à l'ordre de multiplicité de* (S).

5. J'arrive, ces préliminaires établis, à mon objet principal. J'emploie des coordonnées homogènes. Soit $S(x, y, z) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique. Soient, en outre, u, v, w trois fonctions entières et homogènes de x, y, z. Par les équations

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}, \tag{5}$$

je définis, de la manière la plus générale, une transformée rationnelle Σ de la courbe S. A chaque point $a(x, y, z)$ de S correspond un seul point α (ξ, η, ζ) de Σ. La réciproque, pour des valeurs particulières de u, v, w, peut n'être pas exacte : à chaque point α il peut se faire qu'il corresponde plusieurs points a. J'en désignerai par k le nombre. Si k est égal à l'unité, les deux courbes S et Σ se correspondent *point par point*, ou la transformation (5) est, pour les deux courbes, une transformation *uniforme*. Sans troubler la généralité, on peut supposer les trois fonctions u, v, w du même degré; car cette supposition sera toujours réalisée au moyen d'un changement de coordonnées. Je désignerai par q le degré de u, v, w, et par m celui de S.

Je cherche d'abord le degré μ de Σ. Les points a, tels que leurs correspondants α soient sur une droite arbitrairement donnée, sont les intersections de S avec la courbe

$$F(x, y, z) = au + bv + cw = 0, \tag{6}$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires. Le nombre des solutions est mq; mais il faut en défalquer, comme étrangères, celles qui ne dépendent pas des constantes arbitraires : ces solutions répondent aux points dont les coordonnées font évanouir à la fois u, v, w. Soit O un de ces points; soit n l'ordre de multiplicité d'un des systèmes circulaires (S) formés par les branches de S en O; plaçons le point a sur une branche de (S) à distance infiniment petite d'ordre n de O. Soit h l'ordre d'infiniment petit auquel appartient alors $F(x, y, z)$. Soit Σh la somme des nombres analogues pour tous les systèmes circulaires de branches de S aux divers points dont les coordonnées font évanouir à la fois u, v, w. D'après le

n° 4, le nombre total des intersections des courbes S et F, réunies en ces points, est Σh. Le nombre des solutions non étrangères est donc $mq - \Sigma h$. Mais, à chacun des points α, situés sur la droite considérée, et dont le nombre est μ, correspondent k points a dont les coordonnées font évanouir F; donc

$$k\mu = mq - \Sigma h. \tag{7}$$

6. Je vais maintenant calculer la classe de la courbe Σ. En employant des majuscules pour les coordonnées courantes, j'ai, pour la tangente de Σ en un point α, l'équation

$$A = \begin{vmatrix} X & u & du \\ Y & v & dv \\ Z & w & dw \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Sous forme explicitement entière, cette équation se change, par un calcul facile, en la suivante :

$$B = \begin{vmatrix} X & u_1 & u_2 & u_3 \\ Y & v_1 & v_2 & v_3 \\ Z & w_1 & w_2 & w_3 \\ O & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

où, suivant l'usage, j'ai posé

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3,$$

et de même pour les autres fonctions. Si l'on considère X, Y, Z comme données arbitrairement, les intersections de la courbe B et de S sont les points a, tels que les tangentes de Σ aux points correspondants α passent en un point donné. Le nombre de ces points, défalcation faite des solutions étrangères, c'est-à-dire indépendantes des arbitraires X, Y, Z, est égal à k fois la classe de Σ. Ce sont les solutions étrangères qu'il s'agit actuellement de compter.

Soient s la variable indépendante, que je laisse pour le moment indéterminée, et

$$\mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz = ds$$

sa différentielle totale. Soit aussi l'équation qui lie les coordonnées

homogènes

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 1, \tag{10}$$

où $\lambda_1, \ldots$ sont des constantes. Cette dernière a lieu également entre X, Y, Z et aussi entre ξ, η, ζ. Par suite, les relations (5) se complètent en

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w} = \frac{1}{\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w},$$

et il en résulte

$$A = (\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w)^2 \begin{vmatrix} X & \xi & d\xi \\ Y & \eta & d\eta \\ Z & \zeta & d\zeta \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Je pose maintenant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Cela étant, on vérifiera aisément que, pour les valeurs de x, y, z satisfaisant à $S = 0$, on a

$$B = q\Delta \frac{A}{ds}. \tag{13}$$

Les points dont les coordonnées font évanouir Δ peuvent être classés en deux groupes : d'abord ceux dont les coordonnées dépendent de μ_1, μ_2, μ_3, c'est-à-dire du choix de la variable indépendante. Il est manifeste que les coordonnées de ces points ne font pas évanouir B, dont l'expression ne dépend pas de ce choix. On voit donc que, pour ces points, ds est nul, et que le second membre de (13) conserve une valeur finie. Le second groupe est composé de points dont les coordonnées font évanouir à la fois S_1, S_2, S_3. Ce sont les points singuliers de S. A ces points correspondent des solutions étrangères, puisque les coordonnées de ces points font évanouir B, quelles que soient les arbitraires X, Y, Z.

En second lieu, les autres solutions étrangères sont fournies, d'après (13), par les points dont les coordonnées font évanouir A, quelles que soient les arbitraires. Ces points sont ceux en lesquels les trois mineurs, tels que $(\xi d\eta - \eta d\xi)$, s'évanouissent, c'est-à-dire les points singuliers de Σ.

Ainsi, en résumé, les solutions étrangères que nous cherchons répondent à des points singuliers, soit de S, soit de Σ, soit des deux courbes à la fois. Soit maintenant O un point répondant à une solution étrangère; je compterai l'ordre de multiplicité de cette solution d'après la règle du n° 4. J'ai donc à chercher l'ordre d'infiniment petit auquel appartient B quand on y substitue à x, y, z les coordonnées d'un point a, qui, situé sur une branche d'un système circulaire (S) d'origine O et d'ordre de multiplicité n, est à distance infiniment petite du $n^{\text{ième}}$ ordre de O. D'après l'équation (13), je pourrai, pour trouver cet ordre, opérer séparément sur Δ et sur $\frac{A}{ds}$, et faire la somme des résultats. Je m'occupe du facteur $\frac{A}{ds}$, en premier lieu.

Les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équation (10) peuvent être considérées comme tout à fait arbitraires; car changer ces constantes sans modifier ni les équations ni le triangle de référence, c'est changer la figure en une figure homographique, ce qui est permis dans le problème qui nous occupe. Les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant arbitraires, la quantité $(\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w)$ ne diffère que par la notation de celle que j'ai précédemment (6) appelée $F(x, y, z)$; par suite, au point a, cette quantité est infiniment petite de l'ordre h. Ainsi le premier facteur de A (11) est infiniment petit de l'ordre $2h$. Voyons maintenant le second facteur. Soit Ω le point (ξ, η, ζ) origine du système circulaire (Σ) qui correspond à (S), et α le point correspondant à a. Les coordonnées de α sont $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$. Le second facteur de A ne diffère que par un facteur fini de la distance de α à la droite menée par Ω et le point dont les coordonnées sont X, Y, Z, c'est-à-dire à une droite arbitraire menée par Ω. L'ordre infinitésimal du second facteur de A est donc le même que celui de la distance $\Omega\alpha$. Je désigne cet ordre par σ. Donc l'ordre infinitésimal de A est $(\sigma + 2h)$. D'ailleurs Oa est, par hypothèse, infiniment petit de l'ordre n. Il en est donc de même de ds. Donc $\frac{A}{ds}$ est de l'ordre $(\sigma - n + 2h)$. En considérant successivement tous les points qui répondent aux solutions étrangères, on aura une somme $\Sigma(\sigma - n + 2h)$ de nombres analogues. Soit maintenant Γ la somme analogue pour la fonction Δ, le nombre des solutions étrangères est $\Gamma + \Sigma(\sigma - n + 2h)$. D'ailleurs le de-

gré de B est égal à $(2q + m - 3)$; par suite, en désignant par γ la classe de la courbe Σ, j'ai

$$(14) \qquad k\gamma = (2q + m - 3)m - \Sigma(\sigma - n) - 2\Sigma h - \Gamma.$$

Dans cette équation, la somme Σh s'applique en premier lieu à tous les points pour lesquels on a déjà envisagé la même somme au numéro précédent, c'est-à-dire ceux en lesquels u, v, w s'évanouissent à la fois. Elle s'applique en second lieu à d'autres points; mais, en ces derniers, h est nul. Donc Σh a ici le même sens que précédemment; par suite, en vertu de (7), l'équation (14) se change en

$$(15) \qquad k(\gamma - 2\mu) = m(m - 3) - \Gamma - \Sigma(\sigma - n).$$

Pour obtenir la signification du nombre Γ, qui ne dépend que de la courbe S, il suffit de prendre un exemple particulier. Je fais

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z.$$

Alors la courbe Σ se confond avec S. Les nombres $(\sigma - n)$ sont nuls, et k est l'unité. On a alors d'après (15), en désignant par c la classe de S,

$$c = m(m - 1) - \Gamma.$$

L'égalité (15) peut alors s'écrire

$$(16) \qquad k(\gamma - 2\mu) + \Sigma\sigma = c - 2m + \Sigma n.$$

7. Je suppose maintenant que les courbes S et Σ se correspondent point par point. Le nombre k est alors égal à l'unité; mais, en outre, d'après le théorème II, σ se change en l'ordre de multiplicité ν du système circulaire (Σ) correspondant à (S). J'ai donc, au lieu de (16),

$$(17) \qquad \gamma - 2\mu + \Sigma\nu = c - 2m + \Sigma n.$$

Cette relation est entièrement symétrique par rapport aux éléments respectifs des deux courbes. Les systèmes circulaires (S) qui figurent dans Σn sont, d'après l'analyse ci-dessus : 1° ceux qui répondent à des points singuliers de S; soit T leur nombre et N la somme de leurs ordres de multiplicité; 2° ceux qui répondent à des points singuliers de Σ, dont les correspondants sur S sont des points

simples. Leur nombre, que je désigne par N′, est égal à la somme de leurs ordres de multiplicité, puisque tous ces ordres sont égaux à l'unité. Ainsi

$$\Sigma n = \mathrm{N} + \mathrm{N}'.$$

Soient $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ les nombres analogues pour Σ. On a

$$\Sigma \nu = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'.$$

Le nombre total t des couples de systèmes circulaires envisagés est

$$t = \mathrm{T} + \mathrm{N}' = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}'.$$

Par suite de ces trois relations, l'égalité (17) devient

$$(18) \qquad \gamma - 2\mu + \mathfrak{N} - \mathfrak{S} = c - 2m + \mathrm{N} - \mathrm{T},$$

ce qui démontre la proposition annoncée au début de ce travail.

8. Je n'ai pas à montrer ici par des applications l'utilité de cette proposition en Géométrie. J'en ai déjà fait usage en diverses occasions. Je me réserve de montrer une autre fois l'utilité du théorème II. Pour le moment, j'appellerai l'attention sur la relation (16), qui suppose simplement que la courbe Σ soit une transformée rationnelle de S, sans exiger la propriété réciproque. Je vais en faire une application.

Je suppose que S soit une courbe qui ne contienne que des branches simples, et que Σ soit une droite. Alors l'équation (16) se change en

$$(19) \qquad \lambda = c - 2m + 2k,$$

en désignant par λ la quantité $\Sigma(\sigma - n)$. Quelle est la signification de λ?

D'après l'hypothèse faite sur S, chaque nombre n est égal à l'unité; par suite, si O est un point de S, a un point de la même courbe, à distance infiniment petite du premier ordre de O; et si Ω, α sont les points correspondants sur la droite, que je désigne par D, le nombre σ est l'ordre de l'infiniment petit $\Omega\alpha$. Donc λ *est le nombre des points* Ω *qui sont stationnaires*. On peut encore en donner une autre interprétation, qui résulte du théorème I et de la remarque faite à la suite de ce théorème. Soient O un point de S,

Ω le correspondant sur D, et α un point de D infiniment voisin de Ω. Le nombre σ *est égal au nombre des points infiniment voisins de* O, *qui sur* S *correspondent à* α.

On peut, d'une infinité de manières, faire correspondre *un* point d'une droite D à un point d'une courbe quelconque S, et, par suite, tirer de l'égalité (19) beaucoup de résultats divers. Je vais donner un exemple. Je considère un système de courbes C de degré μ, défini par ces conditions : chaque courbe C passe par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés P, P_1, P_2, ..., et, en outre, a un contact d'ordre $(n-1)$ avec S. Soit L le point de contact d'une courbe C avec S : à ce point répond une seule courbe C du système. Je mène la tangente à C au point P; cette tangente rencontre une droite donnée D au point Λ. J'ai ainsi, par le couple (L, Λ), réalisé entre S et D la correspondance demandée. Je vais en tirer des conséquences. Je désigne par $\varphi(n)$ le nombre des courbes de degré μ que l'on peut mener par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, de manière que chacune de ces courbes ait, en outre, un contact d'ordre n avec S. Si je prends un point Λ à volonté, la tangente de C au point P se trouve déterminée. Le nombre des courbes C qui admettent, en P, cette tangente est précisément égal à $\varphi(n-1)$, si l'on veut toutefois admettre que, au lieu de deux points distincts, on peut donner un point et la tangente en ce point pour déterminer une courbe de degré μ, assujettie aux autres conditions indiquées, sans changer le nombre des solutions. Pour justifier cette supposition, il faudrait entrer dans quelques développements que j'omets ici. Le nombre des points L, qui correspondent à un point Λ, est égal au nombre des courbes C dont la tangente en P passe en Λ. Donc le nombre k est égal à $\varphi(n-1)$.

Je cherche maintenant λ. Le point Λ peut être stationnaire de deux manières différentes : 1° si la courbe C est stationnaire, c'est-à-dire si elle a un contact d'ordre n avec S. Le nombre des courbes C satisfaisant à cette condition est $\varphi(n)$; 2° si la tangente en P est stationnaire, sans que la courbe C le soit elle-même. Alors deux courbes C consécutives sont tangentes en P à la même droite. Une courbe quelconque du faisceau qu'elles déterminent a, au point L correspondant, un contact d'ordre $(n-2)$ avec S. Mais, parmi les

courbes de ce faisceau, il en est une qui passe par un point arbitrairement donné. Donc le nombre des points A, qui sont stationnaires de cette seconde manière, est $\varphi(n-2)$. L'égalité (19) donne donc

$$\varphi(n)+\varphi(n-2)=c-2m+2\varphi(n-1).$$

On pourr a par là calculer $\varphi(n)$ si l'on connaît $\varphi(0)$. Or, par $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$ points, passe une courbe de degré μ. Elle coupe S en $m\mu$ points. Donc $\varphi(0)=m\mu$. En partant de cette valeur, on calculera de proche en proche $\varphi(1)$, $\varphi(2)$,..., et l'on obtiendra

$$(20)\qquad \varphi(n)=\frac{n(n+1)}{2}(c-2m)+(n+1)m\mu.$$

On remarquera que la démonstration ne s'applique pas au cas où n a sa valeur maxima, qui est $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$, cas dans lequel la formule (20) est cependant exacte encore.

La formule (20) donne *le nombre des courbes de degré μ qui passent par $\frac{\mu(\mu+3)}{2}-n$ points donnés et ont avec une courbe donnée* S, *de degré m et de classe c, des contacts d'ordre n, sous la condition que la courbe* S *ne possède que des branches simples.* Dans le cas où S ne contient aucune singularité, la formule (20) a été donnée par M. de Jonquières [1]. Dans une autre occasion, j'en donnerai une démonstration très-différente et beaucoup plus complète. Je signalerai, en même temps, quelques cas où cette formule semble en défaut, et j'expliquerai les causes qui produisent cette circonstance; mais ici j'ai voulu simplement, par une application si importante, montrer le parti que l'on peut tirer de la formule (19).

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1860.

Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes; par M. H. Brocard.

(Séance du 15 décembre 1875.)

Voici un exemple très-simple d'une détermination de ce genre, qui offre un certain intérêt.

Soient YOX [1] un système d'axes de coordonnées rectangulaires, MT une tangente en un point M d'une courbe MC, A, A′ deux points de OX symétriques par rapport à l'origine et à une distance a, B, B′ leurs projections sur MT; DM l'ordonnée de M, OD son abscisse.

1. On donne, en premier lieu, la condition

$$AB - A'B' = DM. \tag{1}$$

L'équation de la tangente MT étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

la condition (1) devient, en posant $\frac{dy}{dx} = p$,

$$\frac{y}{p}\sqrt{1 + p^2} = 2a,$$

qui exprime que la tangente MT a une longueur constante $2a$. La courbe cherchée est donc une *tractrice* ou *courbe aux tangentes égales*.

Cette courbe est également :

1° La développante de la *chaînette*

$$y = a\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right);$$

2° La trajectoire orthogonale des circonférences

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$$

de rayon $2a$;

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

3° La trajectoire du point M entraîné par un fil inextensible MT, dont l'extrémité T décrit OX.

Ainsi, dans une tractrice, la différence des distances, à une tangente, des points de OX *situés à une distance de l'origine égale à la moitié du paramètre de la courbe, est égale à l'ordonnée du point de contact.*

C'est, au reste, ce que l'on peut démontrer aisément par de simples considérations géométriques.

Soit E la projection de A′ sur AB. On a

$$EA = AB - A'B'.$$

Les deux triangles rectangles MDT, AA′E sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale, $MT = 2a = AA'$, et l'angle $\widehat{EA'A} = \widehat{MTD}$. Ainsi $EA = MD$.

Remarque. — Soient I le milieu de MD, C sa projection sur MT. Le point E est évidemment sur la ligne EC parallèle à AA′.

De ce qui précède, on déduit une construction de la tangente à la tractrice en un point donné M. Pour l'obtenir, on décrit une circonférence A′EA, ayant O pour centre et la moitié du paramètre pour rayon. Du point A, on mène la corde $AE = MD$. La tangente MT est perpendiculaire à la corde EA, prolongée s'il est nécessaire. Comme vérification, on doit avoir

$$MT = AA' = 2a.$$

2. On donne, en second lieu, la condition

$$A'B' - AB = OD$$

ou

$$\frac{2ap}{\sqrt{1+p^2}} = x,$$

équation différentielle d'une circonférence

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

de rayon $2a$, sur le diamètre XOX′ de laquelle on a pris deux points A, A′, à une distance a de l'origine, moitié du rayon.

Ainsi, dans une circonférence de cercle, la différence des dis-

tances, à une tangente, des points du diamètre situés à une distance du centre égale à la moitié du rayon du cercle, est égale à l'abscisse du point de contact.

Il est encore très-facile d'établir cette propriété de la circonférence.

Conservant les mêmes notations, les deux triangles MOD, AEA′ sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale, $OM = 2a = AA'$ et l'angle $\widehat{EA'A} = \widehat{MOD}$. Ainsi $A'E = OD$.

3. On peut rapprocher de cet exemple la propriété suivante de la parabole, dont OX est l'axe et O le foyer :

$$\overline{AB}^2 - \overline{A'B'}^2 = \text{const.},$$

qui fait l'objet de la question 1165, que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et qui a été résolue p. 285, année 1875, de ce même Recueil.

4. La condition

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \text{const.} = 2b^2$$

aurait donné

$$\frac{(px - y)^2 + p^2a^2}{1 + p^2} = b^2$$

ou

$$p^2(x^2 + a^2 - b^2) - 2pxy + y^2 - b^2 = 0;$$

d'où l'hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2 - a^2} = -1,$$

enveloppe de la droite

$$y = px \pm \sqrt{b^2(1 + p^2) - a^2p^2}.$$

Cette hyperbole a ses foyers sur XOX′.

Sur une surface remarquable du huitième degré; par M. H. Picquet.

(Séance du 15 décembre 1875.)

1. Afin de pouvoir donner la définition de cette surface, nous commencerons par rappeler les théorèmes fondamentaux de la théorie des systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second degré.

Une conique est dite *harmoniquement circonscrite* à une autre lorsqu'on peut lui inscrire un triangle conjugué à la seconde. Le problème est alors possible d'une infinité de manières, et la polaire, par rapport à la seconde, d'un point quelconque de la première, coupe les deux courbes en quatre points conjugués harmoniques.

La seconde conique est *harmoniquement inscrite* à la première, c'est-à-dire qu'on peut lui circonscrire un triangle conjugué de la première. Le problème, lorsqu'il est possible d'une façon, admet aussi une infinité de solutions, et les tangentes menées aux deux courbes du pôle par rapport à la première d'une tangente quelconque de la seconde forment un faisceau harmonique.

On dit encore que ces deux courbes *se partagent harmoniquement* ou forment un *système harmonique*.

Relativement à deux surfaces du second degré, les définitions sont les mêmes; il suffit de remplacer le triangle conjugué par le tétraèdre conjugué. Lorsque deux surfaces du second degré se partagent harmoniquement, le plan polaire d'un point quelconque de celle qui est harmoniquement circonscrite par rapport à l'autre coupe les deux surfaces suivant deux coniques formant un système harmonique, et il en est de même des cônes circonscrits aux deux surfaces, ayant pour sommet commun le pôle par rapport à la première d'un plan tangent quelconque de la seconde, c'est-à-dire qu'un plan quelconque coupe ces cônes suivant deux coniques formant système harmonique.

Si

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad \ldots, \quad S_p = 0$$

sont les équations cartésiennes de p coniques, ou de p surfaces du second degré, elles définissent un *système linéaire ponctuel* d'ordre

$p-1$ dont l'équation générale cartésienne est

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_p S_p = 0,$$

p étant inférieur ou égal à 5 pour les coniques, et à 9 pour les surfaces. Ces courbes ou surfaces satisfont à $5-p+1$ ou à $9-p+1$ conditions, qui sont d'être harmoniquement circonscrites à $5-p+1$ coniques ou à $9-p+1$ surfaces.

Un système linéaire *tangentiel* est défini de même par des équations tangentielles. Ses courbes ou surfaces satisfont à $5-p+1$ ou à $9-p+1$ conditions, qui sont d'être harmoniquement inscrites à $5-p+1$ coniques ou à $9-p+1$ surfaces.

A un système de l'une des deux espèces correspond un système de l'autre qui est dit son système *contrevariant* : les deux systèmes sont tels que toutes les courbes ou surfaces du système ponctuel sont harmoniquement circonscrites aux courbes ou surfaces du système tangentiel, lesquelles sont, par conséquent, harmoniquement inscrites aux premières. La somme des ordres des deux systèmes est égale à 4 dans le cas des courbes, et à 8 dans le cas des surfaces.

Étant donnés une conique et un point, il existe toujours un cercle et un seul ayant pour centre le point et harmoniquement inscrit à la conique. Si

$$f(x-y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est l'équation cartésienne de la conique, et si α, β sont les coordonnées du point, le carré du rayon est égal à $\frac{f(\alpha, \beta)}{A+C}$. Le rayon du cercle est dit la *puissance* du point par rapport à la conique. Si la conique est une hyperbole équilatère, la puissance d'un point quelconque du plan est infinie, à moins que le point soit sur la courbe, auquel cas elle est indéterminée.

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux coniques est l'hyperbole équilatère qui passe par leurs points communs. Tous les points de cette courbe jouissent de la même propriété par rapport à toutes les coniques du système ponctuel du premier ordre ou *faisceau ponctuel* défini par les deux premières coniques, système de coniques ayant quatre points communs. Chaque point de la courbe étant le centre d'un cercle harmoniquement inscrit à

toutes les courbes du système, on voit que cette hyperbole équilatère est le lieu des centres des cercles du système contrevariant.

Lorsque deux surfaces forment un système harmonique, celle des deux surfaces qui est harmoniquement inscrite peut se réduire à une conique; alors cette conique est harmoniquement inscrite à la conique, section de l'autre surface par son plan.

2. Cela posé, considérons le faisceau ponctuel de surfaces

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0,$$

système de surfaces ayant une biquadratique gauche commune et défini par les deux surfaces S_1 et S_2. Un plan quelconque les coupe suivant un faisceau ponctuel de coniques, et il résulte de ce qui vient d'être dit que toutes les courbes du système plan contrevariant de ce faisceau peuvent être considérées comme surfaces harmoniquement inscrites à toutes celles du faisceau, et font conséquemment partie, à titre de surfaces, du système tangentiel du septième ordre contrevariant du faisceau considéré. En particulier, on voit qu'il y a dans chaque plan de l'espace une infinité de cercles faisant partie du système contrevariant, cercles dont le lieu des centres est une hyperbole équilatère.

Proposons-nous d'étudier les cercles de ce système qui ont pour centre un point donné de l'espace. Le plan d'un de ces cercles coupera le faisceau de surfaces suivant un faisceau de coniques, sur l'hyperbole équilatère duquel sera situé son centre qui est le point donné; mais la courbe du faisceau qui passe par le point donné correspond à la surface du faisceau qui passe par ce point. Supposons que ce soit la surface S_1; le plan considéré coupera donc la surface S_1 suivant une hyperbole équilatère, d'où il résulte que les plans des cercles considérés ne sont autres que les plans des sections équilatères de la surface S_1, et enveloppent conséquemment un cône du second degré.

Théorème I. — *Les cercles, ayant pour centre un point donné de l'espace et appartenant à un système tangentiel du septième ordre, sont situés dans des plans qui enveloppent un cône du second degré, enveloppe des sections équilatères de la surface qui passe par le point donné et qui appartient au faisceau ponctuel contrevariant.*

3. Dans chacun de ces plans est situé un cercle du système; il engendre donc une surface que nous allons étudier.

Des considérations analytiques et géométriques nous serviront dans cette recherche. Pour nous servir d'abord des premières, nous prendrons pour origine le point considéré et des axes rectangulaires parallèles aux axes de la surface du faisceau passant par ce point. Le cône enveloppe des plans des cercles a alors pour équation

$$\frac{x^2}{b_1+c_1}+\frac{y^2}{c_1+a_1}+\frac{z^2}{a_1+b_1}=0,$$

en supposant que l'équation de la surface soit

$$S_1=a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2+2p_1x+2q_1y+2r_1z+d_1=0.$$

Les plans des cercles seront alors tous les plans tangents à ce cône, c'est-à-dire tous les plans

$$(1)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

pour lesquels α, β et γ satisferont à la relation

$$(2)\qquad \alpha^2(b_1+c_1)+\beta^2(c_1+a_1)+\gamma^2(a_1+b_1)=0;$$

et chaque cercle sera donné par l'intersection du plan (1) avec une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon la puissance de l'origine par rapport à toutes les sections du plan par les surfaces du faisceau. Cette puissance est la même, puisque l'origine est sur l'hyperbole équilatère du faisceau plan, et peut se définir par celle de l'origine par rapport à la section du plan par la surface S_2 qui, avec la surface S_1, définit le faisceau. Soit

$$\begin{aligned}S_2=a_2x^2+b_2y^2+c_2z^2+2l_2yz+2m_2zx\\+2n_2xy+2p_2x+2q_2y+2r_2z+1=0\end{aligned}$$

l'équation de cette surface; la puissance ρ de l'origine par rapport à la section de cette surface par le plan (1) est facile à calculer par les formules d'Euler, et est donnée par la formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\rho^2[a_2(\beta^2+\gamma^2)+b_2(\gamma^2+\alpha^2)+c_2(\alpha^2+\beta^2)\\&\qquad+2l_2\beta\gamma+2m_2\gamma\alpha+2n_2\alpha\beta]=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2;\end{aligned}\right.$$

la sphère cherchée aura alors pour équation l'équation précédente

où l'on supposera que ρ^2 est égal à $x^2+y^2+z^2$, et le lieu cherché s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre les équations (1), (2) et (3). Les règles de l'élimination font voir que le résultant sera du quatrième degré en x, y, z, qui sont les coefficients de (1) et du second degré en ρ^2 qui entre au premier dans les coefficients de (3); en somme, l'équation résultante sera du huitième degré, homogène et du quatrième degré en x, y, z; mais elle renfermera des termes de degrés 0, 1 et 2 en ρ^2, puisque les coefficients de (3) ne sont pas homogènes en ρ^2.

4. Avant de pousser plus loin l'étude de notre surface, remarquons la forme de l'équation (3). Si l'on vient à y supposer que ρ ait une valeur constante, on voit que les coefficients α, β, γ du plan (1) seront liés par cette relation (3) qui est du second degré; d'où il résulte que ce plan enveloppera un cône de seconde classe dont l'équation tangentielle est précisément l'équation (3). Nous connaissions déjà la propriété pour le cas où, ρ étant infini, la section de la surface S_2 par le plan (1) devient une hyperbole équilatère; elle se généralise pour une valeur quelconque de ρ, et l'on voit que :

Théorème II. — *Les plans, passant par un point donné, qui coupent une surface du second degré suivant des courbes par rapport auxquelles ce point a une puissance donnée, enveloppent un cône du second degré.*

Si maintenant, dans l'équation (3), on attribue successivement à ρ toutes les valeurs possibles, cette équation tangentielle représentera une série de cônes ayant quatre plans tangents communs, puisqu'elle ne renferme qu'un paramètre variable ρ^2, au premier degré : ce sont les plans tangents communs aux deux cônes

$$a_2(\beta^2+\gamma^2)+b_2(\gamma^2+\alpha^2)+c_2(\alpha^2+\beta^2)+2l_2\beta\gamma+2m_2\gamma\alpha+2n_2\alpha\beta=0,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.$$

Le premier est le cône enveloppe des sections équilatères de S_2, puisqu'il correspond à $\rho^2=\infty$, et l'on reconnaît dans le second l'équation tangentielle du cercle de l'infini, lequel correspond par conséquent à $\rho^2=0$; d'où il suit immédiatement que les quatre plans tangents communs sont imaginaires et que les cônes ont mêmes lignes focales.

Théorème III. — *Lorsque la puissance prend toutes les valeurs possibles, les cônes enveloppes, correspondant à chaque valeur de la puissance, ont les mêmes lignes focales.*

Les lignes focales communes ne sont autres que les six droites d'intersection deux à deux des quatre plans tangents communs; il y en a quatre imaginaires, et les deux autres sont réelles si les cônes sont réels, ce qui peut ne pas arriver. Quoi qu'il en soit, chaque couple de lignes focales est un cône du système, et les plans enveloppes correspondants sont ceux qui passent par l'une ou par l'autre ligne focale du couple. On arrive donc à cette conséquence remarquable :

Théorème IV. — *Par chaque point de l'espace, on peut mener trois couples de droites de directions constantes, dont un seul peut être réel, et tels que, dans chaque couple, tous les plans qui passent par l'une ou l'autre des droites du couple coupent une surface du second degré donnée suivant des coniques par rapport auxquelles le point considéré a une puissance constante. Ces six droites sont les lignes focales du cône enveloppe des sections équilatères dont les plans passent par le point.*

5. Nous allons maintenant chercher géométriquement les propriétés de notre surface que nous désignerons par S_8 : 1° par rapport au plan de l'infini; 2° par rapport à une sphère arbitraire ayant son centre à l'origine; 3° par rapport au plan du cercle générateur; 4° par rapport au cône C, enveloppe de ce plan.

Par chaque point π du cercle de l'infini on peut mener deux plans tangents au cône C : dans chacun d'eux, tous les cercles possibles passant par le point π, il en résulte que le cercle générateur de la surface passe deux fois par le point π : le cercle de l'infini est donc une ligne double de la surface. C'est aussi ce que fait voir l'équation de la surface, puisque les termes du degré le plus élevé sont le produit de ρ^4 ou $(x^2+y^2+z^2)^2$ par une fonction f_4 homogène et du quatrième degré en x, y, z : ρ^4 donne deux fois le cercle de l'infini; de plus, les deux nappes de la surface qui se croisent suivant cette courbe sont circonscrites l'une à l'autre, et chaque point est un point de rebroussement, car l'équation ne renferme pas de termes de degré impair; si donc on coupe la surface par le plan des xy, par exemple, l'expression $(x^2+y^2)^2$ donnera non-seule-

ment quatre directions asymptotiques, mais aussi les quatre asymptotes correspondantes de la section. Chaque point du cercle de l'infini est donc un point double pour lequel les deux plans tangents coïncident, c'est-à-dire un point de rebroussement.

Il est facile de voir géométriquement que la fonction f_4 doit se décomposer en quatre facteurs réels ou imaginaires. Abstraction faite du cercle de l'infini qui est fourni par les ombilics du cercle générateur, la surface ne peut, en effet, avoir de points à l'infini qu'autant que le rayon variable du cercle générateur devient infini lui-même. Il faut donc chercher, parmi toutes les sections équilatères de la surface S_1, sections passant par l'origine, quelles sont celles qui coupent la surface S_2 suivant des courbes pour lesquelles la puissance de l'origine est infinie. Or la puissance d'un point situé à distance finie ne saurait être infinie que si la courbe est une hyperbole équilatère; les plans cherchés sont donc parallèles aux directions de sections équilatères communes aux deux surfaces.

Ces plans P sont réels ou imaginaires, et chacun d'eux fournit un cercle de rayon infini, ayant son centre à l'origine, c'est-à-dire une droite à l'infini. La section complète de la surface par le plan de l'infini se compose donc de deux fois le cercle de l'infini et de quatre droites. Ainsi :

Théorème V. — *La surface engendrée par les cercles d'un système tangentiel du septième ordre, qui ont pour centre un point donné de l'espace, est une surface du huitième degré, admettant le cercle de l'infini pour courbe de rebroussement, et ayant dans le plan de l'infini quatre droites, correspondant respectivement aux quatre directions de sections équilatères communes aux surfaces du faisceau ponctuel contrevariant.*

Ces quatre directions de plans peuvent encore être définies par la propriété dont jouit un plan parallèle quelconque de couper la biquadratique commune aux surfaces du faisceau suivant quatre points dont l'un quelconque est le point de rencontre des hauteurs du triangle des trois autres.

6. Une sphère quelconque doit couper la surface suivant une courbe du seizième degré, comprenant deux fois le cercle de l'infini ; il restera donc une courbe du douzième degré à distance finie. Si elle a pour centre l'origine, elle sera tangente aux deux nappes

de la surface tout le long du cercle de l'infini qui comptera alors quatre fois, et il restera une courbe du huitième degré à distance finie. Cette courbe se compose de quatre grands cercles. En effet, les équations (2) et (3) fournissent, pour une valeur donnée de ρ, quatre valeurs proportionnelles de α, β, γ, lesquelles substituées dans (1) donnent quatre plans. La puissance ρ dans toute l'étendue de sa variation passe donc quatre fois par une valeur donnée, et les quatre cercles correspondants sont à la fois sur la surface et sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Leurs plans sont les quatre plans tangents communs au cône C, enveloppe du plan du cercle générateur, et au cône représenté par l'équation tangentielle (3) dans laquelle on a substitué à ρ la valeur considérée.

Théorème VI. — *L'intersection de la surface avec une sphère concentrique se compose de quatre fois le cercle de l'infini et de quatre grands cercles de la sphère.*

En particulier, la puissance ρ devient quatre fois infinie, ce que nous savons déjà, et passe quatre fois par la valeur zéro; mais les plans correspondant à ce dernier cas sont imaginaires, puisque, pour cette valeur particulière de ρ, l'équation tangentielle (3) représente le cercle de l'infini : ce sont les quatre plans tangents communs au cône C et au cercle de l'infini; d'où il résulte que :

Théorème VII. — *Le centre de la surface est un point singulier isolé, pour lequel le cône tangent se compose de quatre plans imaginaires.*

7. Examinons maintenant la section de la surface par le plan d'un cercle générateur. La section étant du huitième degré et le cercle en faisant partie, le reste de la courbe sera une courbe du sixième degré, lieu des points d'intersection avec le plan considéré de tous les autres cercles générateurs, et ayant un point isolé quadruple à l'origine. Il est facile de trouver ses points d'intersection avec le cercle générateur; car, si un autre cercle générateur rencontre le premier en un point, comme ils ont même centre, ils auront même rayon et seront tous les deux sur la sphère correspondant à cette valeur de ρ. On aura donc les points cherchés, en

prenant les points d'intersection du cercle considéré avec les droites suivant lesquelles son plan coupe les plans des cercles générateurs de même rayon. Ces plans sont au nombre de quatre : trois d'entre eux fourniront trois droites et six points d'intersection; le quatrième est le plan considéré qui, pris avec lui-même, se coupe suivant sa droite de contact avec son cône enveloppe, c'est-à-dire la génératrice suivant laquelle il touche le cône C. On aura donc ainsi huit points d'intersection à distance finie : la courbe du sixième degré étant doublement tangente au cercle générateur aux points circulaires de l'infini de son plan, les quatre autres points sont deux fois les ombilics du plan.

Théorème VIII. — *Le plan d'un cercle générateur coupe la surface suivant ce cercle et suivant une courbe du sixième degré ayant un point quadruple isolé à l'origine, doublement tangente au cercle générateur à l'infini, et dont les huit autres points d'intersection avec ce cercle sont : deux sur la génératrice de contact du plan du cercle avec le cône* C, *et les six autres sur les trois droites suivant lesquelles le plan du cercle coupe les plans des trois cercles générateurs de même rayon.*

Si le plan du cercle est un des quatre plans P (5), les points à distance finie s'en vont à l'infini sur les quatre droites correspondantes qui deviennent asymptotes à la courbe du sixième degré; quant au cercle, il est tout entier à l'infini.

8. La surface ne peut avoir d'autres points communs avec le cône C que ceux qui, dans le plan du cercle générateur, sont à l'intersection du cercle avec la génératrice de contact. La courbe commune est donc le lieu obtenu en portant sur chaque génératrice du cône, à partir du sommet, une longueur égale à la puissance correspondante. La surface ne pénétrant pas à l'intérieur du cône, cette courbe ne peut être qu'une courbe de contact ou une courbe de rebroussement. C'est une courbe de contact, car, si c'était une courbe de rebroussement, dans le plan du cercle générateur, ce cercle serait doublement tangent à la courbe du sixième degré sur la génératrice de contact, ce qui n'a pas lieu. On voit, au contraire, que ce sont deux points d'intersection simples qui sont alors deux points de contact du plan avec la surface. Le cône C étant du second degré, sa courbe de contact avec une surface du huitième degré est

du huitième degré : la courbe a d'ailleurs quatre points à l'infini, respectivement sur les génératrices de contact des plans de sections équilatères de la surface S_2, lesquels comptent chacun pour deux, parce que l'origine est au centre; elle passe quatre fois à l'origine, mais d'une façon imaginaire, les quatre génératrices correspondantes étant celles pour lesquelles la puissance ρ devient nulle. Nous verrons aussi plus loin que la longueur ρ admet six maxima ou minima.

Théorème IX. — *La surface est tangente au cône* C *tout le long d'une courbe du huitième degré, symétrique par rapport au sommet du cône, asymptote à quatre génératrices réelles ou imaginaires du cône, et admettant le sommet pour point multiple du quatrième ordre à tangentes imaginaires.*

9. Le plan du cercle générateur étant bitangent à la surface aux deux extrémités du diamètre de contact, tous les autres points doubles de sa courbe d'intersection avec la surface sont fournis par une courbe double. Négligeant les points à l'infini qui proviennent du cercle de l'infini, il reste à distance finie six points d'intersection de la courbe du sixième degré et du cercle, plus un point quadruple à l'origine qui compte pour six points doubles, en tout douze points doubles.

Théorème X. — *La surface possède une courbe double du douzième degré, dont six branches imaginaires se croisent à l'origine.*

10. Nous allons étudier maintenant la section de la surface par un plan quelconque P. Pour cela, nous remarquerons que la surface peut être définie de la façon suivante : on considère les plans tangents communs au cône fixe C et au cône variable dont l'équation (3) est l'équation tangentielle. Une valeur de ρ détermine ce cône variable, puisque ρ est le paramètre variable de son équation, et détermine aussi une sphère $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, dont les cercles d'intersection avec les quatre plans tangents communs engendrent la surface. Dans le plan P, nous aurons pour la section de la surface la définition suivante : on a une conique fixe C_1 et une conique variable d'un faisceau tangentiel dont le paramètre variable est ρ^2; la courbe est engendrée par les points d'intersection

des tangentes communes à ces deux coniques avec le cercle de rayon $\sqrt{\rho^2 - p^2}$ suivant lequel la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ coupe le plan considéré qui est à une distance p de l'origine.

Les valeurs remarquables de ρ^2 sont les suivantes :

1° $\rho^2 = 0$ à laquelle correspond le cercle imaginaire Σ_1, suivant lequel le plan P coupe le cône $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, et qui fournit quatre tangentes communes imaginaires;

2° $\rho^2 = \infty$ à laquelle correspond la conique Σ_2, suivant laquelle le plan P coupe le cône enveloppe des sections équilatères de la surface S_2, et qui fournit quatre tangentes qui peuvent être réelles;

3° Enfin, les trois coniques du faisceau réduites à deux points, lesquelles sont les intersections du plan P avec les lignes focales communes des cônes et dont une seule peut être réelle, correspondent à des valeurs de ρ^2 faciles à déterminer. En effet, d'une part la puissance de l'origine par rapport à toutes les sections de S_2 passant par une de ces droites est constante; d'autre part cette droite est parallèle à l'un des plans principaux de S_2; si donc on considère le plan mené par cette droite parallèlement à ce plan principal, il coupe S_2 suivant une courbe par rapport à laquelle la puissance de l'origine est la puissance cherchée. On a donc trois valeurs de ρ, qui sont les puissances de l'origine par rapport aux trois sections parallèles aux plans principaux, à chacune desquelles correspondent, comme à toutes les autres, quatre plans tangents au cône C; mais alors ces quatre plans tangents sont menés par un couple de lignes focales communes aux autres cônes.

Il y a encore les valeurs maxima et minima de ρ correspondant aux maxima et aux minima, par rapport au sommet du cône C, de la courbe de contact de ce cône et de la surface S_8 : nous allons les déterminer en même temps que les points doubles de la section plane. Remarquons pour cela que, pour qu'un point de cette courbe soit double, il faut que les deux tangentes menées de ce point à la conique C_1 correspondent à la même valeur de ρ^2; en d'autres termes, une valeur de ρ^2 donnera un point double lorsqu'un des six points d'intersection deux à deux des quatre tangentes correspondantes sera un point de la courbe. Il suffit donc, pour avoir les points doubles, de chercher le lieu de ces points d'intersection, et les points communs à ce lieu et à la courbe; mais le lieu des ombilics communs à la conique C_1 et à toutes les coniques du fais-

ceau tangentiel $\Sigma_1 + \rho^2 \Sigma_2 = 0$ n'est autre que la hessienne du réseau tangentiel déterminé par les trois coniques C_1, Σ_1 et Σ_2, et dont l'équation générale tangentielle serait

$$\Sigma_1 + \rho^2 \Sigma_2 + \lambda \Sigma_3 = 0,$$

$\Sigma_3 = 0$ étant l'équation tangentielle de C_1. Or on sait que cette courbe est du troisième degré, que, par exemple, les trois points où elle coupe une droite quelconque sont les trois points d'intersection de cette droite avec les trois autres tangentes communes à toutes les courbes du réseau tangentes à la première droite; il en résulte qu'elle coupe la section de S_8 en vingt-quatre points, qui se réduisent à douze, puisque ce sont des points doubles.

11. Le cône ayant pour sommet l'origine et pour base cette courbe du troisième degré est le cône hessien du réseau tangentiel de cônes défini par le cône C et le faisceau tangentiel (3) : c'est lui qui, par son intersection avec S_8, détermine la ligne double de cette surface, laquelle se trouve bien être du douzième degré comme nous l'avons déjà vu, indépendamment du cercle de l'infini, tout le long duquel deux nappes de la surface sont circonscrites l'une à l'autre.

Désignons par H le cône hessien dont nous allons faire une étude spéciale. On voit d'abord qu'il coupe le cône C suivant six génératrices, qui sont, comme l'apprend l'étude des réseaux plans, les génératrices de contact avec ce cône des six cônes du faisceau tangentiel (3) qui lui sont tangents. Pour un de ces six cônes, les quatre plans tangents qu'il a de communs avec le cône C se réduisent à trois, deux d'entre eux étant venus se confondre avec le plan tangent le long de la génératrice de contact; donc, sur les quatre cercles d'intersection de la surface S_8 avec la sphère correspondante, deux sont confondus, et la sphère est circonscrite tout le long d'un grand cercle. De plus, si l'on considère la génératrice de contact, on voit que la génératrice infiniment voisine demeure dans le plan tangent commun aux deux cônes et fournit la même valeur de ρ^2, puisqu'elle fournit le même cône dans le faisceau tangentiel; donc elle correspond à un maximum ou à un minimum de ρ^2. Ainsi :

Théorème XI. — *La courbe de contact de la surface* S_8 *avec le*

cône C *admet six maxima ou minima, par rapport au sommet du cône. Les valeurs de* ρ^2 *correspondantes fournissent des sphères tangentes à la surface le long du cercle générateur correspondant, et les six génératrices du cône* C *qui en résultent sont les droites d'intersection de ce cône avec le cône hessien* H.

Le réseau de coniques $\Sigma_1 + \rho^2 \Sigma_2 + \lambda \Sigma_3 = 0$ donne lieu à un réseau ponctuel contrevariant; de même, le réseau des cônes qui ont pour sommet l'origine et ces coniques pour base donne lieu à un réseau contrevariant, formé par les cônes perspectifs du réseau ponctuel. Pour étudier ces deux réseaux de cônes, remarquons que dans le réseau tangentiel se trouve le cône $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, qui a pour base le cercle de l'infini; tous les cônes du réseau ponctuel, étant harmoniquement circonscrits à ceux du réseau tangentiel, seront harmoniquement circonscrits à celui d'entre eux qui a pour base le cercle de l'infini, et ne pourront être conséquemment que des cônes équilatères (¹). En particulier, les couples de plans qui font partie du réseau ponctuel ne pourront être que des couples de plans rectangulaires; considérons donc un de ces couples de plans, lequel étant harmoniquement circonscrit à tous les cônes du réseau tangentiel forme couple de plans conjugués par rapport à ces cônes (²); il est donc conjugué par rapport au cône C de base Σ_3 et par rapport au cône C_2 de base Σ_2, respectivement enveloppes des sections équilatères des surfaces S_1 et S_2 qui définissent le faisceau. Il en résulte que la droite commune à ces deux plans doit être une ligne focale d'un des cônes du faisceau tangentiel défini par les cônes C_1 et C_2, car les couples de plans tangents menés par cette droite aux cônes de ce faisceau étant conjugués harmoniques par rapport aux deux plans rectangulaires, il y a un de ces couples formé par les plans tangents menés par la droite au cercle de l'infini, d'où il suit que le cône correspondant admet la droite pour ligne focale. Le cône hessien lieu de ces droites ne diffère donc pas du lieu des lignes focales des cônes du faisceau tangentiel (C_1, C_2). On voit qu'ici les surfaces S_1 et S_2, qui déterminent le faisceau ponctuel $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$, jouent absolument le même rôle,

---

(¹) *Voir* notre Mémoire *Sur les invariants communs à deux fonctions quadratiques* (*Comptes rendus du Congrès de Lille*, 1874, p. 1234).

(²) *Ibid.*, p. 1224.

et l'on doit s'attendre à ce qu'il en soit de même de toutes les autres surfaces du faisceau : c'est en effet ce qui a lieu. L'équation tangentielle du cône C enveloppe des sections équilatères de la surface S_1 étant

$$a_1(\beta^2+\gamma^2)+b_1(\gamma^2+\alpha^2)+c_1(\alpha^2+\beta^2)+2l_1\beta\gamma+2m_1\gamma\alpha+2n_1\alpha\beta=0,$$

on voit qu'elle est du premier degré par rapport aux coefficients de la surface S_1 ; si donc on y remplace $a_1, b_1, c_1, \ldots$, par $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2$, $\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2$, $\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2, \ldots$, elle sera du premier degré en λ_1 et λ_2 et deviendra l'équation tangentielle générale des cônes d'un faisceau tangentiel. Donc :

Théorème XII. — *Tous les cônes du second degré, enveloppes respectives des sections équilatères passant par un point donné de toutes les surfaces du second degré d'un faisceau ponctuel, ont quatre plans tangents communs.*

C'est précisément le faisceau tangentiel déterminé par les cônes C_1 et C_2 qui correspondent respectivement aux surfaces S_1 et S_2. Le cône hessien n'est donc autre que le lieu des lignes focales des cônes enveloppes des sections équilatères de toutes les surfaces du faisceau ponctuel. Ainsi :

Théorème XIII. — *Le cône, lieu des lignes focales des cônes enveloppes respectives des sections équilatères, passant par un point donné, de toutes les surfaces d'un faisceau ponctuel, est un cône du troisième degré qui passe par la ligne double de la surface* S_8, *lieu des cercles ayant pour centre le point donné, et faisant partie du système tangentiel contrevariant du faisceau ponctuel.*

Il résulte encore de ce qui précède que :

Théorème XIV. — *Dans un faisceau ponctuel de surfaces du second degré, il y a trois surfaces pour lesquelles le cône enveloppe des sections équilatères se réduit à deux droites.*

Le cône H jouit encore d'une foule de propriétés qui se déduisent trop facilement de celles de la cubique plane lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites pour que nous insistions davantage. Nous ne citerons que la suivante :

Théorème XV. — *D'une génératrice fixe du cône* H, *on voit*

les deux lignes focales d'un cône quelconque du faisceau $[C_1, C_2]$ *sous deux plans formant un angle variable, mais dont les plans bissecteurs restent les mêmes.*

Si la génératrice fixe décrit le cône H, les plans bissecteurs enveloppent un cône de troisième classe ayant, avec le premier, neuf contacts, dont six au moins sont imaginaires, et qui est le cône cayleyen du système.

Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré; par M. Halphen.

(Séance du 15 décembre 1875.)

1. Parmi les espèces, en nombre indéfini, de points particuliers dont la théorie du contact nous révèle l'existence sur les courbes planes, je me propose ici d'en considérer spécialement deux. J'envisagerai les points en lesquels une courbe se rapproche plus qu'en tout autre point, en premier lieu d'une conique, en second lieu d'une courbe du troisième degré ou *cubique*. Les premiers ont déjà attiré l'attention de plusieurs géomètres, notamment MM. Cayley, Zeuthen, Painvin. Ils ont reçu de M. Cayley le nom de *points sextactiques,* généralement adopté. Les seconds ne me paraissent pas avoir été étudiés jusqu'à présent. Le problème que je me propose ici consiste à trouver le nombre de ces points sur une courbe algébrique offrant des singularités quelconques. Pour résoudre ce problème, j'établirai d'abord une proposition générale, propre à fournir la solution de beaucoup de questions analogues. Ce sera l'objet du § I. Dans les §§ II et III, je résoudrai le problème relatif au contact des coniques, puis le problème relatif au contact des cubiques.

§ I.

2. Soit $U(x, y) = 0$ une équation algébrique. Je suppose que, pour une valeur ξ de la variable x, les racines y se répartissent en divers *systèmes circulaires*. On sait que la propriété caractéristique de ces systèmes circulaires est la suivante : *Soit n le nombre des racines comprises dans l'un d'eux; ces n racines forment, pour les petites valeurs de* $(x - \xi)$, *une seule et même fonction synec-*

tique de $(x-\xi)^{\frac{1}{n}}$. Par suite, ces n racines sont représentées à la fois par les équations

$$(1) \qquad x-\xi=t^n, \quad y=F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction synectique pour les petites valeurs de t, c'est-à-dire développable en série convergente suivant les puissances entières et ascendantes de t. Le cas où des racines y seraient infinies ne fait pas exception. La fonction $F(t)$ se compose alors de la somme de quelques termes, dans lesquels les exposants de t sont négatifs, et d'une série convergente.

Soit maintenant $\Phi(x,y)$ une fonction entière. Si l'on prend pour x une valeur quelconque, et pour y successivement toutes les racines de $U=0$, on obtient la résultante en x des équations $\Phi=0$, $U=0$, en égalant à zéro le produit de toutes les expressions de $\Phi(x,y)$. Soit $R(x)=0$ cette résultante, sous forme entière; on a

$$(2) \qquad R(x)=\Pi\Phi(x,y).$$

Si, dans cette identité, on fait $x=\xi$, on devra, dans le second membre, mettre successivement pour y tous les développements tels que $F\left[(x-\xi)^{\frac{1}{n}}\right]$. Par suite, si ξ est une racine de $R(x)$, voici comment on pourra évaluer l'ordre de multiplicité de cette racine. Substituons dans $\Phi(x,y)$ à x et y les expressions (1); ordonnons le résultat suivant les puissances ascendantes de t. Soit h le degré de t au premier terme. Soient, de même, h', h'',... les nombres analogues obtenus en considérant les autres systèmes circulaires de racines répondant à la valeur ξ de x. L'ordre de multiplicité de la racine ξ de $R(x)$ est égal à $h+h'+h''+\ldots$.

Pour faciliter le langage, je dirai que le nombre h est *l'ordre de la fonction* $\Phi(x,y)$ *relativement au système circulaire* (1). On voit que *la somme des ordres de la fonction* Φ *relativement à tous les systèmes circulaires de racines* y *de* $U(x,y)=0$, *qui répondent à toutes les valeurs finies de* x, *est égal à la somme des ordres de multiplicité des racines de* $R(x)$, *c'est-à-dire au degré de cette résultante.*

Je vais transformer ce dernier énoncé, en considérant dans l'équation (2) une valeur infiniment grande de x. Pour une telle

valeur de x, les racines y se répartissent en groupes dont le type est contenu dans les équations

$$(3) \qquad x = t^{-n}, \quad y = F(t),$$

dans lesquelles n est un entier positif, et F a la même signification que précédemment. Je substitue dans (2) à x et y les expressions (3). Soit $(-k)$ le degré de t au premier terme. Soient $(-k')$, $(-k'')$, ... les nombres analogues obtenus en opérant de même avec les autres expressions analogues à (3). Le degré de $R(x)$ est $k + k' + k'' + \ldots$. J'applique ici, comme on le voit, un procédé d'élimination bien connu.

On peut considérer les équations (3) comme cas particulier des équations (1). Il suffit pour cela d'admettre que, dans (1), n est un entier positif ou négatif. Alors le nombre $(-k)$ est, d'après la définition ci-dessus, l'ordre de $\Phi(x, y)$ relativement au système circulaire (3). Voici donc l'énoncé que j'obtiens au lieu du précédent :

Théorème I. — *La somme des ordres d'une fonction entière* $\Phi(x, y)$, *relativement à tous les systèmes circulaires de racines* y *d'une équation algébrique* $U(x, y) = 0$, *correspondant à toutes les valeurs finies ou infinies de* x, *est nulle.*

L'avantage que présente cette forme d'énoncé consiste en ce que la proposition peut de la sorte être étendue à des fonctions plus générales. Soit, par exemple, une fonction rationnelle, quotient de deux fonctions entières, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$. L'ordre du quotient relativement à un système circulaire est égal à la différence des ordres de ψ et de θ. Par suite :

Théorème II. — *La somme des ordres d'une fonction rationnelle de* x *et* y, *relativement à tous les systèmes circulaires de racines* y *d'une équation* $U(x, y) = 0$, *correspondant à toutes les valeurs finies ou infinies de* x, *est nulle.*

Sous une forme plus usitée, mais moins appropriée aux applications que j'ai en vue, le théorème II exprime que *le nombre des zéros d'une fonction algébrique quelconque d'une variable est égal au nombre de ses infinis.* Il importe d'observer que *le théorème II s'applique sans modification à une fonction rationnelle de* x, y *et des dérivées de* y. Car, en vertu de l'équation $U(x, y) = 0$, ces dérivées s'expriment rationnellement au moyen de x, y. Donc la fonc-

tion considérée ne diffère pas au fond d'une fonction rationnelle de x et y seuls.

3. Voici une dernière proposition préparatoire, très-simple, et qui vraisemblablement n'est pas nouvelle.

Soit D *un déterminant composé de la ligne*

$$x^{q_0},\quad x^{q_1},\quad x^{q_2},\quad \ldots,\quad x^{q_n}$$

et de n lignes formées avec les dérivées premières, secondes, ..., $n^{\text{ièmes}}$ des termes de la première ligne. On a

$$D = Q x^{\Sigma q - \frac{n(n+1)}{2}},$$

où l'on a posé

$$Q = (q_n - q_0)(q_{n-1} - q_0)\ldots(q_1 - q_0)(q_n - q_1)\ldots(q_2 - q_1)\ldots(q_n - q_{n-1}).$$

Je laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition, et j'arrive maintenant au premier de nos problèmes : *Trouver le nombre des points sextactiques d'une courbe algébrique donnée.*

§ II.

4. Soit $U(x, y) = 0$ l'équation de la courbe. Soit

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^5 y}{dx^5}\right) = 0$$

l'équation différentielle des coniques. On a à étudier les points de la courbe U, dont les coordonnées satisfont à cette équation différentielle. Un point sextactique ordinaire sera un point simple, dont les coordonnées annuleront f, et tel que les coordonnées d'un point infiniment voisin, pris sur la courbe à distance infiniment petite du premier ordre, rendent f infiniment petit du premier ordre. Si l'on ajoute au nombre de ces points la somme des ordres de f relativement à tous les systèmes circulaires de racines y, pour lesquels cet ordre n'est pas égal à l'unité, la somme totale est nulle, en vertu du théorème II. On voit donc comment ce théorème conduit à la solution de notre problème.

Je considère d'abord les systèmes circulaires correspondant à une valeur infiniment grande de x. Comme il s'agit de l'étude de points

jouissant d'une propriété projective, je puis supposer que la courbe U n'a à l'infini que des points simples ordinaires, qui ne soient pasdes points sextactiques. Chacun des systèmes circulaires à considérer se compose d'une seule racine, et les équations (3) se réduisent à

$$(4)\quad x = t^{-1},\quad y = F(t) = A t^{-1} + B + C t + \ldots = A x + B + \frac{C}{x} + \ldots.$$

Soit β l'ordre de f relativement à un tel système circulaire. Je calculerai tout à l'heure ce nombre. Soit m le degré de U. Il y a m systèmes circulaires tels que (4). La somme des ordres de f relativement à ces systèmes circulaires est $m\beta$.

Si, en un point de U, la tangente est parallèle à l'axe des y, les dérivées de y sont infinies en ce point. Pour la même raisen que tout à l'heure, on peut admettre que tous les points analogues sont des points à distance finie, simples et non sextactiques. Soient ξ, η les coordonnées de l'un d'eux; les deux racines y, qui coïncident avec η pour $x = \xi$, forment le système circulaire

$$(5)\quad \begin{cases} x - \xi = t^2, \\ y - \eta = F(t) = A t + B t^2 + C t^3 + \ldots \\ \qquad\qquad = A(x-\xi)^{\frac{1}{2}} + B(x-\xi) + C(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots. \end{cases}$$

Soit α l'ordre de f relativement à un tel système circulaire. Je calculerai tout à l'heure ce nombre. Soit c la classe de U. Il y a c systèmes circulaires tels que (5). La somme des ordres de f relativement à ces systèmes est $c\alpha$.

Je vais calculer maintenant β et α. A cet effet, je forme d'abord la quantité f.

5. La fonction f est le déterminant composé : 1° de la ligne

$$(A)\qquad 1,\quad x,\quad x^2,\quad y,\quad xy,\quad y^2;$$

2° des cinq lignes obtenues en prenant successivement les dérivées par rapport à x des termes de (A).

Il ne serait pas nécessaire de développer ce déterminant pour résoudre le problème; mais il se présente ici une circonstance analytique, qui nous échapperait tout d'abord si nous ne commencions par faire ce calcul. Je vais donc effectuer le développement. Je re-

marque d'abord que f se réduit évidemment à

$$f = \begin{vmatrix} y''' & (xy)''' & (y^2)''' \\ y^{\text{IV}} & (xy)^{\text{IV}} & (y^2)^{\text{IV}} \\ y^{\text{V}} & (xy)^{\text{V}} & (y^2)^{\text{V}} \end{vmatrix}.$$

On pourrait développer les dérivées et faire ensuite les réductions. Une remarque permet d'éviter ce calcul. Conformément à une observation que j'ai déjà eu l'occasion de faire [1], on sait d'avance que f ne contient ni x, ni y, ni y'. On peut donc supposer que ces trois quantités sont nulles. Posant alors

$$(6) \qquad a_i = \frac{y^{(i)}}{1.2.3\ldots i},$$

j'ai pour y le développement

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots,$$

et ensuite

$$xy = a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \ldots,$$
$$y^2 = a_2^2x^4 + 2a_2a_3x^5 + \ldots;$$

par suite, à un facteur numérique près, f se réduit à

$$(7) \qquad f = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2^2 \\ a_5 & a_4 & 2a_2a_3 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & 2a_3 \end{vmatrix} = a_2\varphi.$$

On voit que f se décompose en deux facteurs, a_2 et φ. D'après (6), a_2 est à un facteur numérique près la dérivée seconde y''. En égalant à zéro ce facteur, on a l'équation caractéristique des points d'inflexion. En égalant à zéro le facteur φ, on a l'équation caractéristique des points sextatiques.

Dans tout ce qui suit, j'opérerai sur f et non sur φ; par suite, pour trouver l'ordre de φ relativement à un système circulaire, je chercherai l'ordre de f et celui de a_2, et je retrancherai ce dernier du précédent. La différence sera l'ordre de φ.

6. Je vais calculer β, c'est-à-dire l'ordre de φ relativement au système circulaire (4). On voit donc que β est, au signe près, le

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 31.

degré de la partie principale de φ où l'on substitue à y le développement

$$y = Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots.$$

Pour le facteur a_2 ou y'', la partie principale est $\frac{2C}{x^3}$. Elle est, en x, du degré -3; en t, du degré 3. Ainsi l'ordre de a_2, relativement au système circulaire (4), est égal à 3.

Pour calculer l'ordre de f, j'observe que par des combinaisons linéaires on amène les divers termes de la ligne (A) (n° 5) à avoir pour parties principales, à des facteurs constants près,

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^{-1}, \quad x^{-2}, \quad x^{-3}.$$

Par suite, d'après la proposition du n° 3, la partie principale de f est du degré -18 en x, ou du degré 18 en t. Si j'en retranche le nombre 3, ordre de a_2, j'ai, pour l'ordre β de φ, $\beta = 15$.

7. Pour calculer α, je calcule d'abord l'ordre de y'' relativement au système circulaire (5). La partie principale de y'' est du degré $-\frac{3}{2}$ relativement à $(x - \xi)$, ou du degré -3 relativement à t. L'ordre de y'' est ainsi égal à -3.

Pour calculer l'ordre de f, je ramène par des combinaisons linéaires la ligne (A) à se composer de termes dont les parties principales sont, à des facteurs constants près,

$$1, \quad (x-\xi)^{\frac{1}{2}}, \quad (x-\xi), \quad (x-\xi)^{\frac{3}{2}}, \quad (x-\xi)^2, \quad (x-\xi)^{\frac{5}{2}}.$$

D'après le n° 3, le degré de la partie principale de f est, en $(x - \xi)$, égal à $-\frac{15}{2}$. Relativement à t, son degré est donc -15. Par suite, l'ordre de φ est $-15 + 3$ ou -12. Donc $\alpha = -12$.

Soit S la somme des ordres de φ relativement à tous les systèmes circulaires qu'il nous reste à envisager. Conformément au théorème II, on a

$$(8) \qquad S - 12c + 15m = 0.$$

8. Soient

$$x - \xi = t^n, \quad y - \eta = F(t) = At^{n+r} + Bt^{n+r+s} + \ldots$$

les équations d'un système circulaire pris parmi ceux qu'il nous reste à considérer. Pour aucun d'eux la tangente n'est parallèle à l'axe des y; ils répondent d'ailleurs à des valeurs finies de x et de y. Donc les nombres n, r, s, ... sont des entiers non négatifs. Je dis qu'on peut supposer que r ne soit pas nul, et aussi que ξ et η soient nuls. Si, en effet, r est nul, changeons x en $(x+\xi)$ et y en $(y+\eta+Ax)$. Cette substitution réalise notre hypothèse; mais la fonction f, ne contenant ni x, ni y, ni la dérivée première y', n'est pas altérée par cette substitution. Donc, pour calculer l'ordre de la fonction f relativement à un quelconque des systèmes circulaires considérés, on peut supposer ce dernier ramené à la forme

$$(9) \qquad x = t^n, \quad y = At^{n+r} + Bt^{n+r+s} + \ldots,$$

où r est positif. En d'autres termes, on peut supposer que l'origine des coordonnées et l'axe des x soient l'origine et la tangente du système circulaire.

Cela étant, je commence par m'occuper de l'ordre de y'' relativement au système circulaire (9). Il est clair que la partie principale de y'' est, en x, du degré $\frac{r-n}{n}$, par suite, en t, du degré $(r-n)$. Nous rappelant que, pour la fonction y'', les nombres analogues à β et à α sont 3 et -3, nous obtenons incidemment, d'après le théorème II, la relation

$$(10) \qquad \Sigma(r-n) - 3c + 3m = 0,$$

où le signe sommatoire s'étend à tous les systèmes circulaires pour lesquels les nombres n et r sont différents. Si l'on remarque que chaque point d'inflexion ordinaire ($n=1$, $r=2$) figure pour une unité dans cette somme, on voit que cette formule donne le nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique quelconque.

9. Je considère maintenant la quantité f. La première ligne de ce déterminant est

$$(A) \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad y, \quad xy, \quad y^2.$$

Je cherche son ordre relativement au système circulaire (9). Je suppose, en premier lieu, que r soit différent de n. Comme r est positif, on voit que les parties principales des divers termes de (A)

sont toutes de degrés différents, savoir

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 1+\frac{r}{n}, \quad 2+\frac{r}{n}, \quad 2+\frac{2r}{n}.$$

Par suite, d'après la proposition du n° 3, la partie principale de f est, en x, du degré

$$1+2+1+\frac{r}{n}+2+\frac{r}{n}+2+\frac{2r}{n}-15=\frac{4r-7n}{n}.$$

Le degré en t ou l'ordre de f relativement au système circulaire est donc $(4r-7n)$.

Si l'on n'avait pas effectué le calcul du n° 5, ce résultat eût averti que y'' est en facteur dans f. En effet, si l'on suppose $n=1$, $r=2$, on voit que l'ordre de f est l'unité; donc f s'évanouit en chaque point d'inflexion.

L'ordre de y'', relativement au système circulaire considéré, étant $(r-n)$, celui de φ est $4r-7n-(r-n)=3r-6n$.

Considérant successivement tous les systèmes circulaires pour lesquels les nombres n et r sont différents, c'est-à-dire toutes les branches de la courbe qui ont avec leurs tangentes des contacts dont l'ordre diffère de l'unité, je pose

$$(11) \qquad G=\Sigma(3r-6n), \quad r \gtrless n.$$

Le nombre G est un élément de la somme désignée précédemment par S (n° 7).

10. J'examine maintenant ce qui est relatif à un système circulaire pour lequel les nombres n et r sont égaux, c'est-à-dire défini par

$$(12) \qquad x=t^n, \quad y=At^{2n}+Bt^{2n+1}+\ldots.$$

Les branches qui composent ce système circulaire ont, avec leur tangente à l'origine, des contacts du premier ordre. Si le nombre n est l'unité, le système circulaire se réduit à une seule branche.

Je considère encore la ligne (A) du déterminant f (n° 9). Les parties principales des divers termes de cette ligne, sauf le terme y, sont respectivement des degrés 0, 1, 2, 3, 4. Quant au terme y, sa partie principale est du second degré, et disparaît dans le détermi-

nant. Pour la faire disparaître immédiatement, je fais une combinaison linéaire des termes de (A), de telle sorte que la partie principale de cette combinaison soit d'un degré différent des nombres 0, 1, 2, 3, 4. Soit C cette combinaison

$$(13) \qquad C = ax^2 + by + cxy + dy^2,$$

et $\frac{\lambda}{n}$ le degré de la partie principale de C. On voit alors (n° 3) que le degré de la partie principale de f est, en x, $\frac{\lambda - 5n}{n}$; par suite, l'ordre de f, relativement au système circulaire (12), est $(\lambda - 5n)$. C'est aussi l'ordre de φ, car celui du facteur y'' est zéro.

Je considère successivement tous les systèmes circulaires pour lesquels le nombre $(\lambda - 5n)$ n'est pas nul, et je pose

$$(14) \qquad L = \Sigma(\lambda - 5n).$$

L'équation (8) devient

$$(15) \qquad G + L = 12c - 15m.$$

Cette dernière relation contient la solution du problème. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la signification du nombre $(\lambda - 5n)$ quand on suppose $n = 1$. Dans cette hypothèse, le système circulaire (12) se réduit à une branche unique. D'autre part, la quantité C étant infiniment petite de l'ordre λ quand x est infiniment petit du premier ordre, la conique $C = 0$ a, avec la branche de courbe, à l'origine, un contact d'ordre $(\lambda - 1)$.

Il est manifeste qu'en général λ est égal à 5, et le nombre $(\lambda - 5n)$ est alors égal à zéro; mais, si λ est égal à 6, le nombre $(\lambda - 5n)$ est égal à l'unité. Donc chaque point sextactique figure pour une unité dans L. Si λ est égal à $(5 + h)$ $(h = 1, 2, \ldots)$, c'est qu'alors la courbe a, en un point, avec une conique un contact d'ordre $(4 + h)$. Ce point figure, dans L, pour h unités, et compte pour h points sextactiques. Il suffit donc de calculer directement les éléments $(\lambda - 5n)$ relatifs aux valeurs de n différentes de l'unité, pour conclure de l'équation (15) le nombre des points sextactiques, les nombres m, c, G étant supposés connus.

Les éléments $(\lambda - 5n)$ que l'on doit calculer directement sont relatifs uniquement à des points singuliers, et, dans beaucoup de

cas, ils sont nuls. Il me reste à dire comment on peut les obtenir. Je suppose que l'on ait reconnu l'existence, sur la courbe considérée, d'un système circulaire de n branches ($n > 1$), ayant avec la tangente des contacts du premier ordre. Soient alors (12) les équations qui représentent ce système circulaire, ou plutôt soit

$$(16) \qquad y = Ax^2 + Bx^{2+\frac{s}{n}} + \ldots$$

le développement commun qui représente ces n branches. On sait que, dans le développement prolongé suffisamment, on rencontrera nécessairement un exposant fractionnaire. Si le premier exposant fractionnaire est inférieur à 5, il est manifeste que le nombre $\frac{\lambda}{n}$ est égal à cet exposant. Le nombre λ est ainsi trouvé pour ce cas, et l'on voit que $(\lambda - 5n)$ est alors un nombre négatif. Si, au contraire, le premier exposant fractionnaire est supérieur à 5, alors $\frac{\lambda}{n}$ peut être égal ou supérieur à 5, et, en aucun cas, ne peut dépasser cet exposant. Pour reconnaitre la valeur de λ. on devra calculer directement les coefficients de C, de manière que les termes du deuxième au quatrième ordre disparaissent. Le nombre $\frac{\lambda}{n}$ est alors égal à l'ordre minimum des termes qui subsistent. On voit que, dans ce cas, le nombre $(\lambda - 5n)$ est nul ou positif.

Les points appelés communément *points de rebroussement de deuxième espèce* nous offrent l'exemple de ces divers cas. On obtient cette singularité en supposant que n soit égal à 2. Soit $\frac{2k+1}{2}$ le premier exposant fractionnaire. Il sera inférieur ou supérieur à 5 suivant que k sera inférieur ou non à 5. Ainsi les rebroussements

$$y = Ax^2 + Bx^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^{\frac{9}{2}} + \ldots$$

fournissent au nombre L les éléments -5, -3, -1.

Au contraire, le rebroussement

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + Ex^{\frac{11}{4}} + \ldots$$

donne généralement $\lambda - 5n = 0$. Mais on peut avoir aussi $\frac{\lambda}{n} = \frac{11}{2}$. Si, par exemple, les coefficients B, C, D sont nuls à la fois, chacune des deux branches du rebroussement a un contact d'ordre $\frac{9}{2}$ avec la parabole $y = Ax^2$; et l'on a $\lambda - 5n = 1$.

11. Pour fixer complétement les idées à ce sujet, je considère la courbe représentée par ce dernier développement, ou plutôt la courbe représentée par l'équation en coordonnées triangulaires

$$U = z(yz^4 - Ax^2z^3 - Dx^5)^2 - x^{11} = 0.$$

Cette courbe possède deux points singuliers :

1° Le point $Y(z = 0, x = 0)$. En ce point la courbe U se compose d'un système circulaire dont l'ordre de multiplicité est 9. Le développement commun aux neuf branches constituant ce système circulaire est

$$\frac{z}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{11}{9}} + \ldots.$$

La tangente est la droite $z = 0$. D'après des principes connus, l'abaissement que ce point produit dans la classe est égal à 8×11.

2° Le point $Z(x = 0, y = 0)$. Ce point est un rebroussement :

$$\frac{y}{z} = A\left(\frac{x}{z}\right)^2 + D\left(\frac{x}{z}\right)^5 + \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{11}{2}}.$$

L'abaissement produit dans la classe par ce point est égal à 11; par suite, le degré m étant égal à 11, la classe c est égale à $10 \times 11 - 8 \times 11 - 11$, c'est-à-dire $c = m = 11$.

De plus, le point Y est l'origine du seul système circulaire pour lequel les nombres r et n soient différents, et l'on a

$$n = 9, \quad r = 11 - 9 = 2.$$

Donc, en premier lieu, la formule (10) montre que la courbe U possède sept points d'inflexion. Ce résultat est facile à vérifier directement.

Le nombre G est ici égal à -3×16, le nombre $(12c - 15m)$ à -3×11. On a donc, d'après (15),

$$L = 15.$$

Par suite, d'après les remarques du numéro précédent, la courbe U a quinze points sextactiques; mais, si D est nul, elle n'en a plus que quatorze.

12. Les résultats généraux contenus dans la formule (15) peuvent être énoncés de diverses manières. La forme la plus simple s'obtient comme il suit. Dans (15), je remets pour G son expression, et j'ai

$$L + 3\Sigma(r - 2n) = 12c - 15m.$$

Combinant cette relation avec (10) de manière à éliminer r, et désignant Σn par la lettre N, j'obtiens

$$L = 3(c - 2m + N); \tag{17}$$

d'où l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Soient m, c le degré et la classe d'une courbe* U, N *le nombre total des branches de cette courbe ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre différent de l'unité; soit enfin* $(4 + l)$ *l'ordre du contact d'une branche de* U *avec sa conique osculatrice, en un point où cet ordre diffère de* 4, *et où le contact avec la tangente est du premier ordre. On a*

$$\Sigma l = 3(c - 2m + N).$$

13. *Exemples.* — Pour une courbe qui n'a aucune singularité au point de vue des coordonnées ponctuelles, on trouve ainsi $m(12m - 27)$ pour le nombre des points sextactiques. On conclut de là que *les points sextactiques d'une courbe de degré m et de classe c sont sur une courbe de degré* $(12m - 27)$, *et que les tangentes de la courbe en ces points touchent une courbe de classe* $(12c - 27)$ [1].

Pour une courbe n'ayant que des singularités ordinaires, N est le nombre des points d'inflexion augmenté du double du nombre des points de rebroussement ordinaires. Soit r le nombre de ces derniers, on en conclut pour le nombre des points sextactiques l'expression $12c - 15m + 9r$; ou encore l'expression corrélative $12m - 15c + 9i$, i étant le nombre des inflexions.

---

[1] *Voir* Cayley, *Phil. Transact.*; 1865. — Painvin, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII.

En dernier lieu, pour la courbe dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs premiers entre eux, on a

$$m = c = p + q = N;$$

par suite, le nombre des points sextactiques est zéro, résultat qu'il était aisé de prévoir.

§ III.

14. En un point quelconque d'une courbe U, on peut généralement mener une cubique ayant, en ce point, avec U un contact du huitième ordre. *Trouver le nombre des points en lesquels l'ordre le plus élevé possible du contact entre* U *et une cubique surpasse* 8; tel est le problème dont je vais maintenant m'occuper.

Je suivrai ici exactement la même marche que pour le problème précédent. L'équation différentielle à considérer $F = 0$ est celle des cubiques dans le plan. Elle est du neuvième ordre. Son premier membre F est un déterminant composé en premier lieu de la ligne (B)

$$(B) \qquad 1,\ x, x^2, x^3,\ y, xy, x^2y, y^2, x^2y, y^3,$$

et, en second lieu, des neuf lignes obtenues en prenant les dérivées successives des termes de (B) jusqu'au neuvième ordre inclusivement.

Je considère, comme aux n°s 4, 5, 6, les systèmes circulaires de branches infinies et de branches dont les tangentes sont parallèles à l'axe des y. Je désigne par S la somme des ordres de F relativement aux autres systèmes circulaires. Par un calcul entièrement analogue à celui des numéros précités, j'obtiens l'équation suivante, analogue à (8) :

$$(18) \qquad S - 45c + 60m = 0.$$

Je vais maintenant m'occuper de calculer S. A cet effet, je considérerai, pour les mêmes raisons qu'au n° 8, des systèmes circulaires réduits à la forme

$$(19) \qquad x = t^n, \quad y = At^{n+r} + Bt^{n+r+s} + \ldots,$$

où r, s, ... sont, comme n, des entiers positifs qui ne peuvent être nuls. Le problème actuel étant plus compliqué que le précédent, on ne devra pas s'étonner de voir se multiplier les cas qu'il va être nécessaire de distinguer.

Je suppose d'abord r différent de n, c'est-à-dire le système circulaire (19) composé de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre différent de l'unité. Dans la question précédente, cette supposition donnait lieu à un résultat simple, qui n'exigeait pas la distinction de plusieurs cas. Cette simplicité provient de ce qu'alors les coniques osculatrices se réduisent à la tangente du système circulaire. Dans la question actuelle, les cubiques osculatrices se réduisent aussi à la tangente si l'ordre $\frac{r}{n}$ du contact de chaque branche avec cette tangente ne peut être reproduit par une branche de cubique; mais, dans le cas contraire, il existe effectivement une ou plusieurs cubiques osculatrices. C'est ce qui a lieu si le contact exceptionnel $\frac{r}{n}$ est d'ordre 2 ou d'ordre $\frac{1}{2}$. On peut ainsi prévoir d'avance la nécessité de distinguer ici trois cas :

1° $\frac{r}{n}$ différent de 1, de 2 et de $\frac{1}{2}$;

2° $\frac{r}{n} = 2$;

3° $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$.

J'aurai ensuite à examiner ce qui est relatif au cas où les nombres r et n sont égaux, cas dans lequel sont comprises les branches simples ordinaires.

15. Les parties principales des termes de la ligne (B), en vertu des relations (19), sont, par rapport à x, des degrés

$$(\mathrm{B}') \quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1+\frac{r}{n},\ 2+\frac{r}{n},\ 3+\frac{r}{n},\ 2+2\frac{r}{n},\ 3+2\frac{r}{n},\ 3+3\frac{r}{n}.$$

On reconnaîtra que tous ces nombres sont différents entre eux si $\frac{r}{n}$ est différent des trois nombres 1, 2 et $\frac{1}{2}$. D'après la proposition du n° 3, il en résulte qu'alors le degré en x de la partie prin-

cipale du déterminant F est égal à $\left(10\frac{r}{n} - 25\right)$: par suite, l'ordre de F relativement au système circulaire est égal à $(10r - 25n)$. Je pose

$$H = \Sigma(10r - 25n),$$

la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires pour lesquels $\frac{r}{n}$ diffère des nombres $1, 2, \frac{1}{2}$. Le nombre H est un premier élément de la somme S.

16. Je suppose maintenant $\frac{r}{n} = 2$. Les nombres qui composent la ligne (B′) sont les suivants :

(B″) 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9.

Le nombre 3 est répété deux fois. On doit donc, dans le déterminant F, remplacer le terme correspondant à l'un de ces nombres, le second par exemple, par une combinaison linéaire de ce terme avec les autres, de telle sorte que le degré de la partie principale de cette combinaison soit différent de tous les autres nombres de la ligne (B″). Soit $\frac{\mu}{n}$ ce degré. On trouve alors, pour l'ordre de F relativement au système circulaire, le nombre $(\mu - 8n)$. Ce résultat exige quelques observations.

En premier lieu, supposons $n = 1$. Le système circulaire envisagé se réduit alors à une branche simple ayant une inflexion simple à l'origine. On trouvera généralement alors pour μ le nombre 8 ; d'où résulte que $(\mu - 8n)$ est nul. Ainsi, pour un point d'inflexion, la quantité F ne s'évanouit pas. C'est, on se le rappelle, le contraire qui se produit à l'égard du déterminant f, considéré dans le problème précédent (n° 9). Soit

$$C = ax^3 + by + cxy + dx^2y + ey^2 + fxy^2 + gy^3$$

la combinaison des termes de la ligne (B) que l'on a dû faire pour obtenir l'ordre 8 à la partie principale. J'observe que le coefficient du dernier terme, g, est entièrement arbitraire, nul si l'on veut, puisque y^3 est du neuvième ordre. On a donc une infinité de cubiques, représentées par l'équation $C = 0$, et formant un faisceau,

dont les contacts au point considéré avec la courbe sont du septième ordre; et il est évident qu'il n'existe aucune cubique ayant en ce point avec la courbe un contact du huitième ordre.

En déterminant les coefficients $a, b, \ldots, f$ de C, de manière à faire disparaître les termes d'ordre 3, 4, ..., 7, il peut arriver, dans des cas particuliers, que les termes du huitième ordre disparaissent aussi. Alors toutes les cubiques du précédent faisceau ont avec la courbe des contacts du huitième ordre; mais on peut déterminer g de manière à faire disparaître aussi les termes du neuvième ordre. Il existe donc une cubique ayant avec la courbe un contact d'ordre égal ou supérieur à 9. En outre, la combinaison C qu'il faut substituer à y dans la ligne (B) répond à cette dernière cubique, sans quoi le nombre 9 serait répété deux fois dans la ligne (B″) transformée; donc, dans ce cas, le nombre $(\mu - 8n)$ est au moins égal à 2. Ainsi :

Théorème IV. — *En un point d'inflexion simple d'une courbe* U, *l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre cette courbe et une cubique est, en général, égal à* 7. *Si cet ordre dépasse le nombre* 7, *il est au moins égal à* 9.

Soit $7 + \omega$ *l'ordre de ce contact* $(n = 1, \mu = 8 + \omega)$, *l'ordre de* F, *relatif à ce point de la courbe* U, *est égal à* ω.

Cette dernière conclusion subsiste dans le cas où n diffère de l'unité, avec cette modification que l'ordre de F relativement au système circulaire est égal à $n\omega$. Quant au nombre ω, il peut être négatif ou positif suivant les cas. Si le premier exposant fractionnaire du développement de y suivant les puissances ascendantes de x est inférieur à 8, soit $\frac{\lambda}{n}$ cet exposant : on a $\omega = \frac{\lambda}{n} - 8$, et ω est négatif. Si le premier exposant fractionnaire est supérieur à 8, ω peut être nul ou positif, mais toujours au plus égal à cet exposant diminué de 8. En résumé, *soit* $(7 + \omega)$ *l'ordre de contact de la cubique osculatrice avec une branche de la courbe* U *en un point où l'ordre du contact de cette branche avec sa tangente est égal à* 2, *toutes les branches analogues figurent dans* S *par l'élément* $\Sigma\omega$.

17. J'examine maintenant le troisième cas, savoir $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$. Les

nombres qui composent la ligne (B′) sont ici les suivants :

$$(B'') \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ 3,\ 4,\ \frac{9}{2}.$$

Le nombre 3 se trouve répété deux fois. Il correspond, à la dernière place, au terme y^2 de la ligne (B). On remplacera donc le terme y^2 par une combinaison C′

$$C' = ax^3 + bx^2y + cy^2 + dxy^2 + ey^3,$$

dont les coefficients seront choisis de manière que le degré de la partie principale de C′ diffère des nombres $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$. Soit $\frac{\nu}{2r'}$ le degré de la partie principale de C′. Alors, d'après la proposition du n° 3, on trouvera aisément que l'ordre de F relativement au système circulaire considéré est $(\nu - 46r')$. Pour calculer le nombre ν, on peut directement former C′ ou bien encore raisonner comme il suit :

L'équation $C' = 0$ est celle d'une cubique, ayant un rebroussement au point considéré, et dont les branches ont, en ce point, le contact de l'ordre le plus élevé possible avec les branches du système circulaire envisagé. Les deux branches de C′ sont représentées à la fois par le développement ambigu suivant, que l'on peut déduire de $C' = 0$:

$$(20) \qquad y = \alpha x^{\frac{3}{2}} + \beta x^2 + \gamma x^{\frac{5}{2}} + \delta x^3 + \varepsilon x^{\frac{7}{2}} + \ldots.$$

Les coefficients de ce développement dépendent de quatre arbitraires, à savoir les rapports des coefficients de C′. D'autre part, le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, pour la courbe U, commence par un terme d'ordre $\frac{3}{2}$. S'il est de la forme

$$(21) \qquad y = \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^{\frac{5}{2}} + \delta_1 x^3 + \varepsilon_1 x^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

on pourra prendre

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad \delta = \delta_1;$$

alors ε et les coefficients suivants de (20) seront déterminés. D'après des principes connus, si ε diffère de ε_1, on verra aisément que la cubique C′ a alors $10r'$ points d'intersection avec U confondus à

l'origine. Par suite le nombre ν est égal à $5r'$. C'est aussi ce qu'on trouverait en considérant directement C'. On voit d'ailleurs que, dans des cas particuliers, le nombre ν peut dépasser 5. Il peut aussi être inférieur à 5. C'est ce qui arrive si, dans le développement (21), il existe un terme dans lequel l'exposant de $x^{\frac{1}{2}}$ soit fractionnaire et inférieur à 7. Alors $\frac{\nu}{2r'}$ est égal au premier de ces exposants fractionnaires.

Considérant tous les systèmes circulaires de branches de la courbe U ayant de même avec leurs tangentes des contacts d'ordre $\frac{1}{2}$, je pose

$$J = \Sigma(\nu - 46r').$$

Le nombre J est l'élément par lequel l'ensemble de ces systèmes circulaires figure dans la somme S.

18. J'ai maintenant à examiner ce qui est relatif aux systèmes circulaires où les nombres r et n sont égaux, c'est-à-dire à ceux dont les branches ont avec leurs tangentes à l'origine des contacts du premier ordre. On doit s'attendre à trouver ici une complication plus grande que précédemment, puisqu'il s'agit maintenant de branches de courbe dont les singularités portent sur des éléments d'ordre plus élevé.

Dans le cas actuel ($r = n$), les nombres de la ligne (B') sont les suivants :

(B^{IV}) 0, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 4, 5, 6,

correspondant à

(B) $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ y,\ xy,\ x^2y,\ y^2,\ xy^2,\ y^3.$

Les nombres 2, 3, 4 sont répétés. Je remplacerai par suite :

1° Le terme x^2y par la combinaison

$$D = ax^2y + by^2 + cxy^2 + dy^3;$$

2° Le terme xy par la combinaison

(22) $$E = a'x^3 + b'xy + c'x^2y + d'y^2 + e'xy^2 + f'y^3;$$

3° Le terme y par la combinaison

(23) $$G = a''x^3 + b''x^3 + c''y + d''xy + e''x^2y + f''y^2 + g''xy^2 + h''y^3.$$

On remarquera que D se décompose en deux facteurs yK, savoir

$$(24) \qquad K = ax^2 + by + cxy + dy^2.$$

L'équation K = o représente une conique touchant la courbe U à l'origine. L'équation E = o représente une cubique ayant un point double à l'origine, et dont une des branches touche U en ce point. Enfin l'équation G = o représente une cubique ordinaire touchant la courbe U au même point.

Les degrés des parties principales des termes de (B), qui restent inaltérés, sont les nombres o, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Le facteur y de D étant du second ordre, et D devant être d'un ordre différent des nombres 4, 5, 6, il en résulte que l'ordre de K doit différer des nombres 2, 3, 4; par suite K = o, ou, abréviativement, K est la conique osculatrice des branches du système circulaire considéré, ou bien l'une quelconque des coniques osculatrices s'il en existe une infinité. La considération de la conique K permet de classer les résultats cherchés suivant trois cas, savoir :

Premier cas. — **L'ordre du contact de chaque branche du système circulaire avec la conique osculatrice est fractionnaire et quelconque, ou bien encore entier et supérieur au nombre 5.**

Deuxième cas. — **L'ordre de ce même contact est égal à 5.**

Troisième cas. — L'ordre de ce même contact est égal à 4.

Tous les cas sont embrassés par là; car l'ordre de ce contact, s'il est entier, ne peut être inférieur à 4. Je vais examiner successivement ces trois cas.

19. *Premier cas.* — Soit $\left(\frac{\lambda}{n} - 1\right)$ l'ordre du contact de K avec une branche du système circulaire considéré. D'après les hypothèses qui caractérisent le premier cas, $\frac{\lambda}{n}$ est fractionnaire; ou, s'il est entier, il est supérieur à 6.

L'ordre de K est $\frac{\lambda}{n}$; celui de D est $2 + \frac{\lambda}{n}$.

Prenons pour E la combinaison xK; son ordre sera $1 + \frac{\lambda}{n}$. Prenons enfin pour G la combinaison K elle-même; son ordre est $\frac{\lambda}{n}$. Les trois nombres $\frac{\lambda}{n}$, $1 + \frac{\lambda}{n}$, $2 + \frac{\lambda}{n}$ sont différents entre eux et dif-

férents des autres nombres de la ligne (B^{IV}). En effet, ils sont fractionnaires; ou, s'ils sont entiers, le plus petit d'entre eux est supérieur à 6; donc, dans le cas actuel, les parties principales des termes de la ligne (B) ont les degrés suivants, après les combinaisons :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \frac{\lambda}{n},\ 1+\frac{\lambda}{n},\ 2+\frac{\lambda}{n}.$$

Il en résulte que l'ordre de F relativement au système circulaire considéré est égal à $(3\lambda - 21n)$. Pour avoir une expression plus simple, je désigne par $(6+a)$ l'ordre du contact d'une quelconque des branches du système circulaire avec K. Alors $(3\lambda - 21n)$ est égal à $3na$; et l'on peut dire simplement que l'élément du nombre S, relatif à toutes les branches analogues, est $3\Sigma a$.

20. *Deuxième cas.* — L'ordre du contact de K avec chaque branche du système circulaire étant égal à 5, la partie principale de K est du degré 6 en x; donc celle de D est du degré 8. En prenant pour E la combinaison xK, on aura, à la partie principale, le degré 7. Il reste à examiner le degré de la partie principale de G, pour qui l'on ne peut prendre la combinaison K. Si, dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, il existe des exposants fractionnaires, c'est-à-dire si n n'est pas égal à l'unité, le premier exposant fractionnaire est supérieur à 6, sans quoi K ne pourrait être de l'ordre 6. Si ce premier exposant fractionnaire est inférieur à 9, il est manifeste que le degré de la partie principale de G lui sera égal. Soit alors $\frac{\mu}{n}$ ce degré; on trouve pour l'ordre de F relativement à ce système circulaire le nombre $(\mu - 9n)$.

Si le premier exposant fractionnaire est supérieur à 9, l'ordre $\frac{\mu}{n}$ de G peut être égal à 9 ou surpasser ce nombre, sans pouvoir surpasser le premier exposant fractionnaire. Dans ce cas, comme aussi dans celui où n est égal à l'unité, l'expression $(\mu - 9n)$ fournit l'ordre de F. Je simplifie cette expression en désignant par $(8+b)$ l'ordre du contact de chaque branche avec la cubique osculatrice. Il en résulte que l'ensemble de toutes les branches analogues fournit au nombre S l'élément Σb. Il ne faut pas perdre de vue que b, s'il est fractionnaire, peut être négatif, mais non inférieur à -1; il est nul

ou positif s'il est entier, comme on le voit d'après les conditions imposées à $\frac{\mu}{n}$.

Par exemple, pour un point sextactique ordinaire, le nombre b est généralement égal à zéro; mais il peut arriver qu'en un point sextactique le contact d'une courbe avec une cubique puisse s'élever au-dessus du huitième ordre. Alors le nombre b est l'excès de l'ordre de ce contact sur le nombre 8.

21. *Troisième cas.* — L'ordre du contact de K avec chaque branche du système circulaire étant égal à 4, la partie principale de K est, en x, du degré 5, et celle de D du degré 7. On ne peut plus prendre pour E la combinaison xK, dont l'ordre serait égal à 6. Je considère donc la combinaison E en elle-même. On peut manifestement y faire disparaître les termes de degrés entiers jusqu'au septième degré inclusivement; donc le degré de la partie principale de E est au moins égal à 8, s'il est entier. S'il est fractionnaire, il est égal à l'unité augmentée du premier exposant fractionnaire figurant dans le développement de y. Comme la partie principale de K est du cinquième degré, ce premier exposant fractionnaire surpasse nécessairement le nombre 5. L'équation $E = 0$ représente, ainsi que je l'ai déjà observé, une cubique ayant à l'origine un point double, et une branche tangente à la courbe U. L'ordre du contact de la branche de cubique avec la branche de courbe U est inférieur de deux unités au degré en x de la partie principale de la quantité E. Il sera nécessaire de subdiviser le cas actuel en plusieurs autres suivant l'ordre du contact de la branche de courbe avec la cubique E, osculatrice au point considéré. Désignons par i l'ordre de ce contact.

1° *i fractionnaire et inférieur à 7.* — Dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, le premier exposant fractionnaire est alors $(i+1)$. Le terme affecté de cet exposant ne peut disparaître dans G, et, comme $(i+1)$ est inférieur à 8, ce nombre est précisément le degré en x de la partie principale de G. Il en résulte pour l'ordre de F la valeur $2n(i-7)$, qui est négative. Je pose, pour ce cas, $i = 7 - g$. L'ensemble des systèmes circulaires analogues figure donc dans la somme S par l'élément $-2\Sigma g$.

2° *i entier et inférieur à* 7. — J'ai fait observer que l'ordre de E, s'il est entier, est au moins égal à 8. D'ailleurs, cet ordre est $(i+2)$; donc, si i est entier et inférieur à 7, il ne peut être que 6. Dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, le premier exposant fractionnaire est nécessairement supérieur à 7. S'il est en même temps inférieur à 9, l'ordre de G lui est nécessairement égal. Dans le cas opposé, l'ordre de G est égal ou supérieur au nombre 9. On en tire aisément la conclusion suivante : je désigne par $(8+d)$ l'ordre du contact de la branche de courbe considérée avec sa cubique osculatrice G. L'ensemble des branches analogues fournit au nombre S l'élément Σd. On ne doit pas perdre de vue que d peut être négatif; il est alors fractionnaire et supérieur à -2.

3° *i égal à* 7. — Dans ce cas, l'ordre de E est égal à 9. Par suite, le premier exposant fractionnaire, dans le développement de y, est supérieur à 8. Il en résulte, pour G, l'ordre 8, en général; de plus, il est impossible que, dans G, le terme du huitième ordre disparaisse de lui-même; car alors les deux cubiques E, G auraient plus de neuf points d'intersection réunis à l'origine, ce qui ne se peut. Donc, dans ce cas, les degrés des parties principales de K, E, G sont 7, 9, 8. Il en résulte pour F l'ordre zéro; donc les branches considérées n'interviennent pas dans la somme S.

4° *i supérieur à* 7. — Pour la même raison, l'ordre de la partie principale de G est égal à 8. Si je pose $i = 7 + e$, j'ai, pour l'élément fourni à la somme S par les branches analogues, l'élément Σe. On voit que le cas précédent est compris dans ce dernier, où l'on doit faire alors $e = 0$.

22. Les résultats des numéros précédents, depuis le n° 15, donnent en résumé la formule

$$(25)\quad H + J + \Sigma\omega + 3\Sigma a + \Sigma b + \Sigma d + \Sigma e - 2\Sigma g = 45c - 60m.$$

Dans cette formule, chaque point simple en lequel l'ordre du contact de la courbe U avec la cubique osculatrice est égal à 9 figure pour une unité dans Σd. Dans le cas exceptionnel où ce point est en même temps sextactique, il ne figure pas dans Σd, mais, pour une unité également, dans Σb.

Je modifierai quelque peu la formule (25) comme il suit. Dési-

gnant provisoirement par T la somme

$$T = \Sigma\omega + 3\Sigma a + \Sigma b + \Sigma d + \Sigma e - 2\Sigma g,$$

je l'écris

$$(26) \qquad H + J + T = 45c - 60m.$$

On a (nos 15 et 17)

$$(27) \qquad \begin{cases} H = \Sigma(10r - 25n), \\ J = \Sigma(\nu - 46r'). \end{cases}$$

Je reprends la formule (10). Dans $\Sigma(r - n)$, je dois mettre à part ce qui est relatif aux systèmes circulaires qui figurent dans J, et aussi ce qui est relatif à ceux qui figurent dans $\Sigma\omega$.

Pour ceux qui figurent dans J, on a (n° 17) $n' = 2r'$; donc la partie correspondante dans $\Sigma(r - n)$ est $-\Sigma r'$.

Pour ceux qui figurent dans $\Sigma\omega$, on a (n° 15) $r'' = 2n''$. La partie correspondante dans $\Sigma(r - n)$ est donc $\Sigma n''$. La formule (10) s'écrira donc

$$\Sigma(r - n) - \Sigma r' + \Sigma n'' = 3c - 3m.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière par (10) et retranchant de (26), j'obtiens, en vertu de (27),

$$T - 15\Sigma n + \Sigma(\nu - 36r') = 15(c - 2m) + 10\Sigma n'',$$

ou

$$T + \Sigma(\nu - 36r') = 15(c - 2m + \Sigma n + \Sigma n'') - 5\Sigma n''.$$

La somme $\Sigma n + \Sigma n'' + 2\Sigma r'$ est ce que j'ai appelé plus haut (n° 12) le nombre N. C'est le nombre total des branches de la courbe qui ont avec leurs tangentes des contacts dont les ordres diffèrent de l'unité. J'écris donc la dernière formule comme il suit, en introduisant le nombre N,

$$T + \Sigma(\nu - 6r') = 15(c - 2m + N) - 5\Sigma n''.$$

Enfin, pour dernière transformation, je vais introduire, au lieu du nombre ν, les ordres des contacts des branches correspondantes avec les cubiques osculatrices, douées, dans ce cas, d'un rebroussement. Dans le cas d'un rebroussement ordinaire, l'ordre de ce contact est en général $\frac{5}{2}$, comme on l'a vu (n° 17). Je le désigne d'une

manière générale par $\frac{5}{2} + \theta$. On a alors

$$\frac{\nu}{r'} = 10 + 2\theta;$$

et l'expression $\Sigma(\nu - 6r')$ devient $\Sigma 2r'\theta + \Sigma 4r'$. J'écris le même nombre plus simplement $\Sigma\theta + 2\Sigma n'$. Posant enfin

$$\Sigma n' = N', \quad \Sigma n'' = N'',$$

j'ai la formule suivante

$$T + \Sigma\theta = 15(c - 2m + N) - 2N' - 5N'',$$

que j'énonce comme il suit :

Théorème V. — *Soient m, c le degré et la classe d'une courbe* U, *et* N *le nombre total des branches de cette courbe ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre différent de l'unité; distinguons, en outre, sur la courbe* U, *les particularités suivantes, savoir :*

1° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre* $\frac{1}{2}$ (*elles figurent déjà dans* N). *Soit* N' *leur nombre; soit aussi, pour l'une d'elles,* $\left(\frac{5}{2} + \theta\right)$ *l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre cette branche et une branche de cubique* (à rebroussement).

2° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre* 2 (*elles figurent également dans* N). *Soit* N'' *leur nombre; soit aussi, pour l'une d'elles,* $(7 + \omega)$ *l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre cette branche et une cubique* (à inflexion).

3° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts du premier ordre, et avec leurs coniques osculatrices des contacts dont les ordres soient ou fractionnaires et d'ailleurs quelconques, ou entiers et supérieurs à* 5. *Soit, pour l'une d'elles,* $(6 + a)$ *l'ordre de ce contact.*

4° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du cinquième ordre. Soit, pour l'une d'elles,* $(8 + b)$ *l'ordre de son contact avec la cubique osculatrice.*

5° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact du sixième ordre avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit, pour l'une d'elles,* $(8+d)$ *l'ordre de son contact avec la cubique osculatrice.*

6° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact d'ordre fractionnaire et inférieur à* 7 *avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit* $(7-g)$ *l'ordre de ce contact.*

7° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact d'ordre égal ou supérieur à* 7 *avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit* $(7+e)$ *l'ordre de ce contact.*

On a, entre tous ces nombres, la relation

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\theta+\Sigma\omega+3\Sigma a+\Sigma b+\Sigma d+\Sigma e-2\Sigma g\\ &\quad=15(c-2m+N)-2N'-5N''.\end{aligned}\right.$$

23. La relation (27) et le théorème V sont assurément bien compliqués; mais ils ne me semblent guère susceptibles d'être simplifiés sans restreindre la généralité. On remarquera que c'est uniquement parmi les particularités 4 et 5 que se trouvent les points en lesquels le contact entre la courbe et une cubique ordinaire s'élève au-dessus du huitième ordre. L'existence de la particularité 4 exige une condition, tandis qu'au contraire la particularité 5 existe, en général, sur toute courbe donnée.

Je me contenterai d'appliquer la formule (27) aux exemples du n° 13. Pour une courbe qui n'a aucune singularité au point de vue des coordonnées ponctuelles, tous les termes du premier membre de (27) sont nuls, sauf le terme Σd, qui est le nombre des points en lesquels le contact de la courbe avec une cubique est du neuvième ordre. Dans le second membre, N' est nul. Les nombres N et N'' coïncident. C'est le nombre des points d'inflexion. On a ainsi $\Sigma d = 15m(3m-7)$.

Pour une courbe qui n'a que des singularités ordinaires, et qui, en outre, en ses points d'inflexion et de rebroussement, n'a pas de

contact exceptionnel avec une cubique, on a

$$\Sigma d = 15(c - 2m + i + 2r) - 4r - 5i,$$

i étant le nombre des inflexions et r celui des rebroussements. Ces deux nombres sont liés d'ailleurs par la relation

$$i - r = 3(c - m).$$

En dernier lieu, soit la courbe dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs, premiers entre eux. On doit ici supposer, en outre, $p + q$ différent de 3. Les nombres N′ et N″ sont nuls. Le second membre et, par suite, Σd se réduisent à zéro.

Note sur la division mécanique de l'angle; par M. Perrin.

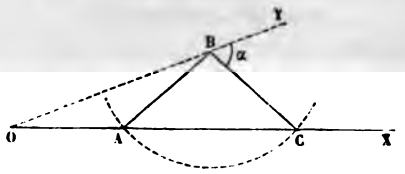
(Séance du 21 juillet 1875.)

M. Brocard a communiqué récemment à la Société le principe d'un compas trisecteur proposé par M. Laisant, et comportant sept tiges articulées et six articulations, dont une à glissière. Je me propose d'indiquer ici un principe fort simple, permettant de construire un instrument au moyen duquel on réaliserait la division d'un angle en tel nombre de parties aliquotes que l'on voudrait. Dans le cas particulier de la trisection, cet instrument se réduit à la combinaison de trois tiges articulées, avec trois articulations dont une à glissière.

Voici en quoi consiste le principe dont il s'agit. Soient OX, OY deux tiges articulées faisant par conséquent un angle arbitraire φ. Sur OX prenons une longueur arbitraire OA, et imaginons qu'en A soit articulée une tige t_1 de longueur AB = OA, dont l'extrémité B soit assujettie à se mouvoir sur OY ; puis, qu'à cette extrémité B soit articulée l'origine d'une deuxième tige t_2, de longueur BC = AB = OA, dont l'extrémité C soit assujettie à se mouvoir sur OX ; puis, en C, une troisième tige t_3, toujours de même longueur CD = OA, dont l'extrémité D soit assujettie à rester sur OY, et

ainsi de suite. On voit sans peine que l'angle BAX $= 2\varphi$, que CBY $= 3\varphi$, DCX $= 4\varphi$, et ainsi de suite, c'est-à-dire que, d'une manière générale, la $n^{\text{ième}}$ tige t_n fait, avec celle des deux directions fixes OX, OY qui passe à son point de départ (la direction de t_n étant comptée en marchant de t_{n-1} vers t_{n+1}), l'angle $(n+1)\varphi$. Pour obtenir mécaniquement la $n^{\text{ième}}$ partie d'un angle donné α, il suffit donc de déformer et de placer le système articulé de telle sorte que l'articulation de t_{n-1} à t_{n-2} soit au sommet de l'angle donné, que t_{n-1} soit dirigé suivant un des côtés de cet angle, et que l'autre côté coïncide avec celle des deux glissières OX, OY qui passe par l'articulation de t_{n-1} avec t_{n-2}. L'instrument étant ainsi placé donnera non-seulement $\frac{\alpha}{n}$, mais $\frac{2\alpha}{n}$, $\frac{3\alpha}{n}$, ...; il permet donc d'obtenir non-seulement une partie aliquote quelconque, mais une fraction quelconque d'un angle donné.

Le fonctionnement d'un appareil ainsi construit deviendrait pratiquement d'autant plus difficile que le nombre des tiges serait plus considérable; mais, si l'on se borne à demander la trisection de



l'angle, l'appareil se simplifie beaucoup; car on peut supprimer la glissière OY et ne conserver que la tige-glissière OX et les deux tiges articulées AB, BC. Pour se servir du compas trisecteur ainsi construit, il suffit de placer l'articulation B au sommet de l'angle donné α, la tige BC sur l'un des côtés de cet angle, et de déformer le système articulé jusqu'à ce que le point O vienne se placer sur le prolongement du deuxième côté BY; l'angle XOY est égal à $\frac{\alpha}{3}$. Pendant cette déformation, le point A décrit un cercle, et la longueur OA restant constante, le point O décrit un limaçon de Pascal ayant BC pour axe, C pour point double, et B pour sommet de la boucle intérieure. L'emploi de ce compas trisecteur revient donc à la construction géométrique que voici : Étant donné l'angle YBC, construire, sur un des côtés comme axe, un limaçon de Pascal dans

lequel la longueur totale de l'axe soit égale à trois fois celle de l'axe de la boucle, et dont le sommet de la boucle coïncide avec le sommet B de l'angle; joindre le point double C du limaçon au point O où cette courbe rencontre le prolongement du deuxième côté BY; BOC est le tiers de l'angle donné.

Ombre portée par un tore sur lui-même; par M. Cahen, élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 23 février 1876.)

Soit un tore donné par son axe vertical oz et son cercle méridien c. Proposons-nous de trouver l'ombre portée par ce tore sur lui-même, sans avoir recours à une courbe graphique.

Soit m un point de l'ombre propre. Cherchons l'ombre portée par ce point, c'est-à-dire l'intersection du rayon lumineux mk qui passe en ce point avec la surface. Pour cela, imaginons qu'il tourne autour de l'axe oz. Il engendre dans ce mouvement un hyperboloïde de révolution circonscrit au tore et le coupant suivant deux parallèles sur lesquels se trouvent les points cherchés. Pour les déterminer, je coupe les deux surfaces par leur plan méridien principal. J'obtiens comme sections : dans le tore, le cercle c, et, dans l'hyperboloïde, une hyperbole tangente à ce cercle au point m_1 situé sur le parallèle du point m. Nous obtiendrons une asymptote et par suite le centre de cette hyperbole en amenant la droite mk, par une rotation autour de oz, à être parallèle au plan vertical de projection. Pour plus de simplicité, nous supposerons les rayons parallèles entre eux et au plan vertical de projection : mk est alors une asymptote et k le centre de l'hyperbole. Cherchons les deux autres points d'intersection a_1 et b_1 de cette courbe et du cercle. Remarquons pour cela que la droite $a_1 b_1$ est parallèle à la direction symétrique de la tangente $m_1 t$ par rapport à l'axe oz. Elle sera donc déterminée si l'on en a un point, le point milieu par exemple. Or celui-ci est à l'intersection de cd et de kd, ces deux droites étant en direction symétriques de cm_1 et de km_1 par rapport à oz. La droite $a_1 b_1$ étant menée, je prendrai ses

points d'intersection a_1 et b_1 avec le cercle, je mènerai les parallèles de ces points, et je prendrai leur intersection avec mk, ce qui me donnera les points cherchés a et b.

La même construction est applicable dans le cas où la courbe méridienne du tore est une conique quelconque ayant un de ses axes parallèle à oz.

Revenons au cas du cercle, et remarquons que la construction que nous avons donnée peut être simplifiée. Menons, en effet, l'autre asymptote kt de l'hyperbole. Prolongeons la tangente en m_1 et la sécante $a_1 b_1$ jusqu'à leurs points de rencontre p et t, q et r avec les asymptotes. Le quadrilatère $pqtr$ est inscriptible dans un cercle ayant pour centre le point c. La construction reviendra donc à décrire un cercle du point c comme centre avec ot pour rayon et à joindre les deux points d'intersection q et r de ce cercle avec le système des asymptotes. Cette construction me donne la droite $a_1 b_1$. On achèvera comme précédemment la détermination des points a et b.

Note sur l'épure du conoïde; par M. Cahen, élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 23 février 1876.)

Étant donné un conoïde, ayant pour plan directeur le plan horizontal, une droite directrice D *quelconque et un cercle directeur* O *dans le plan vertical de projection, trouver l'ombre portée du conoïde sur lui-même.*

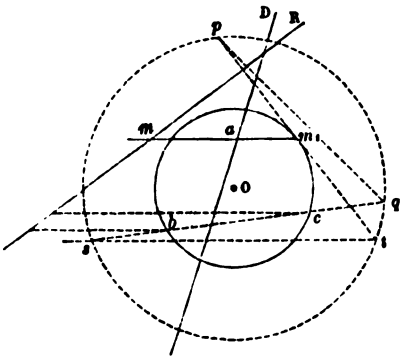
Soit un point m de l'ombre propre, situé sur la génératrice mam_1. Pour avoir l'ombre portée par ce point, je considère un paraboloïde de raccordement le long de la génératrice, et ayant pour plan directeur le plan horizontal, pour génératrices la droite D et le rayon lumineux Rm. Ce paraboloïde coupe le conoïde donné suivant deux autres génératrices, sur lesquelles sont situés les points cherchés et que nous allons déterminer. Pour cela, je coupe les deux surfaces par le plan vertical de projection. La section dans le conoïde est le cercle O et dans le paraboloïde une hyperbole tangente au cercle au point m_1. Nous sommes donc ramenés, comme

dans l'épure du tore, à trouver l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole tangente en un point donné.

Nous connaissons les directions asymptotiques de cette hyperbole; il suffirait donc d'en avoir un point pour appliquer une construction déjà donnée.

Les directions asymptotiques sont les traces sur le plan vertical des deux plans directeurs. L'une d'elles est donc la ligne de terre. Cherchons un point de l'asymptote correspondante. Pour cela, remarquons que, si nous coupions le paraboloïde par une série de plans horizontaux, nous obtiendrions des génératrices dont les traces seraient sur l'hyperbole en question. Une de ces génératrices aura sa trace à l'infini, au moment où le plan auxiliaire passera par la parallèle au plan vertical qui rencontre les deux droites D et R*m*. Or projetons ces deux droites sur un plan de profil, et le point de rencontre de ces projections sur le plan vertical : l'asymptote passera par ce dernier point.

Supposons cette asymptote *st* déterminée. Je mène la tangente

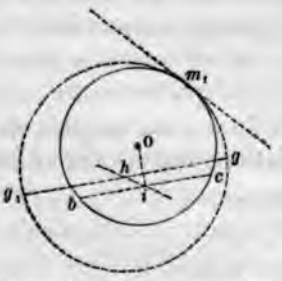


Ombre portée par le conoïde sur lui-même. — Projection verticale.

$m_1 t$ au cercle. Du point O comme centre, avec O*t* comme rayon, je décris un cercle et, par son point de rencontre *p* avec la tangente, je mène *pq* parallèle à la seconde direction asymptotique. En joignant *sq*, j'obtiens les points cherchés *b* et *c*. Je mène, par *b* et *c*, des parallèles à la ligne de terre, et je prends leur point de rencontre avec R*m*.

Il peut arriver que la section du paraboloïde par le plan vertical

soit parabolique, ce qui aura lieu toutes les fois que le rayon lumineux et la droite directrice D seront parallèles à un plan parallèle lui-même à la ligne de terre. On sera alors ramené à chercher l'intersection d'un cercle et d'une parabole tangente à ce cercle. La parabole pourra être considérée comme déterminée par ce point m_1 avec sa tangente, la direction de l'axe, qui sera la ligne de terre, et un point quelconque, la trace g de la droite D par exemple. Nous ferons alors passer par le point g un cercle tangent au premier en m_1. Nous mènerons par g une corde gg_1 parallèle à la direction



Intersection d'une parabole et d'un cercle tangent.

symétrique de $m_1 t$ par rapport à la ligne de terre. Par h, milieu de cette corde, nous mènerons une droite parallèle à la ligne de terre, et, du point O, nous abaisserons une perpendiculaire sur gg_1. Par le point i d'intersection, nous ferons passer une parallèle à gg_1 qui rencontrera le cercle aux points b et c cherchés.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU MERCREDI 3 NOVEMBRE 1875,

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Archer Hirst, directeur de l'École navale de Greenwich (Angleterre); Jung, professeur à l'Institut technique de Milan

(Italie); Laquière, capitaine d'artillerie, à Rennes; Claude-Lafontaine, ancien élève de l'École polytechnique, à Paris; Maurice Cabart, garde général des forêts, à Paris; H. Lez, à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur le papyrus géométrique Rhind du Musée britannique*, et *Sur un icosaèdre du Musée égyptien du Louvre*.

M. Fouret fait à la Société une communication *Sur la transformation de contact des systèmes des courbes*.

M. Halphen présente quelques observations à ce sujet.

SÉANCE DU MERCREDI 17 NOVEMBRE 1875,

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN.

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Fouret complète la communication faite par lui dans la séance précédente.

M. Halphen présente quelques observations à ce sujet.

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur la transformation de la loi de Bode et sur les caractéristiques numériques dans le système planétaire*.

M. Jordan fait à la Société une communication *Sur la résolution d'un système d'équations indéterminées du premier degré*.

M. de Polignac présente quelques observations au sujet de la communication précédente.

M. Halphen fait à la Société une communication *Sur une application des fractions continues à la Géométrie*.

SÉANCE DU MERCREDI 1er DÉCEMBRE 1875,

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN.

Est présenté, comme nouveau membre, M. de Comberousse, professeur à l'École centrale, à Paris.

M. Picquet fait à la Société une communication *Sur une surface remarquable du huitième degré.*

M. Halphen fait à la Société une communication *Sur la conservation du genre des courbes planes algébriques dans les transformations uniformes.*

SÉANCE DU MERCREDI 15 DÉCEMBRE 1875,

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE.

M. de Comberousse est élu membre de la Société.

M. Chasles fait hommage à la Société de la réimpression de l'*Aperçu historique.*

La Société vote à l'unanimité des remercîments à M. Chasles, avec inscription au procès-verbal.

M. le comte Léopold Hugo communique à la Société une note ***Sur le triangle de Shang-Kao,*** et une note ***Sur la géométrie pan-imaginaire à*** $\frac{l}{m}$ ***dimensions.***

M. Halphen communique à la Société un procédé uniforme pour trouver les points d'une courbe algébrique à singularités quelconques dont les coordonnées et leurs dérivées satisfont à une équation de la forme $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$.

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Brocard, d'une *Note sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes.*

SÉANCE DU MERCREDI 29 DÉCEMBRE 1875,

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM.

Le secrétaire annonce que M. Bienaymé s'est fait inscrire comme *sociétaire perpétuel.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur l'arithmétique pan-imaginaire et sur la correspondance des n dimensions d'une part et des bases numérales à n chiffres d'autre part.*

M. Catalan annonce à la Société la publication récente d'une Table de logarithmes à 17 décimales, ayant 26 pages et se rapportant à tous les nombres jusqu'à 430 millions.

M. le comte Léopold Hugo présente à ce sujet quelques observations relatives aux travaux antérieurs de M. Koralek.

M. Halphen fait une communication *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré.*

M. Catalan fait une communication *Sur une série employée par Legendre pour la démonstration de l'incommensurabilité de* π.

M. Halphen ajoute quelques mots à ce sujet.

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur le signe de la division chez les anciens Égyptiens.*

SÉANCE DU MERCREDI 12 JANVIER 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE.

Le secrétaire donne lecture d'une lettre de M. Bienaymé, qui, frappé d'une grave maladie au moment où la Société l'élisait président, et à peine remis aujourd'hui, fait parvenir à la Société ses remercîments en même temps que ses regrets de n'avoir pu présider au moins une des séances.

La Société procède, par la voie du scrutin, au remplacement des membres sortants du bureau et du conseil, qui se trouvent ainsi constitués :

Président honoraire	M. CHASLES.
Président	M. DE LA GOURNERIE.
Vice-Présidents	M. MANNHEIM. M. RESAL. M. DARBOUX. M. ROUCHÉ.
Secrétaires	M. BRISSE. M. LAGUERRE.
Vice-Secrétaires	M. FOURET. M. DE SAINT-GERMAIN.
Trésorier	M. ANDRÉ (Désiré).
Archiviste	M. HOUBIGANT.

Membres du Conseil.....	M. BIENAYMÉ. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. CHASLES. M. COLLIGNON. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LEMONNIER. M. LEVY (Maurice). M. DE POLIGNAC. M. PUISEUX.
Membres du Conseil non résidents...	M. AOUST (l'abbé). M. CLAYEUX. M. PARMENTIER. M. WEYR (Émile).

Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation; par M. HALPHEN.

(Séance du 8 mars 1876.)

Les surfaces dont les rayons de courbure principaux en chaque point sont liés par une relation satisfont à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, indépendante de cette relation. Le théorème que je désire démontrer ici consiste en une interprétation géométrique très-simple de cette équation. On obtient ce théorème en substituant aux éléments du troisième ordre de la surface considérée leurs expressions en fonction des éléments du second ordre de la surface lieu des centres de courbure principaux de la première. Pour faire cette substitution, je me servirai de divers résultats que j'ai obtenus dans une note *Sur un point de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 25 janvier 1875).

Soit (M) une surface. Je considère un point M de cette surface et les deux rayons de courbure principaux A, L en ce point. Soient

$$d\left(\frac{1}{A}\right) = A\,dx + B\,dy, \quad d\left(\frac{1}{L}\right) = C\,dx + D\,dy$$

les différentielles totales des inverses de ces rayons de courbure.

L'équation aux dérivées partielles, qui exprime que A et L sont liées par une relation, peut s'écrire

$$(1) \qquad AD - BC = 0.$$

Pour employer les mêmes notations que dans ma note précitée, je désigne par μ et m les deux centres de courbure principaux de (M) au point M. La surface des centres de courbure principaux étant appelée abréviativement la *développée*, μ et m sont les points *associés* de cette développée qui correspondent à M. Je désigne par ρ_1, ρ_2 et par r_1, r_2 les rayons de courbure principaux de la développée en μ et m, et enfin par τ et t les courbures des sections normales faites dans la développée en μ et m par les plans des sections principales de (M) dont les rayons de courbure sont respectivement A et L. Avec ces notations, et en prenant pour axes la normale et les tangentes principales de (M) en M, j'ai, suivant la note précitée, les formules suivantes :

$$(2) \quad A = \frac{1}{t A^3}, \quad B = -\frac{(L-A)^2}{t r_1 r_2 A^2 L}, \quad C = -\frac{(A-L)^2}{\tau \rho_1 \rho_2 L^2 A}, \quad D = \frac{1}{\tau L^3}.$$

Ces expressions portées dans (1) donnent

$$(3) \qquad r_1 r_2 \rho_1 \rho_2 = (L-A)^4.$$

Ainsi :

Théorème. — *Soit* (M) *une surface dont les rayons de courbure principaux en chaque point sont liés par une relation; soient* m, μ *les centres de courbure principaux relatifs à un même point de* (M). *Le produit des quatre rayons de courbure principaux de la surface lieu des points* m, μ *en deux points associés est constamment égal à la quatrième puissance de la distance de ces points.*

Telle est la proposition que j'avais en vue d'établir. Elle devient illusoire pour deux cas particuliers : les cas où (M) est une surface de révolution ou une surface développable. Voici maintenant une remarque. Dans la note déjà citée, j'ai indiqué, pour une surface du second degré, les relations

$$\rho_1 \rho_2 = -3(L-A)^2 \frac{A}{L}, \quad r_1 r_2 = -3(A-L)^2 \frac{L}{A}.$$

On en conclut

$$(4) \qquad r_1 r_2 \rho_1 \rho_2 = 9(L - A)^4.$$

Les équations (3) et (4) sont incompatibles. On en conclut que, parmi les surfaces du second degré, les cylindres, les cônes et les surfaces de révolution sont les seules dont les rayons de courbure principaux en chaque point soient liés par une relation. On sait aussi qu'il existe, en général, sur une surface quelconque, des points en lesquels cette surface a un contact du troisième ordre avec chaque surface du second degré d'un certain faisceau. Par suite, si les rayons de courbure principaux en chaque point de la surface considérée sont liés par une relation, ce faisceau se compose de cylindres, de cônes ou de surfaces de révolution.

Toute équation aux dérivées partielles peut être considérée à deux points de vue : comme définissant une famille de surfaces ou comme définissant un lieu de points sur une surface. A ce second point de vue, l'équation (1) définit, sur une surface quelconque, un lieu de points dont on peut demander la propriété géométrique commune. Je vais l'indiquer succinctement.

En chaque point d'une surface, il existe une direction dans laquelle une des courbures principales est stationnaire, et une seconde direction dans laquelle l'autre courbure principale est également stationnaire. En tout point pour lequel la relation (1) est satisfaite, ces deux directions coïncident. J'ajoute qu'aux points correspondants sur la développée, la relation (3) a également lieu, et enfin que ce lieu de points n'existe pas sur les surfaces du second degré.

Sur une formule de la théorie des surfaces; par M. Ch. Brisse.

(Séance du 22 mars 1876.)

Soient

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

les équations d'une surface, et supposons qu'on en déduise pour le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = E^2 du^2 + G^2 dv^2.$$

Soient, en outre, M, N, P, Q, R, S six fonctions de u et de v assujetties à vérifier les équations de Codazzi :

$$\frac{dE}{dv} + GM = 0, \quad \frac{dM}{dv} - \frac{dN}{du} = RS - PQ,$$

$$\frac{dG}{du} - EN = 0, \quad \frac{dP}{dv} - \frac{dS}{du} = MQ - RN,$$

$$ES + GR = 0, \quad \frac{dR}{dv} - \frac{dQ}{du} = NP - MS.$$

Si l'on considère un trièdre trirectangle formé par les tangentes aux courbes $v =$ const., $u =$ const., et par la normale à la surface, et un second trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe tracée sur cette surface et coupant sous un angle i les courbes $v =$ const., M. Laguerre a montré qu'en écrivant que la position des deux trièdres était déterminée à tout instant, on en concluait trois relations distinctes contenant le rayon de courbure ρ, le rayon de torsion r, et l'angle ϖ de la normale principale à la courbe et de la normale à la surface :

$$d\varpi - \frac{ds}{r} = (P\,du + S\,dv)\sin i + (R\,du + Q\,dv)\cos i,$$

$$\frac{\cos\varpi}{\rho}\,ds = (P\,du + S\,dv)\cos i - (R\,du + Q\,dv)\sin i,$$

$$-\frac{\sin\varpi}{\rho}\,ds = di + M\,du + N\,dv,$$

l'angle i étant lié à u et à v par les formules

$$ds\cos i = E\,du, \quad ds\sin i = G\,dv.$$

Ces trois relations vont nous donner également trois relations entre certains éléments de deux courbes tangentes en un point et tracées sur une même surface. Éliminons en effet du et dv, M et N, elles deviennent

$$(1)\quad EG\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right) = ES\sin^2 i + (GP + EQ)\sin i\cos i + GR\cos^2 i,$$

$$(2)\quad EG\frac{\cos\varpi}{\rho} = GP\cos^2 i + (ES - GR)\sin i\cos i - EQ\sin^2 i,$$

$$(3)\quad EG\frac{\sin\varpi}{\rho} = -EG\frac{di}{ds} + \frac{dE}{dv}\cos i - \frac{dG}{du}\sin i.$$

De la première on conclut, pour deux courbes Σ et Σ' issues d'un même point sur une même surface et tangentes entre elles, puisque le second membre ne dépend que de $\sin i$ et $\cos i$,

$$(4) \qquad \frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{1}{r'} = \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r};$$

c'est la formule de M. Ossian Bonnet.

De la deuxième on conclut de la même manière

$$(5) \qquad \frac{\cos\varpi'}{\rho'} = \frac{\cos\varpi}{\rho};$$

c'est le théorème de Meusnier.

De la troisième on conclut enfin

$$(6) \qquad \frac{\sin\varpi'}{\rho'} + \frac{di'}{ds'} = \frac{\sin\varpi}{\rho} + \frac{di}{ds},$$

d'où l'on tire, comme nous allons le faire voir, la formule de M. Laguerre.

Différentions, en effet, l'équation (2), et, tenant compte de l'équation (1), isolons les termes qui ne dépendent que de $\sin i$ et de $\cos i$, nous en conclurons

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\left(\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{1}{r'}\right)\frac{di'}{ds'} - \frac{\sin\varpi'}{\rho'}\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{\cos\varpi'}{\rho'}\frac{d\rho'}{\rho' ds'} \\ & \quad = 2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)\frac{di}{ds} - \frac{\sin\varpi}{\rho}\frac{d\varpi}{ds} - \frac{\cos\varpi}{\rho}\frac{d\rho}{\rho ds}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions membre à membre les équations (4) et (6), et retranchons de l'équation (7) le double du résultat obtenu, nous aurons

$$(8) \quad \frac{\sin\varpi'}{\rho'}\left(3\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{2}{r'}\right) + \frac{\cos\varpi'}{\rho'}\frac{d\rho'}{\rho' ds'} = \frac{\sin\varpi}{\rho}\left(3\frac{d\varpi}{ds} - \frac{2}{r}\right) + \frac{\cos\varpi}{\rho}\frac{d\rho}{\rho ds}.$$

Multiplions enfin membre à membre les équations (5) et (8), et nous aurons la formule cherchée

$$\operatorname{tang}\varpi'\left(3\frac{d\varpi'}{ds'} - \frac{2}{r'}\right) + \frac{d\rho'}{\rho' ds'} = \operatorname{tang}\varpi\left(3\frac{d\varpi}{ds} - \frac{2}{r}\right) + \frac{d\rho}{\rho ds}.$$

Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis; par M. H. Léauté.

(Séance du 8 mars 1876.)

Le but de ce travail est d'indiquer un perfectionnement de la méthode de Willis, pour le tracé des engrenages par arcs de cercle.

Ce nouveau procédé conduit, pour la forme de la dent, à une approximation qui est de beaucoup supérieure à celle que donne le procédé de Willis, et cela sans modifier les opérations à effectuer, sans exiger la moindre complication dans les calculs; l'odontographe est conservé, son angle seul est changé.

Le présent Mémoire est divisé en deux parties : dans la première, je chercherai quel est le cercle qui, dans une étendue déterminée, épouse le mieux la forme de la dent; dans la seconde, je remplacerai le cercle de Willis par un autre cercle plus avantageux, mais assujetti à cette condition de donner lieu à une suite d'opérations exactement de même nature que celles du tracé de Willis.

PREMIÈRE PARTIE.

RECHERCHE DU CERCLE QUI DIFFÈRE LE MOINS POSSIBLE D'UN ARC D'ÉPICYCLOÏDE DANS LE VOISINAGE DE SON POINT DE REBROUSSEMENT.

Je remarque d'abord que, dans le voisinage de son point de rebroussement, l'épicycloïde diffère très-peu d'une développante de cercle, c'est-à-dire que le contact entre l'épicycloïde et la développante osculatrice est d'un ordre supérieur à celui du contact ordinaire d'une courbe avec son cercle osculateur. L'écart entre les deux courbes sera encore diminué si l'on considère un arc fini, mais petit, et que, au lieu de la développante osculatrice au point de rebroussement, on prenne une développante tangente à l'épicycloïde en ce point et ayant même rayon de courbure moyen dans les deux parties qui doivent être substituées l'une à l'autre.

Je considérerai donc désormais une développante de cercle, me réservant, lorsqu'il s'agira d'une épicycloïde, de déterminer les élé-

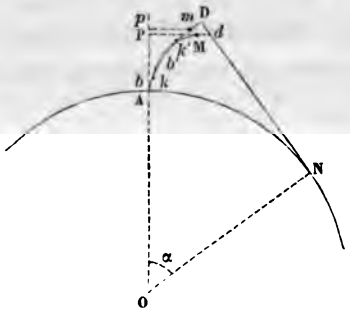
ments de la développante par les éléments moyens de l'épicycloïde.

Soient Abb'D la portion de la développante considérée, R le rayon du cercle, α l'angle de l'élément situé en D avec le rayon AO, s la longueur de l'arc AD; on a

$$s = R\frac{\alpha^2}{2}.$$

La courbure de la développante allant constamment en diminuant à partir de A, on peut toujours trouver un cercle tel que Ad qui, partant de A, coupe la développante en deux autres points k et k' situés entre A et D. La distance des deux courbes aura donc deux maximums, l'un en b, l'autre en b'; ce sont deux maximums ordinaires, c'est-à-dire que la dérivée de la distance des deux courbes s'y annule. Il y aura, en outre, un maximum absolu en D, à l'extrémité de l'arc considéré.

Le cercle le plus avantageux sera celui pour lequel les deux plus



grands de ces maximums seront égaux; car, si cette condition n'était pas remplie, on pourrait tracer un autre cercle différant moins de la courbe que le cercle donné.

Cela posé, soient α_0, α'_0, α_1 les valeurs de α aux maximums b, b', D; ρ, ρ_0, ρ'_0, ρ_1 les rayons de courbure de la développante aux points α, α_0, α'_0, α_1; posons

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = x, \quad \frac{\alpha'_0}{\alpha_0} = x', \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = x_1.$$

Nommons β l'angle d'un élément quelconque du cercle qui doit

remplacer la développante avec la ligne AO, et représentons un point du cercle par l'angle β correspondant.

Puisque le point b est un maximum de distance pour les deux courbes, la normale en b à la développante est aussi normale au cercle; le centre de ce cercle est donc sur le rayon de courbure ρ_0 en b. Soit $\rho_0 \varepsilon$ le rayon.

Les angles α et β sont toujours petits, de sorte que l'on peut prendre, pour mesure de l'écart des deux courbes, la différence des ordonnées menées perpendiculairement à AO; de plus, comme ces courbes se suivent de près, on pourra, au degré d'approximation que comporte la question, comparer les points qui sont à une même distance de A, ces distances étant comptées sur les arcs de courbe.

L'ordonnée mp de la développante est

$$\int_0^{\alpha} \sin\alpha \, ds,$$

ou, si l'on veut, à cause de la petitesse de α,

$$\int_0^{\alpha} \alpha \, ds = \frac{2}{3} s_0 \alpha_0 x^3 \quad (^1).$$

L'ordonnée MP du cercle est de même

$$\int_0^{s} \beta \, ds = s_0 \alpha_0 \left(x^2 - \frac{x^3}{2\varepsilon} + \frac{x^4}{4\varepsilon}\right) \quad (^2).$$

La différence des ordonnées mesurant l'écart des deux courbes est donc

$$z = \frac{s_0 \alpha_0}{12} \left(\frac{3x^2 - 6}{\varepsilon} - 8x + 12\right) x^2.$$

---

(1) Car on sait que

$$s = \frac{R\alpha^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\alpha_0} = x;$$

par suite,

$$\int_0^{\alpha} \alpha \, ds = \int_0^{\alpha} R\alpha^2 \, d\alpha = \int_0^{x} R\alpha_0^2 x^2 \, dx = R\alpha_0^2 \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3} s_0 \alpha_0 x^3.$$

(2) On a, en effet,

$$\beta = \alpha_0 + \frac{s - s_0}{\rho_0 \varepsilon} = \alpha_0 \frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon} + \frac{s}{\rho_0 \varepsilon} = \alpha_0 \left(\frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon} + \frac{s}{R\varepsilon\alpha_0^2}\right);$$

Si l'on annule la dérivée de z, on trouve pour racines

$$x = 1, \quad x = 2\varepsilon - 1,$$

ce qui donne

$$\text{pour } x = 1, \qquad \alpha = \alpha_0, \quad z - z_0 = s_0 \alpha_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\varepsilon}\right),$$

$$\text{pour } x = 2\varepsilon - 1, \quad \alpha = \alpha'_0, \quad z - z'_0 = s_0 \alpha_0 (2\varepsilon - 1)^3 \frac{2 - (2\varepsilon - 1)}{12\varepsilon}.$$

Il suffit maintenant, pour obtenir le cercle cherché, d'exprimer que le maximum absolu z_1 à l'extrémité de l'arc est égal au plus grand des deux nombres z_0 et z'_0.

La donnée immédiate du problème est s_1, longueur de l'arc considéré, et $m_1 p_1$, ordonnée de l'extrémité de cet arc; mais on voit qu'on arrivera à la solution en supposant s_0 ou α_0 donné et cherchant, parmi les cercles tels que z_1 soit égal à z_0 ou z'_0, celui pour lequel l'erreur relative $\frac{z_1}{m_1 p_1}$ est la plus petite possible.

On opérera donc de la manière suivante :

α_0 étant supposé constant, on tracera une suite de cercles passant par le point A et ayant leurs centres sur la normale au point b correspondant à α_0; chacun de ces cercles sera supposé terminé au point s_1 tel que z_1 soit égal à la plus grande des deux quantités z_0 et z'_0; on cherchera ensuite celui pour lequel $\frac{z_1}{m_1 p_1}$ est le plus petit.

Cette manière d'opérer a ce grand avantage qu'elle n'introduit qu'un seul paramètre variable ε, au lieu de deux que l'on aurait eus en abordant le problème directement.

Il est bien entendu d'ailleurs que, lorsque je dis qu'on tracera une suite de cercles, il ne s'agit pas d'un tracé graphique, mais bien du calcul de leurs ordonnées successives ou plutôt du calcul de

---

d'où il résulte

$$\int_0^s \beta\, ds = \alpha_0 \left(\frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon} s + \frac{s^2}{2 R \varepsilon \alpha_0^2}\right) = \frac{\alpha_0}{2\varepsilon}\left[(2\varepsilon - 1)\frac{R \alpha_0^2 x^2}{2} + R \frac{\alpha_0^2 x^4}{4}\right]$$
$$= \frac{R \alpha_0^2}{4\varepsilon}\left[(2\varepsilon - 1)x^2 + \frac{x^4}{2}\right] = s_0 \frac{\alpha_0}{2\varepsilon}\left[(2\varepsilon - 1)x^2 + \frac{x^4}{2}\right] = s_0 \alpha_0 \left(x^2 - \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{x^4}{4\varepsilon}\right).$$

C. Q. F. D.

l'écart z. Ce qui va suivre prouvera que ce calcul n'est pas auss long qu'on pourrait le croire.

Puisque α_0 est le maximum le plus rapproché de A, les seuls cercles que nous ayons à considérer sont ceux pour lesquels

$$\alpha'_0 > \alpha_0,$$

c'est-à-dire

$$2\varepsilon - 1 > 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\varepsilon} < 1.$$

Calculons d'abord les z correspondant à $\varepsilon = 2$, et posons

$$z = \frac{s_0 \alpha_0}{12} y,$$

en représentant par y la quantité

$$y = \left(\frac{3x^2 - 6}{\varepsilon} - 8x + 12\right) x^2.$$

Nous verrons qu'il est ensuite facile de conclure de ce calcul la valeur de z pour une autre valeur de ε.

Dans le cas de $\varepsilon = 2$,

$$y = \left(\frac{3}{2} x^2 - 8x + 9\right) x^2.$$

La fonction entre crochets se calcule rapidement par la méthode des différences; nous avons réuni dans le tableau suivant les différentes valeurs de y correspondant à des valeurs de x comprises entre 1 et 3 :

x.	$\frac{3}{2}x^2 - 8x + 9$.	Δ.	Δ^2.	y.
1,0	2,500	— 0,485	0,03	2,500
1,1	2,015	— 0,455	»	2,438
1,2	1,560	— 0,425	»	2,246
1,3	1,135	— 0,395	»	1,918
1,4	0,740	— 0,365	»	1,450
1,5	0,375	— 0,335	»	0,844
1,6	0,040	— 0,305	»	0,102
1,7	— 0,265	— 0,275	»	— 0,765

x.	$\frac{3}{2}x^2-8x+9$.	Δ.	Δ^2.	y.
1,8	— 0,540	— 0,245	0,03	— 1,749
1,9	— 0,785	— 0,215	»	— 2,834
2,0	— 1,000	— 0,185	»	— 4,000
2,1	— 1,185	— 0,155	»	— 5,226
2,2	— 1,340	— 0,125	»	— 6,486
2,3	— 1,465	— 0,095	»	— 7,750
2,4	— 1,560	— 0,065	»	— 8,986
2,5	— 1,625	— 0,035	»	—10,156
2,6	— 1,660	— 0,005	»	—11,222
2,7	— 1,665	+ 0,025	»	—12,138
2,8	— 1,640	+ 0,055	»	—12,858
2,9	— 1,585	+ 0,085	»	—13,330
3,0	— 1,500	+ 0,115	»	—13,500

Il faut maintenant calculer les valeurs de y correspondant à d'autres cercles, c'est-à-dire à d'autres valeurs de ε.

Or il est évident que, pour une même valeur de x et pour des valeurs de $\frac{1}{\varepsilon}$ croissant en progression arithmétique, les y diffèrent par une quantité constante et égale à $x^2(3x^2-6)$ si $\Delta\frac{1}{\varepsilon}=1$.

Le tableau suivant donne les valeurs de ces différences pour des valeurs de x comprises entre 2 et 3 :

x.	$3x^2-6$.	Δ.	Δ^2.	$x^2(3x^2-6)$.
2,0	6,00	1,23	0,06	24,000
2,1	7,23	1,29	»	31,884
2,2	8,52	1,35	»	41,237
2,3	9,87	1,41	»	52,212
2,4	11,28	1,47	»	64,973
2,5	12,75	1,53	»	79,687
2,6	14,28	1,59	»	96,533
2,7	15,87	1,65	»	115,692
2,8	17,52	1,71	»	137,357
2,9	19,23	1,77	»	161,724
3,0	21,00	1,83	»	189,500

La détermination de x_1, et par suite celle de z_1, pourra se faire par

un tracé graphique [1]. On commencera par construire à une échelle suffisante la courbe des y ayant x pour abscisse, relative au cas de $\frac{1}{\varepsilon} = 0,5$, ce qui se fait par le premier tableau. On en déduit ensuite autant d'autres cercles que l'on veut à l'aide du deuxième tableau. Cette opération est aisée, car il suffit de prendre sur chaque ordonnée, à partir de la courbe initiale, une série de points équidistants; la distance de ces points sera le centième des chiffres portés sur le deuxième tableau si l'on veut tracer les courbes relatives à des valeurs de $\frac{1}{\varepsilon}$ différentes de $\frac{1}{100}$.

Ces courbes une fois tracées, on calcule les valeurs de y relatives aux deux maximums à l'aide des formules

$$y_0 = 4 - \frac{3}{\varepsilon}, \quad y'_0 = (2\varepsilon - 1)^3 \left(\frac{3}{\varepsilon} - 2\right),$$

et l'on cherche sur chaque courbe le point x_1 pour lequel y_1 est égal à la plus grande des valeurs précédentes.

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus pour quatre valeurs de $\frac{1}{\varepsilon}$ différant de $\frac{1}{100}$ et comprenant la valeur inconnue de x_1 :

$\frac{1}{\varepsilon}$.	y_0.	y'_0.	x_1.
0,59	2,23	3,14	2,985
0,60	2,20	2,54	2,880
0,61	2,17	2,05	2,790
0,62	2,14	1,54	2,720

La quantité qui doit être minimum est $\frac{z_1}{m_1 p_1}$; or z_1 est proportionnel à y_1 et $m_1 p_1$ est proportionnel à x_1^3; si l'on calcule la valeur

---

[1] On n'a fait figurer dans le tableau ci-dessus que les valeurs de x supérieures à 2, car on cherche la valeur x_1 pour laquelle z_1 est égal au plus grand des deux nombres z_0 et z'_0; or cette valeur est forcément très-supérieure à l'abscisse du point d'intersection de la développante et du cercle situé le plus près de A, lequel point, étant à peu près symétrique de A par rapport à b, a son abscisse dans les environs de 2.

de $\frac{y_1}{x_1^3}$, on trouve

$\frac{1}{\varepsilon}$.	y_1.	$\frac{y_1}{x_1^3}$.
0,59	3,14	0,1180
0,60	2,54	0,1063
0,61	2,17	0,0999
0,62	2,14	0,1064

Le maximum cherché correspond donc à une valeur de $\frac{1}{\varepsilon}$ comprise entre 0,60 et 0,62 et voisine de 0,61.

Avant d'aller plus loin, il est bon de s'assurer que, lorsqu'on augmente x_1, l'erreur relative $\frac{y_1}{x_1^3}$ va en augmentant. Or cette erreur est proportionnelle à

$$\frac{3x_1}{\varepsilon} + \left(12 - \frac{6}{\varepsilon}\right)\frac{1}{x_1} - 8,$$

quantité dont le minimum est donné par

$$x_1 = \sqrt{4\varepsilon - 2}.$$

Cette valeur de x_1 est réelle lorsque ε est plus grand que 0,5, ce qui est le cas actuel. A partir de ce minimum, la fonction est constamment croissante avec x_1; or ici ε est plus petit que $\frac{1}{0,6}$ ou, si l'on veut, que 1,7; le minimum a donc lieu pour une valeur de x_1 plus petite que 2,2, c'est-à-dire inférieure à la plus petite des valeurs inscrites dans le tableau ci-dessus; par suite, quand x_1 augmente, l'erreur relative $\frac{y_1}{x_1^3}$ va bien en augmentant, ce qui est nécessaire pour que la solution trouvée réponde à la question.

On peut calculer avec plus d'approximation la valeur de ε qui correspond au minimum en faisant passer une parabole dont l'axe est parallèle à Oy par les trois points

$$x = 0,60, \quad x = 0,61, \quad x = 0,62,$$
$$y = 0,1063, \quad y = 0,0999, \quad y = 0,1064,$$

et cherchant le point le plus bas de cette parabole.

On trouve alors

$$\frac{1}{\varepsilon} = 0,609,$$

d'où il résulte

$$\varepsilon = 1,642, \quad x_1 = 2,78, \quad \frac{1}{x_1} = 0,36,$$

valeurs qui conduisent à la règle suivante :

Pour remplacer par un cercle une épicycloïde ou une développante dans une portion Ad voisine de son point de rebroussement A, il faut prendre sur la courbe un point b tel, que l'angle de la normale en ce point avec la normale en A soit les 0,36 de l'angle de la normale en d avec cette même normale en A, mener la normale en b et décrire un cercle ayant son centre sur cette normale, passant par A, et dont le rayon soit égal à $1,642\rho_0$, en désignant par ρ_0 le rayon de courbure en b.

Cette règle permettrait évidemment d'obtenir dans chaque cas particulier le cercle le plus avantageux pour le profil d'une dent; mais cela exigerait quelques raisonnements, et le but que nous nous proposons est d'arriver à un tracé identique, comme opérations à effectuer, au tracé de Willis. La seconde partie de ce travail conduira à ce résultat.

SECONDE PARTIE.

TRACÉ PRATIQUE DES DENTS D'ENGRENAGE PAR ARCS DE CERCLE.

On peut admettre que la saillie des dents en dehors de la circonférence primitive est d'environ les 0,31 du pas. C'est la moyenne des proportions données par les différents auteurs.

On sait aussi que dans les engrenages à épicycloïde, engendrés par le cercle qui a pour rayon $\frac{3a}{\pi}$, a étant le pas, c'est-à-dire dans les engrenages adoptés par Willis, l'amplitude de prise σ_1 est donnée par la formule suivante, si l'on prend le pas pour unité :

$$\sigma_1 = \sqrt{h\frac{1}{\pi}\frac{6N}{N+6}},$$

h étant le rapport entre la saillie des dents et le pas, N le nombre de dents.

La plus petite valeur de N étant 12, on voit que σ_1 varie depuis 0,63 jusqu'à 0,77; l'amplitude de prise est donc, en moyenne, les 0,70 du pas.

Ainsi l'arc Ad de la circonférence primitive déterminé par la normale dD à l'extrémité de la dent peut être regardé comme égal aux 0,70 du pas.

Mais, si je considère un point m quelconque sur le profil de la dent, il est évident que l'arc AM déterminé sur la circonférence primitive par la normale mM en m est proportionnel à l'angle de mM avec la tangente en A à la circonférence primitive, c'est-à-dire à l'angle que nous avons nommé α.

Or il faut trouver un point b tel que l'angle α correspondant soit les 0,36 de celui qui correspond à l'extrémité D; pour cela, il suffit, d'après ce qui précède, de prendre

$$AB = 0,36 A d,$$

et, comme Ad est égal à 0,70a, il en résulte

$$AB = \frac{a}{4}.$$

Il faut maintenant connaitre la normale Bb; or cette normale, interceptant sur le cercle générateur un arc égal à $\frac{1}{24}$ de la circonférence, l'angle de Bb avec la tangente en B à la circonférence primitive est de

$$\frac{360}{48} = 7^\circ 30'.$$

Nous prendrons donc pour angle fixe de l'odontographe 7°30′ au lieu de 15 degrés que prend Willis, et tandis qu'il place le sommet de cet instrument en un point distant de A de $\frac{a}{2}$, nous le placerons au point distant seulement de $\frac{a}{4}$.

Il ne nous reste plus qu'à trouver la grandeur du rayon avec lequel on doit tracer l'arc de cercle. Or nous avons vu que ce rayon

était égal à $1,64\rho_0$, en désignant par ρ_0 le rayon de courbure en b; mais on sait que

$$\rho_0 = \frac{12a}{\pi} \sin \frac{\pi}{24} \left(\frac{N+6}{N+12}\right),$$

c'est-à-dire sensiblement

$$\rho_0 = 0,50 \frac{N+6}{N+12} a.$$

Le rayon du cercle devra donc être

$$a \times 1,64 \times 0,50 \frac{N+6}{N+12} = 0,82 \frac{N+6}{N+12} a.$$

Cette formule est identiquement de même forme que celle de Willis, de sorte que non-seulement les opérations manuelles du tracé, mais encore les calculs, sont les mêmes que dans le procédé de Willis.

Nous n'avons considéré dans tout ce qui précède que la face de la dent; pour passer au tracé du flanc, il suffit de changer N en — N, ce qui donne pour le rayon du cercle

$$0,82 \frac{N-6}{N-12} a.$$

En résumé, voici comment on tracera par le nouveau procédé un engrenage de pas a, à n dents :

1° *Pour la face.* — On prendra un arc AB égal à $\frac{a}{4}$; on mènera par l'odontographe la droite BC faisant avec la circonférence primitive un angle de 7°30′, et l'on décrira un arc de cercle passant par A, ayant son centre sur BC et pour rayon $0,82 \frac{N+6}{N+12} a$;

2° *Pour le flanc.* — On prendra un arc AB′ égal à $\frac{a}{4}$, on mènera B′C′ faisant avec la circonférence primitive un angle de 7°30′, et l'on décrira un arc de cercle passant par A, ayant son centre sur B′C′ et pour rayon $0,82 \frac{N-6}{N-12} a$.

En somme, on fera identiquement la construction de Willis,

mais en remplaçant l'arc $\frac{a}{2}$ par l'arc $\frac{a}{4}$, l'odontographe à 15 degrés par l'odontographe à $7^\circ 30'$, et le rayon de $0{,}50\,\frac{N \pm 6}{N \pm 12}\,a$ par un rayon de $0{,}82\,\frac{N \pm 6}{N \pm 12}\,a$.

Grâce à ces modifications, l'approximation sera considérablement augmentée; on peut s'en rendre compte aisément.

L'écart entre l'épicycloïde et le cercle est, en effet, comme nous l'avons vu,

$$\frac{R\alpha_0^3}{24}\left(\frac{3x^2-6}{\varepsilon} - 8x + 12\right)x_2.$$

Pour comparer le procédé de Willis au procédé proposé, il suffit de comparer dans les deux cas les valeurs de cette quantité.

Les erreurs les plus fortes se produisent dans les deux procédés pour l'extrémité de la dent : c'est ce qui fixe la valeur de x; dans le tracé de Willis, $x = 1{,}4$, $\varepsilon = 1$, $\alpha_0 = \frac{a}{2}$; dans le tracé proposé, $x = 2{,}78$, $\varepsilon = 1{,}642$, $\alpha_0 = \frac{a}{4}$. Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on trouve que l'approximation obtenue est plus de six fois plus forte par le nouveau procédé que par le procédé de Willis.

Sur les courbes du troisième ordre; par M. Laguerre.

(Séance du 3 février 1875.)

1. Soit une cubique fondamentale $U = 0$; en adoptant les notations de M. Salmon (*Higher plane curves*, p. 183 et suiv.), je désignerai par S et T les deux invariants de U, par H son hessien et par F, P et Q ses contrevariants principaux. La hessienne de la courbe aura donc pour équation $H = 0$; l'équation tangentielle de la courbe elle même sera $F = 0$; et l'équation tangentielle de la cayleyenne $P = 0$.

La cubique fondamentale et sa hessienne déterminent un faisceau (U); une courbe quelconque de ce faisceau a pour équation $U + 6\rho H = 0$; je la désignerai par la notation U_ρ.

Je considérerai en même temps le faisceau tangentiel des courbes déterminées par l'équation $F - 6\rho P^2 = 0$, et je désignerai par la notation F_ρ la courbe de ce faisceau qui correspond à une valeur déterminée de ρ.

2. Un système de trois points étant déterminé sur une droite par les racines d'une équation obtenue en égalant à zéro un polynôme du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

j'appellerai *points covariants du système* les points déterminés sur la droite par les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme du second degré

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)x + (bd - c^2)$$

covariant du précédent.

3. Cela posé, on a les propositions suivantes :

I. *Une droite quelconque* D *du plan de* U *rencontrant cette courbe en un système de trois points, les deux points covariants de ce système sont situés sur une même cubique du faisceau* (U).

Cette cubique rencontre D en un troisième point que j'appellerai le *centre de la droite.*

II. *Par tout point* M *du plan passent quatre droites ayant le point* M *pour centre ; je les appellerai les rayons du point* M.

III. *Si, d'un point quelconque* M *de la cubique* U_ρ, *on mène des tangentes à la conique polaire de* M *par rapport à* U, *ces tangentes enveloppent la courbe de sixième classe* F_ρ.

IV. *Des six tangentes que l'on peut mener d'un point* M *de* U *à la courbe* F_ρ, *deux sont les tangentes menées du point* M *à sa conique polaire relativement à* U, *les quatre autres sont les rayons du point* M.

V. *Si une droite se meut tangentiellement à* F_ρ, *son centre décrit la cubique* U_ρ.

VI. *Si une droite touche* F_ρ *au point* A *et rencontre* U_ρ *aux points* a, b, c, *les quatre points* A, a, b, c *forment un système harmonique.*

4. Voici quelques conséquences de cette dernière proposition :

Étant donnée une cubique U, si l'on cherche les courbes jouissant de la propriété qu'une quelconque de leurs tangentes est partagée harmoniquement par leur point de contact et les trois points où elle rencontre la cubique U, on trouve que ces courbes sont algébriques, et il est facile d'en obtenir une construction géométrique [1].

A toute cubique U se rattache en effet une intégrale elliptique $\int dV$ qui jouit de la propriété suivante : Désignons, en général, par (M) la valeur de cette intégrale prise depuis un point convenablement choisi jusqu'à un point M pris arbitrairement sur cette courbe; la condition nécessaire et suffisante pour que trois points A, B, C de la courbe soient en ligne droite peut s'exprimer par la relation

$$(A) + (B) + (C) \equiv 0,$$

le signe de la congruence indiquant que la somme, qui se trouve dans le premier membre, est de la forme $mp + nq$, m et n désignant des nombres entiers, p et q les deux périodes de l'intégrale.

Si une droite tourne autour d'un point A de la courbe, en désignant par B et C les deux points variables où cette droite mobile coupe la courbe, on aura, en vertu de ce qui précède,

$$(A) = 0,$$

et, par suite,

$$(B) + (C) \equiv 0,$$

ce qui donne géométriquement l'intégrale de l'équation

$$dV + dV' = 0.$$

Si maintenant on désigne par A′ le point conjugué harmonique de A relativement à B et C, on voit que la droite, en tournant infiniment peu autour du point A′, décrit sur la courbe deux segments infiniment petits égaux à ceux qu'elle décrivait en tournant autour du point A, l'un de ces segments étant décrit dans un sens contraire.

---

[1] *Voir*, sur ce sujet, ma Note *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, 22 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XV).

On a donc, dans ce cas,

$$dV - dV' = 0,$$

équation dont l'intégrale est $(B) - (C) \equiv 0$.

D'où cette conclusion :

Si une courbe est telle, qu'une quelconque de ses tangentes rencontrant la cubique U *en trois points* A, B, C, *son point de contact soit le conjugué harmonique du point* A *relativement à* B *et à* C, *les points variables* B *et* C *sont reliés par la relation*

$$(B) - (C) \equiv 0.$$

De là encore une construction géométrique simple de ces courbes.

Soient, en effet, b et c deux points fixes pris sur la courbe et M un point mobile décrivant cette courbe. Menons les droites Mb et Mc et appelons B et C les points où elles coupent respectivement U; je dis que la droite BC enveloppe une courbe jouissant de la propriété énoncée. Les trois points M, b, B étant en effet en ligne droite, ainsi que les points M, c, C, on a

$$(M) + (b) + (B) \equiv 0,$$
$$(M) + (c) + (C) \equiv 0;$$

d'où

$$(B) - (C) \equiv (c) - (b) \equiv \text{const.}$$

Il est clair, d'ailleurs, que, pour obtenir toutes les courbes cherchées, il suffit, un des points b étant choisi arbitrairement et restant fixe, de faire varier le point C.

5. Quelque simple que soit la construction géométrique que je viens de donner, elle se prêterait peut-être difficilement à la recherche de l'équation générale des courbes elles-mêmes.

Le théorème VI donné ci-dessus (3) permet d'y arriver facilement.

On voit, en effet, qu'étant donnée une cubique U_ρ, la courbe de sixième classe F_ρ est une solution de la question; or, U_ρ étant une courbe déterminée, comme on peut prendre pour cubique fondamentale une quelconque des cubiques du faisceau (U), on voit

qu'il lui correspond une infinité de courbes F_ρ dont l'ensemble donne la solution complète du problème.

Pour achever la solution, changeons U en $U + 6\lambda H$, λ étant un nombre indéterminé; H, P et F deviennent alors respectivement. (Salmon, *loc. cit.*, p. 189 et suiv.)

$$(-2S\lambda - T\lambda^2 + 8S^2\lambda^2)\,U + (1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^2)\,H,$$
$$P + Q\lambda - 12SP\lambda^2 + 4(SQ - TP)\lambda^3$$

et

$$(1 + 24S\lambda^2 + 8T\lambda^3 - 48S^2\lambda^4)\,F$$
$$- 24(\lambda + 2T\lambda^4)\,P^2 - 24(\lambda^3 - 4S\lambda^4)\,PQ - 8\lambda^3 Q^2;$$

par suite, U_ρ devient

$$U[1 - 2S\lambda - T\lambda^2 + 8S^2\lambda^3] + 6H[\lambda + \rho(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)],$$

ou simplement U, si l'on détermine ρ par la condition

$$\rho = \frac{-\lambda}{1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3}.$$

En effectuant la même transformation dans F_ρ, cette expression devient, réductions faites,

$$(1 + 24S\lambda^2 + 8T\lambda^3 - 48S^2\lambda^4)$$
$$\times[(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)\,F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2];$$

l'équation générale des courbes considérées est donc

$$(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)\,F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2 = 0.$$

Construction de la chaînette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés; par M. G. Jung.

(Séance du 22 mars 1876.)

Il est connu que la chaînette est la courbe diamétrale de deux logarithmiques égales et symétriquement placées autour de son axe de symétrie. Cette propriété peut même servir à la construction

de la chaînette par points, pourvu que les deux logarithmiques soient tracées d'avance.

Je me propose dans cette Note de donner de la chaînette une construction par points qui n'exige la construction effective que de l'une des deux logarithmiques et qui me paraît très-simple. Je donnerai aussi une règle pour la division d'un arc de chaînette en n parties égales et pour la réduction de son aire à une base donnée.

1. Soit

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \tag{1}$$

l'équation de la chaînette rapportée à son axe de symétrie (y) supposé vertical, et à un axe (x) horizontal et distant du point le plus bas A de la courbe, d'un segment égal à c.

Posant

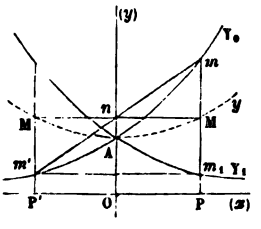
$$y_0 = ce^{\frac{x}{c}}, \quad y_1 = ce^{-\frac{x}{c}}, \tag{2}$$

on aura

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Soient (*fig.* 1) m, m_1 et M les points des logarithmiques (2) et de

Fig. 1.



la chaînette (1) correspondant à la même abscisse $x = \mathrm{OP}$; et soit m' le point de la seconde logarithmique correspondant à l'abscisse $x = -\mathrm{OP} = \mathrm{OP}'$.

On a évidemment $m\mathrm{M} = \mathrm{M}m_1$ [1] et $m'\mathrm{P}' = m_1\mathrm{P}$; et, puisque le

[1] Si s est la longueur de l'arc de chaînette AM, on a évidemment

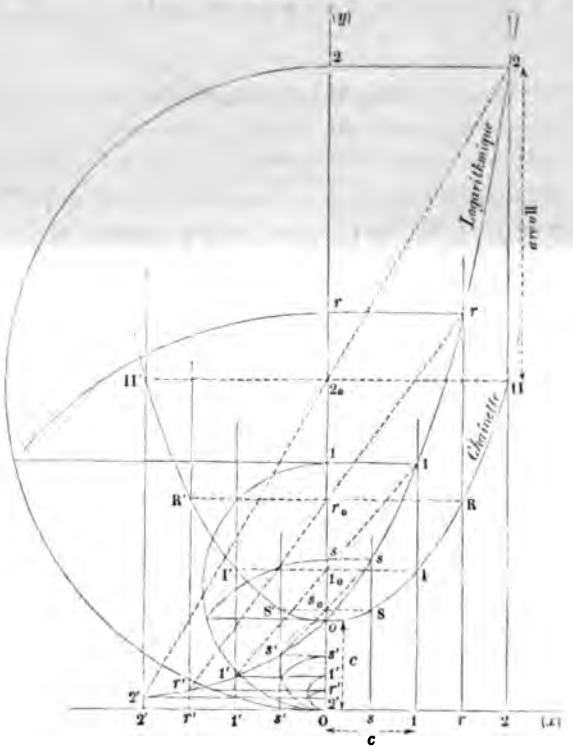
$$s = \frac{y_0 - y_1}{2} = m\mathrm{M} = \mathrm{M}m_1.$$

segment $m'm_1$ est rencontré par l'axe (y) à son point milieu, cet axe (y) rencontrera le segment mm' aussi à son point milieu n, et la droite mM sera parallèle à l'axe (x). Donc :

La corde qui unit deux points m, m' de la logarithmique $y_0 = ce^{\frac{x}{c}}$, correspondant à deux abscisses égales et opposées, rencontre l'axe (y) en un point n qui, projeté horizontalement sur les ordonnées extrêmes de la corde, fournit deux points symétriques M, m *de la chaînette* $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$.

2. Sur ce théorème est fondée la méthode suivante pour la construction de la chaînette par points. Soit O (*fig.* 2) l'intersection

Fig. 2.



des axes rectangulaires (x) et (y); sur (x), des deux côtés de O,

prenons les segments

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \overline{O1} = c, \quad x_2 = \overline{O2} = 2.c, \ \ldots, \quad x_i = \overline{Oi} = i.c,$$
$$x'_1 = \overline{O1'} = -c, \quad x'_2 = \overline{O2'} = -2.c, \ldots, \quad x'_i = \overline{Oi'} = -i.c,$$

et sur (y) les segments

$$y_0 = \overline{Oo} = c, \quad y_1 = \overline{O1} = c.e, \quad y_2 = \overline{O2} = c.e^2, \ldots, \quad y_i = \overline{Oi} = c.e^i,$$
$$y'_1 = \overline{Oi'} = c.e^{-1}, \quad y'_2 = \overline{O2'} = c.e^{-2}, \ldots, \quad y'_i = \overline{Oi'} = c.e^{-i},$$

e étant la base des logarithmes naturels [1].

Construisons les points $m_i\,(x_i, y_i)$ et $m'_i\,(x'_i, y'_i)$ [2], et tirons la corde $\overline{m_i m'_i}$ qui rencontre l'axe (y) au point n_i [3]. Ce point se projette horizontalement sur les ordonnées de m_i et m'_i en M_i et M'_i [4] qui appartiennent à la chaînette.

3. *Interpolation.* — Soient i et $i+1$ les projections sur les axes (x) et (y) des deux points M_i et M_{i+1} ainsi construits de la chaînette, c'est-à-dire soient x_i, y_i et x_{i+1}, y_{i+1} les coordonnées des points de la logarithmique qui ont même abscisse que M_i et M_{i+1}, et que l'on se propose de trouver un autre point M_r de la chaînette compris entre ces deux derniers points [5].

Posons

$$x_r = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad \text{et} \quad y_r = \sqrt{\frac{y_{i+1}}{y_i}};$$

le point r, extrémité de x_r sur (x), sera équidistant des points i et $i+1$; et, y_r étant la moyenne géométrique entre y_i et y_{i+1}, son ex-

---

(1) Pour la construction d'une série de segments égaux aux produits du segment c par les puissances d'un rapport $\frac{m}{n}$, *voir* Culmann, *Die graphische Statik*, 2e édition, p. 15 et suiv., et Cremona, *Elementi di Calcolo grafico*, p. 36 et suiv. Ici il suffit de prendre $m = 2{,}718n$, n étant un segment arbitraire.

(2) Dans la figure, ces points m_i, m'_i sont indiqués simplement par les indices i, i'.

(3) Dans la figure, ce point n_i est indiqué par i_0.

(4) Dans la figure, ces points M_i, M'_i sont indiqués par les indices i, i' en chiffres romains.

(5) Dans la *fig.* 2, on a interpolé les points S (et S') entre O et I (et les symétriques); R (et R') entre I et II (et les symétriques).

trémité r sur (y) sera telle que

$$\overline{Or}^2 = \overline{O.i} \times \overline{O.i+1}.$$

Les x_r, y_r ainsi obtenus sont les coordonnées d'un point m_r de la logarithmique, compris entre m_i et m_{i+1}.

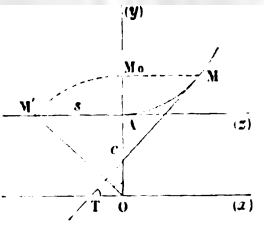
De la même manière on trouve les coordonnées du point m'_r de la logarithmique compris entre m'_i et m'_{i+1} et qui a son abscisse égale et opposée à celle de m_r : la corde $m_r m'_r$ rencontre (y) au point n_r [1] qui, projeté sur les ordonnées de m_r et m'_r, donne un point M_r (et le symétrique M'_r) de la chaînette compris entre M_i et M_{i+1} (M'_i et M'_{i+1} resp.).

4. De l'équation (1) on tire

$$s^2 = y^2 - c^2 \quad \text{et} \quad \frac{s}{c} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Si donc (fig. 3) on fait sur (y) la projection horizontale de

Fig. 3.



M *en* M_0 *et si, avec un cercle de centre* O *et de rayon* $y = OM_0$, *on coupe la droite* (z) (tangente à la courbe en A) *en* M', *on aura*

$$\overline{AM'} = \text{arc. AM}.$$

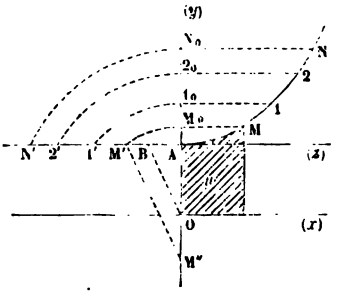
Et si, de M, on tire MT perpendiculaire à OM', *la droite* MT *sera la tangente à la courbe en* M.

---

[1] Dans la figure, ce point n_r est indiqué par r_0.

5. *Division d'un arc* MN *de chaînette en parties proportionnelles à des segments donnés.* — Soient (*fig.* 4) AM′ = arc AM,

Fig. 4.



AN′ = arc AN les segments de (z) déterminés comme précédemment.

Divisons le segment M′N′ en n parties proportionnelles aux segments donnés, et soient $1', 2', \ldots, n' - 1$ les points de division. Avec des circonférences de centre O et des rayons égaux à O1′, O2′, .., resp., coupons (y) aux points $1_0, 2_0, \ldots, n_0, -1$: ces points se projettent horizontalement sur la courbe en 1, $2, \ldots, n - 1$, et ces points divisent l'arc donné MN en n parties proportionnelles aux segments donnés.

6. *Réduction de l'aire de la chaînette à une base donnée b* [1]. — Soit u l'aire comprise entre les axes (x) et (y), la chaînette et l'ordonnée du point M; alors

$$u = cs.$$

Donc le segment $\overline{AM'}$ représente cette aire réduite à la base c.

Si la *base de réduction b* est différente de c, on prendra sur (z) le segment $\overline{AB} = b$, et l'on tirera du point M′ (*fig.* 4) la parallèle à OB qui rencontre (y) en M″. Le segment AM″ représentera évidemment l'aire u réduite à la base b.

---

[1] C'est-à-dire recherche d'un segment f, tel que bf soit égal à cette aire. *Voir* Culmann, *l. c.*, p. 14, 85 et suiv.; Cremona, *l. c.*, p. 50 et suiv.

Note sur les substitutions linéaires; par M. C. de Polignac.

(Séance du 5 avril 1876.)

Si l'on répète indéfiniment la substitution linéaire

$$x_1 = \frac{bx+d}{ax+c}, \quad x_2 = \frac{bx_1+d}{ax_1+c}, \quad \ldots,$$

on aura toujours un résultat de la forme

$$\frac{Qx+S}{Px+R}.$$

L'expression générale de P, Q, R, S, en fonction de a, b, c, d, peut se mettre sous une forme assez simple.

Tout d'abord la nature même de l'opération par laquelle on passe d'une substitution PQRS à la suivante P'Q'R'S' donne

$$P' = bP + aR, \quad R' = dP + cR,$$
$$Q' = bQ + aS, \quad S' = dQ + cS,$$

mais ces formules peuvent se transformer. Je dis qu'on aura, quel que soit le rang de la substitution considérée,

$$\frac{P}{a} = \frac{Q-R}{b-c} = \frac{S}{d}.$$

Admettons le fait jusqu'à P, Q, R, S; les formules précédentes donnent les relations

$$\frac{P'}{a} = b\frac{P}{a} + R, \quad \frac{Q'-R'}{b-c} = \frac{bQ-cR}{b-c}, \quad \frac{S'}{d} = Q + c\frac{S}{d}.$$

Égalant d'abord la première et la troisième, on obtient

$$b\frac{P}{a} + R = Q + c\frac{S}{d} = Q + c\frac{P}{a}$$

par hypothèse, ou

$$(b-c)\frac{P}{a} = Q - R, \quad \frac{P}{a} = \frac{Q-R}{b-c};$$

donc

$$\frac{P'}{a} = \frac{S'}{d}.$$

Quant à la deuxième relation, elle se transforme ainsi

$$\frac{Q' - R'}{b - c} = \frac{(b - c)Q + c(Q - R)}{b - c} = Q + c\frac{S}{d}$$

par hypothèse, ou

$$\frac{Q' - R'}{b - c} = \frac{S'}{d};$$

la généralité est donc établie.

Au moyen de cette remarque, on exprimera P′ et Q′ en fonction de P et Q

$$(1) \qquad P' = aQ + cP, \quad Q' = bQ + dP;$$

R′ et S′ s'obtiendront ensuite en fonction de P′ et Q′.

En général, on aura

$$P_{m+n} = P_m Q_n + R_m P_n, \quad Q_{m+n} = Q_m Q_n + S_m P_n,$$

formules dans lesquelles les indices sont permutables. Pour $m = n$, la première donne

$$P_{2n} = P_n (Q_n + R_n);$$

on trouvera encore

$$(Q'R' - P'S') = (bc - ad)(QR - PS),$$

d'où l'on conclura

$$(2) \qquad Q_n R_n - P_n S_n = (bc - ad)^n,$$

et les propositions suivantes s'établiront de proche en proche.

P_n, Q_n, R_n, S_n sont homogènes et de degré n en a, b, c, d;

P_n contient a en facteur commun et est symétrique par rapport à b et c;

Les lettres a et d n'entrent point seules dans $\frac{P_n}{a}$ et Q_n, mais toujours leur produit;

Q_n et R_n ne diffèrent que par le changement de b en c et *vice versa*.

Enfin de l'équation (2) on tire, pour $c = b$, $d = a$,

$$Q - P_n^2 = (b^2 - a^2)^n;$$

d'où l'on conclura, dans cette hypothèse,

$$Q_n + P_n = (b + a)^n, \quad Q_n - P_n = (b - a)^n.$$

D'ailleurs les formules générales donneront aisément, pour $d = 0$, $c = b$,

$$P_n = nab^{n-1}, \quad Q_n = b^n.$$

L'ensemble de ces remarques nous conduit toujours, dans le cas de $c = b$, aux formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} P_n = a\Big[& nb^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} b^{n-3} ad \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} b^{n-5} a^2 d^2 + \ldots \Big], \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad Q^n = b^n + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2} ad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} b^{n-4} a^2 d^2 + \ldots.$$

Pour avoir l'expression générale de P_n et de Q_n, il suffira de décomposer les coefficients des puissances de ad en fonctions de b et de c, d'après la loi de formation. Ces fonctions seront symétriques dans P_n.

Désignons par la notation

$$(b^m c^{m'})(ad)^k P_n$$

le *coefficient* de $b^m c^{m'}(ad)^k$ dans le développement général de P_n, on aura, eu égard aux formules (1),

$$(5)\qquad (b^m c^{m'})(ad)^k P_n = (b^m c^{m'-1})(ad)^k P_{n-1} + (b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1},$$

$$(6)\qquad (b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1} = (b^{m-1} c^{m'})(ad)^k Q_{n-2} + (b^m c^{m'})(ad)^{k-1} P_{n-2}.$$

Ces formules permettront de conclure de proche en proche les va-

leurs suivantes:

$$(7)\quad (b^m c^{m'})(ad)^k P_n = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{1.2\ldots k}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+k)}{1.2\ldots k},$$

avec $m + m' + 2k + 1 = n$;

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} (b^m c^{m'})(ad)^k Q_n &= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{1.2\ldots k} \\ &\quad \times \frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+k-1)}{1.2\ldots(k-1)}, \end{aligned}\right.$$

avec $m + m' + 2k = n$ (¹).

En effet, admettons (hypothèse qui se justifiera dès les premiers essais) que l'on ait trouvé $(b^m c^{m'})(ad)^{k-1} P_{n-2}$ sous la forme d'un produit d'une fonction de m par une fonction de m', soit $f_{k-1}(m)$ par $f_{k-1}(m')$, fonctions identiques, puisque P est symétrique par rapport à b et c. Observant que m' est constant dans la formule relative à Q_{n-1}, on aura

$$\begin{aligned} (b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1} &= (b^{m-1} c^{m'})(ad)^k Q_{n-2} + f_{k-1}(m) \times f_{k-1}(m'), \\ (b^{m-1} c^{m'})(ad)^k Q_{n-2} &= (b^{m-2} c^{m'})(ad)^k Q_{n-3} + f_{k-1}(m-1) \times f_{k-1}(m'), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (b c^{m'})(ad)^k Q_{n-m} &= (c^{m'})(ad)^k Q_{n-m-1} + f_{k-1}(1) \times f_{k-1}(m'), \\ (c^{m'})(ad)^k Q_{n-m-1} &= f_{k-1}(0) \times f_{k-1}(m'); \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$(b^m c^{m'})(ad)^k Q_{n-1} = f_{k-1}(m') \times \sum_0^m f_{k-1}(m).$$

Remplaçant dans la formule relative à P_n et faisant cette fois varier m' jusqu'à zéro, on trouvera exactement de même, observant qu'ici

---

(¹) P_n et Q_n sont homogènes et de degré n; mais P_n contient a en facteur commun, c'est pourquoi la somme $m + m'$ est moindre dans P_n que dans Q_n.

m est constant,

$$(b^m c^{m'})(ad)^k P_n = \sum_0^m f_{k-1}(m) \times \sum_0^{m'} f_{k-1}(m') = f_k(m) \times f_k(m').$$

On retrouve donc, pour le coefficient du terme général en $(ad)^k$, une expression de la même forme que pour $(ad)^{k-1}$, ce qui permettra de répéter le calcul indéfiniment.

La valeur même de f s'obtiendra en faisant successivement $k=0$ et $k=1$. Le premier cas se traitera directement et de proche en proche au moyen des formules

$$P' = aQ + cP, \quad Q' = bQ + dP,$$

et l'on verra aisément que les termes indépendants de ad sont :

Dans P_n, les termes du développement $\frac{b^n - c^n}{b - c}$;

Dans Q_n, b^n simplement.

En faisant ensuite $k=1$ dans la formule (6), on aura

$$(b^m c^{m'}) ad . Q_{n-1} = (b^{m-1} c^{m'}) ad Q_{n-2} + 1.$$

Faisant varier m jusqu'à zéro dans le premier membre, et ajoutant comme ci-dessus, on obtiendra

$$(b^m c^{m'}) ad Q_{n-1} = m + 1,$$

et, en remplaçant dans la formule (5), on aura de même

$$(b^m c^{m'}) ad P_n = (m+1)(m'+1).$$

On a donc

$$f_1(m) = m + 1;$$

on en conclut, eu égard aux remarques qui précèdent,

$$f_2(m) = \sum^m f_1(m) = \sum_0^m (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2},$$

$$f_3(m) = \sum_0^m f_2(m) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3},$$

d'après les propriétés connues des nombres figurés, et ainsi de suite.

La comparaison des formules (7), (8) avec (3), (4) conduit aux égalités suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m'=0} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{1.2\ldots k}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+k)}{1.2\ldots k} \\ &\quad = \frac{n(n-1)\ldots(n-2k)}{1.2\ldots(2k+1)}, \end{aligned}\right.$$

avec $m+m'+2k+1=n$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m'=0} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{1.2\ldots k}\,\frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+k-1)}{1.2\ldots(k-1)} \\ &\quad = \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{1.2\ldots 2k}, \end{aligned}\right.$$

avec $m+m'+2k=n$.

On peut déduire des formules (7) et (8) une règle extrêmement simple.

La formule (7) donne chaque coefficient de $b^m c^{m'}(ad)^k$ sous forme d'un produit de deux nombres appartenant chacun à la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne horizontale du triangle arithmétique de Pascal, et dont la somme des rangs est constante. Pour faire ce produit, on peut prendre les nombres m sur la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne du triangle, et les nombre m' sur la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne, d'où la règle suivante :

Pour P_n. Écrire horizontalement et verticalement la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal, puis former avec ces nombres une table de multiplication de Pythagore. Les hypoténuses qui joignent les nombres de même rang sur les deux côtés donneront les coefficients, facteurs de $(ad)^k$, dans le développement de P_n, pour toutes les valeurs de n.

Exemple. — Termes en a^2d^2 dans P_n. La troisième ligne du triangle arithmétique est

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \ldots;$$

nous formons le tableau

n							
5	...	1	3	6	10	15	... m'
6	...	3	9	18	30	45	
7	...	6	18	36	60		
8	...	10	30	60			
9	...	15	45				
.	...	..	..				
		m					

et nous aurons, par exemple,

$$P_n = a\left[\frac{b^7 - c^7}{b - c} + (\ldots)\,ad + (6b^2 + 9bc + 6c^2)\,a^2d^2 + \ldots\right].$$

A chaque puissance de ad correspond un tableau distinct qui sert pour toutes les valeurs de n.

La règle pour les termes du développement de Q_n est analogue.

Pour Q_n. Former la table de Pythagore avec la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne et la $k^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal : les hypoténuses donneront les termes facteurs de $(ad)^k$.

Exemple. — Termes en a^2d^2 dans Q_n. Nous prenons la troisième colonne de la deuxième ligne

n						
4	...	1	2	3	4	... m'
5	...	3	6	9	12	
6	...	6	12	18		
7	...	10	20	30		
.	...	..	..	..		
		m				

et nous aurons

$$Q_6 = b_6 + (\ldots)\,ad + (6b^2 + 6bc + 3c^2)\,a^2d^2 + \ldots.$$

Les égalités (9) et (10) expriment que la somme des nombres de chaque hypoténuse dans les deux Tables donne un nombre figuré du triangle arithmétique.

On obtient aisément, par la règle précédente,

$$P_2 = a(b+c), \quad Q_2 = b^2 + ad;$$

$$P_3 = a(b^2 + bc + c^2 + ad),$$

$$Q_3 = b^3 + (2b + c)\,ad;$$

$$P_4 = a\left[\frac{b^4 - c^4}{b - c} + (2b + 2c)\,ad\right],$$

$$Q_4 = b^4 + (3b^2 + 2bc + c^2)\,ad + a^2d^2;$$

$$P_5 = a\left[\frac{b^5 - c^5}{b - c} + (3b^2 + 4bc + 3c^2)\,ad + a^2d^2\right],$$

$$Q_5 = b^5 + (4b^3 + 3b^2c + 2bc^2 + c^3)\,ad + (3b + 2c)\,a^2d^2;$$

$$P_6 = a\left[\frac{b^6 - c^6}{b - c} + (4b^3 + 6b^2c + 6bc^2 + 4c^3)\,ad + (3b + 3c)\,a^2d^2\right],$$

$$Q_6 = b^6 + (5b^4 + 4b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + c^4)\,ad + (6b^2 + 6bc + 3c^2)\,a^2d^2 + a^3d^3;$$

$$P_7 = a\left[\frac{b^7 - c^7}{b - c} + (5b^4 + 8b^3c + 9b^2c^2 + 8bc^3 + 5c^4)\,ad + (6b^2 + 9bc + 6c^2)\,a^2d^2 + a^3d^3\right],$$

$$Q_7 = b^7 + (6b^5 + 5b^4c + 4b^3c^2 + 3b^2c^3 + 2bc^4 + c^5)\,ad + (10b^3 + 12b^2c + 9bc^2 + 4c^3)\,a^2d^2 + (4b + 3c)\,a^3d^3;$$

. . . . . .

Remarque. — Dans ces formules, la somme des coefficients doit toujours être égale à 2^{n-1}; formules (3) et (4), ou directement par la loi même de formation.

Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet.

(Séance du 19 avril 1876.)

1. Considérons le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P à toutes les coniques

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

d'un faisceau défini par les deux coniques

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0,$$

et dont toutes les courbes ont quatre points communs réels ou imaginaires. Ce lieu peut encore être défini comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les courbes du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. De cette double façon d'envisager le lieu, il résulte, par des considérations élémentaires de géométrie, que c'est une courbe du troisième degré passant

1° Par le point donné P;

2° Par les quatre points A, B, C, D réels ou imaginaires qui servent de base au faisceau : les tangentes en ces points sont les droites PA, PB, PC, PD;

3° Par le point de concours Q des polaires du point P par rapport aux coniques du faisceau;

4° Par les sommets F, G, H des trois couples de droites qui font partie du faisceau : les tangentes en ces points sont les droites QF, QG, QH et la quatrième tangente issue du point Q de la cubique à cette même courbe est la droite QP qui est tangente en P.

En comptant la tangente en un point pour deux points, on connait donc en tout dix-sept points de la courbe, dont il est facile de voir que neuf au moins sont réels dans tous les cas. L'équation de la courbe est d'ailleurs

$$P_1 C_2 - P_2 C_1 = 0,$$

$P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ étant les équations des polaires du point P par rapport aux coniques C_1 et C_2.

Cela étant rappelé, considérons une cubique fixe, et, par un point P de cette courbe, menons-lui quatre tangentes qui la touchent en A, B, C, D; imaginons le faisceau des coniques qui passent par ces quatre points réels ou imaginaires. Si, par rapport à ce faisceau et au point P, on détermine le lieu précédent, on aura une cubique qui aura avec la proposée les cinq points communs P, A, B, C, D, ainsi que les tangentes en A, B, C, D, qui sont les droites PA, PB, PC, PD, et qui, par conséquent, coïncidera avec elle [1]. Elle passera donc par les points F, G, H, par le point Q, et sera tangente en F, G, H et P aux droites qui joignent ces quatre points au point Q. Nous obtenons ainsi une propriété connue de la cubique tangente en quatre points donnés à quatre droites concourantes [2], ainsi qu'un mode important de génération des courbes du troisième degré dû à Maclaurin [3], et dont nous avons dû donner la démonstration qui précède pour l'intelligence de ce qui va suivre.

2. Avant de poursuivre, indiquons deux théorèmes. Si le point P varie dans toute l'étendue du plan, l'équation de la cubique renferme au premier degré deux paramètres variables qui sont les coordonnées du point (1); on obtient donc un réseau linéaire : c'est le réseau des cubiques passant par les points A, B, C, D, F, G, H. Si le point se meut sur une droite, on n'a plus qu'un faisceau, et les deux autres points communs sont les points de contact de la droite avec les deux coniques du faisceau ABCD qui lui sont tangentes; d'où il résulte que :

Théorème I. — *Les quatre sommets d'un quadrilatère, les trois points de rencontre des couples de côtés opposés, et les deux points conjugués communs à toutes les coniques circonscrites, situés sur*

---

(1) Il se pourrait néanmoins que les neuf points (dont huit sont confondus deux à deux) communs à ces deux courbes fussent les neuf points communs aux cubiques d'un faisceau. Mais, comme nous l'a fait remarquer M. Darboux, cela est impossible; car si, pour achever de déterminer une cubique du faisceau, on se donne un point sur la droite PA, par exemple, cette droite, ayant quatre points sur la courbe, en fera partie tout entière : il resterait donc une conique à laquelle on pourrait mener du point P trois tangentes.

(2) Salmon, *Higher plane curves*, 1873, p. 129.

(3) *Voir* de Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure*, p. 236, à la proposition XIII de la traduction du traité de Maclaurin *Sur les courbes du troisième degré*.

une droite arbitrairement choisie, sont les neufs points communs à un faisceau de cubiques.

Il résulte encore (1) de la seconde manière de considérer le lieu que :

Théorème II. — *Lorsque cinq couples de points conjugués, situés sur des droites concourantes, ne sont pas distincts, c'est-à-dire ne déterminent pas une conique, les dix points sont situés sur une même cubique passant par le point de concours des droites.*

3. Ainsi toute cubique peut être considérée d'une infinité de manières comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux coniques d'un faisceau. Le point donné est sur la cubique et les coniques se coupent sur la cubique; le faisceau correspond au point, et l'on peut dire que c'est son *faisceau conjugué*. Outre les quatre points qui lui servent de base, chaque conique du faisceau coupe la cubique en deux points qui sont, par définition, les points de contact des tangentes issues du point P à la conique, et la corde qui les joint, polaire du point P, passe par le point fixe Q de la cubique, en vertu de la définition du point Q (1), lequel n'est autre d'ailleurs que le tangentiel de P ([1]).

La cubique est aussi le lieu des points conjugués communs à toutes les coniques du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. Si donc on considère arbitrairement une de ces courbes, les deux points α et β où une sécante quelconque issue de P rencontre la cubique sont conjugués harmoniques par rapport aux points a et b où elle coupe la conique; et si, la sécante venant à tourner, le point α décrit la cubique, le point β, conjugué harmonique de α par rapport à a et b, décrira aussi la cubique. En d'autres termes, si, par rapport au pôle P et à la conique considérée, on applique à la cubique la transformation à laquelle M. Hirst a donné le nom d'*inversion quadrique* ([2]), la cubique se transformera en elle-même.

([1]) Le tangentiel d'un point d'une cubique est le troisième point de rencontre avec la courbe de la tangente en ce point. (Salmon, *ibid.*, p. 127.)

([2]) *On the quadric inversion of plane curves* (*Proceedings of the Royal Society*, 1865, p. 91).

A ce point de vue, on peut dire que la cubique est *anallagmatique* en donnant à ce terme un sens plus général que celui qu'il a reçu jusqu'à présent. Il suffirait, en effet, que la conique fût un cercle ayant pour centre le point P pour que la transformation indiquée ne différât pas de la transformation par rayons vecteurs réciproques. On peut dire aussi que la conique est pour la cubique une conique d'*anallagmasie* par rapport au pôle P.

On peut dès lors se demander quelles sont toutes les coniques qui remplissent cette condition par rapport à une cubique. On voit que, si le point P décrit la cubique, le faisceau conjugué sera affecté d'une indétermination du premier ordre et conséquemment engendrera un réseau, mais ce réseau ne sera pas linéaire. Considérons en effet un point α de la cubique : à chaque position du point P sur la cubique correspondra un faisceau conjugué dont une conique passera par le point α; de plus, lorsque le point P sera le tangentiel de α, α sera un des points communs aux coniques du faisceau. Toutes les coniques d'anallagmasie passant par le point α seront donc : 1° celles du faisceau conjugué du tangentiel de α; 2° celles qui correspondent individuellement à chaque position du point P sur la cubique. Parmi toutes ces courbes, si nous cherchons celles qui passent par un second point β de la cubique, il y a deux cas à examiner. Nous savons en effet que les points d'intersection d'une conique d'anallagmasie avec la cubique sont : 1° les quatre points communs au faisceau dont fait partie la conique considérée; 2° les points de contact des tangentes issues à la conique du pôle de transformation. Si donc β est un des quatre premiers, en général il n'en sera pas de même de α, car les tangentes en ces deux points n'iront pas concourir sur la cubique; et alors le pôle sera le tangentiel de β, fournissant un faisceau conjugué dans lequel une seule conique passe par le point α. Si β est un des deux derniers, alors α peut appartenir aux premiers et le pôle est de même le tangentiel de α, fournissant une seule conique passant par β. Enfin, si α et β sont les deux derniers, la corde $\alpha\beta$ passe par le tangentiel du pôle; si donc on cherche le troisième point Q d'intersection de $\alpha\beta$ avec la cubique, et si de ce point Q on lui mène quatre tangentes, les quatre points de contact sont des pôles répondant à la question et fournissant chacun une conique passant par les points α et β.

Théorème III. — *Les coniques d'anallagmasie d'une cubique*

forment un réseau tel, que par deux points de la cubique passent six coniques du réseau. Les pôles correspondants sont les tangentiels de chacun des deux points et les points de contact des quatre tangentes menées à la cubique par le troisième point d'intersection avec cette courbe de la droite qui joint les points donnés.

Il est évident que, sur ces six coniques, les quatre dernières seules satisfont à la condition que le pôle de transformation soit le pôle par rapport à la courbe de la droite qui joint les deux points donnés sur la cubique.

Dans le faisceau conjugué du point P se trouve la conique polaire de ce point, puisqu'elle passe par les points de contact des tangentes issues de P à la cubique; ses deux autres points d'intersection avec la cubique sont confondus en P. Ainsi :

Théorème IV. — *Les coniques polaires des points de la cubique font partie du réseau d'anallagmasie.*

4. Supposons maintenant que l'on veuille passer de la transformation quadrique à la transformation par rayons vecteurs réciproques. Il faut pour cela chercher si, parmi les coniques d'anallagmasie, il n'y a pas de cercle ayant son centre au pôle. Puisque la cubique passe par les points de contact des tangentes issues du pôle à toute conique d'anallagmasie, on voit de suite qu'elle devra passer par les points circulaires de l'infini, qui sont les points de contact des tangentes menées au cercle par son centre; et puisque la corde de contact passe par un point fixe Q qui est le tangentiel du pôle P, on voit encore que ce point fixe devra être le troisième point à l'infini de la cubique, de sorte qu'il y aura quatre positions pour le pôle P, à savoir les quatre points de contact des tangentes menées par Q, c'est-à-dire parallèlement à l'asymptote réelle.

Réciproquement, si la cubique passe par les points circulaires de l'infini, il y a six coniques d'anallagmasie passant par ces deux points, c'est-à-dire six cercles; mais, seuls, les quatre précédents ont leur centre au pôle de transformation (3); ces quatre cercles constituent donc la solution de la question : c'est le théorème de M. Moutard.

Si maintenant le troisième point à l'infini de la cubique est pris pour pôle P, le faisceau conjugué aura pour base les centres des

quatre cercles, et toutes les coniques du faisceau seront conjuguée par rapport aux points cycliques, qui sont les points d'intersection avec la cubique d'une certaine sécante issue du pôle P; toutes ces coniques seront donc des hyperboles équilatères : d'où il résulte que les centres des quatre cercles sont les points communs à un faisceau d'hyperboles équilatères, sommets d'un triangle et point de rencontre des hauteurs, ce qui est la seconde partie du théorème de M. Moutard; d'où il résulte aussi que : *Toute anallagmatique du troisième degré est le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à l'asymptote réelle à toutes les hyperboles équilatères qui passent par les quatre pôles principaux* (1). Et l'on peut ajouter, en prenant pour pôle l'un des pôles principaux :

Théorème V. — *Toute anallagmatique du troisième degré peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un pôle principal à toutes les coniques qui passent par les quatre points d'intersection situés à distance finie de la courbe avec le cercle de transformation correspondant.*

Extension à l'espace des propriétés précédentes.

5. Cherchons le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P à toutes les surfaces du second degré

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$$

appartenant à un faisceau défini par les deux surfaces

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0,$$

et qui passent toutes par une biquadratique gauche.

Les points de contact d'une droite avec les deux surfaces du faisceau qui lui sont tangentes sont les points conjugués communs à toutes les surfaces du faisceau situées sur cette droite. Le lieu peut

(1) Ce théorème est dû à M. Fouret, qui nous l'a communiqué, et c'est dans le but de l'étendre à l'espace que ce travail a été entrepris. Pour saisir l'analogie du théorème qui en est la généralisation (10), nous énoncerons le premier ainsi qu'il suit : *Toute anallagmatique du troisième degré est le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les hyperboles équilatères passant par les quatre pôles principaux, couples situés sur des parallèles à l'asymptote réelle.*

donc encore être défini comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les surfaces du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. De cette double façon d'envisager le lieu, il résulte :

1° Que c'est une surface du troisième degré passant par le point P. En effet, sur chaque droite issue du point P nous connaissons déjà deux points du lieu. D'ailleurs, pour que le point P appartienne au lieu, il faut que la surface correspondante passe par le point P; or il y a une surface du faisceau et une seule passant par ce point : c'est donc un point simple du lieu, qui dès lors se trouve être du troisième degré, puisqu'il a trois points sur toute droite issue du point P;

2° Que cette surface passe par la biquadratique B_4 et est tangente tout le long de cette courbe au cône C_4 ayant cette courbe pour base et le point P pour sommet; car, sur toute droite issue du point P et passant par un point α de B_4, les deux points conjugués communs sont confondus en α;

3° Qu'elle passe par la droite D commune aux plans polaires du point P par rapport aux surfaces du faisceau; car, sur toute droite issue du point P et passant par un point Q de D, les deux points conjugués communs sont P et Q. Tout plan passant par cette droite D coupe en outre la surface cubique suivant une conique, courbe de contact du cône de sommet P circonscrit à la surface du faisceau pour laquelle le plan considéré est le plan polaire de P. Nous connaissons donc une des vingt-sept directrices de la surface, et le système des coniques correspondantes, lesquelles par définition même appartiennent au lieu. Deux autres directrices s'obtiendront en remarquant que, parmi les coniques en question, celle qui se trouve dans le plan de la droite D et du point P est la courbe de contact du cône de sommet P avec la surface du faisceau qui passe par le point P, cône qui se réduit au plan tangent de cette surface en P et dont la courbe de contact devient les deux génératrices suivant lesquelles le plan coupe la surface. Ainsi les deux génératrices en P de la surface du faisceau [P. B_4] qui passe par ce point appartiennent au lieu; leur plan passe par la droite D et coupe alors la surface cubique suivant trois droites; c'est un des quarante-cinq plans tritangents : d'ailleurs, ces deux génératrices étant sur la surface [P. B_4] rencontrent chacune en deux points la

courbe gauche B_4; ce sont donc les deux sécantes doubles que l'on peut mener du point P à B_4, ou encore les deux génératrices doubles du cône C_4;

4° Qu'elle passe par les sommets F, G, H, K des quatre cônes du faisceau; car la droite PF, par exemple, peut être considérée comme tangente en F au cône de sommet F. Le plan du point F et de la droite D, plan polaire de P par rapport au cône considéré, coupe ce cône suivant deux droites qui, d'après ce qui précède (3°), sont sur la surface cubique; c'est donc le plan tangent en F, et nous avons ainsi découvert les cinq plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite D (DP, DF, DG, DH, DK), en même temps que onze directrices rectilignes de cette surface. Les seize autres s'obtiennent en remarquant que, si, par une des deux directrices D_1, D_2 qui se croisent en P et qui rencontrent deux fois B_4, on mène un plan quelconque, il coupera B_4 en deux autres points α et β, et par suite la surface, outre la directrice considérée, suivant une conique qui passera par α et β; si le plan est tangent à B_4 en γ, il renfermera la tangente de B_4 en γ, mais il renferme aussi la droite $P\gamma$ qui est également tangente à la surface, puisqu'elle est sur le cône C_4; le plan est donc tangent à la surface en γ, et la conique se réduit à deux droites qui se croisent en γ. Par chaque droite D_1D_2, corde de B_4, on peut ainsi lui mener quatre plans tangents, ce qui fournit les seize autres directrices de la surface.

L'équation de la surface est d'ailleurs

$$P_1S_2 - P_2S_1 = 0,$$

$P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ étant les équations des plans polaires du point P par rapport aux surfaces S_1 et S_2. Il suffit, en effet, pour l'obtenir, d'éliminer λ_1 et λ_2 entre l'équation d'une surface quelconque du faisceau

$$\lambda_1S_1 + \lambda_2S_2 = 0$$

et celle du plan polaire de P par rapport à cette surface

$$\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 = 0.$$

Nous résumerons ces résultats dans l'énoncé suivant :

Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux surfaces du second degré d'un faisceau est une surface

du troisième degré passant par le point donné, par la biquadratique commune aux surfaces du faisceau et tangente tout le long de cette courbe au cône ayant cette courbe pour base et le point donné pour sommet, passant par les sommets des quatre cônes du faisceau, et par la droite commune aux plans polaires du point donné par rapport à toutes les surfaces du faisceau. Les cinq plans tangents menés par cette droite à la surface sont les plans qui joignent la droite aux sommets des quatre cônes du faisceau et au point donné. Les vingt-sept directrices rectilignes de la surface sont : 1° la droite précédente; 2° les deux sécantes doubles que l'on peut mener par le point donné à la biquadratique, base du faisceau, et les huit droites suivant lesquelles les cônes du faisceau sont coupés par les plans joignant leurs sommets respectifs à la première droite; 3° seize droites, situées deux à deux dans les huit plans tangents que l'on peut mener à la biquadratique par les deux sécantes doubles issues du point donné.

Toutes ces propriétés, sauf celle qui concerne le cône C_4 qui est circonscrit à la surface tout le long de la biquadratique B_4, ont été énoncées par Steiner, et démontrées par M. Cremona dans deux Mémoires remarquables qui ont fait époque dans l'histoire des découvertes relatives aux surfaces du troisième degré ([1]). Steiner en a conclu sans démonstration l'existence des vingt-sept droites; il semble donc avoir été en possession de la proposition inverse, à savoir que, réciproquement, toute surface du troisième degré peut être engendrée de la façon précédente. M. Cremona a démontré cette réciproque sur laquelle nous allons revenir, en nous servant de la propriété du cône C_4, et nous obtiendrons alors un premier mode de génération des surfaces du troisième degré, auquel nous donnerons le nom de mode de génération *Steiner-Cremona*.

6. Considérons à cet effet une surface cubique fixe S_3. Le cône circonscrit à cette surface d'un point quelconque de l'espace est du sixième degré; il est tangent à la surface tout le long d'une

---

([1]) Steiner. — *Ueber die Flächen dritten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 134) et Cremona. — *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (même Journal, t. 68, p. 71 et 100).

courbe du sixième degré, et la coupe en outre suivant une autre courbe de même degré, lieu des points où chaque tangente issue du sommet rencontre la surface sans la toucher; la première courbe est également la courbe d'intersection avec la surface cubique de la surface du second degré S_2 polaire du point par rapport à la surface cubique. Supposons le point P sur S_3, et choisissons un des cent trente-cinq points de la surface qui sont à l'intersection de deux directrices rectilignes.

Comme pour tous les points de la surface, la surface polaire S_2 sera tangente à S_3 en P, et aura les mêmes lignes osculatrices; mais ici les lignes osculatrices de la première sont ses deux génératrices rectilignes, celles de la seconde sont ses deux directrices : c'est donc dire que la surface polaire de P passe par les deux directrices de S_3 en P; le reste de l'intersection sera donc une biquadratique, et une biquadratique à deux points doubles, car si elle en avait trois, la surface S_2 qui la renferme couperait en outre S_3 suivant deux droites qui ne se rencontrent pas, ce qui n'a pas lieu, puisque les deux directrices se croisent en P. Cette biquadratique B_4 a donc deux points doubles apparents, et les deux sécantes doubles issues de P qui est sur S_2 ne peuvent être que les deux génératrices rectilignes de S_2 en P, c'est-à-dire les deux directrices de S_3 qui se croisent en P. Le cône circonscrit du point P à S_3 se composera donc du cône C_4 qui s'appuie sur cette biquadratique B_4 et qui a les deux directrices pour génératrices doubles, et du plan de ces deux directrices, plan tangent en P, dont nous ferons abstraction.

Imaginons maintenant le faisceau des surfaces du second degré qui passent par la biquadratique B_4. Si l'on cherche le lieu des points de contact des tangentes menées à ces surfaces par le point P, on aura une surface cubique passant par le point P et inscrite dans le cône C_4 tout le long de la biquadratique B_4 (5). Cette surface coïncide avec la surface S_3; car, si on la coupe par un plan quelconque passant par le point P, ce plan coupera les deux surfaces suivant deux courbes du troisième degré passant par le point P et tangentes aux mêmes points à quatre droites issues de P, lesquelles coïncident par conséquent (1). On en conclut le mode de génération Steiner-Cremona :

Toute surface du troisième degré non réglée peut être consi-

dérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point choisi sur la surface, à l'intersection de deux des vingt-sept directrices rectilignes, à toutes les surfaces du second degré d'un faisceau qui aurait pour base la biquadratique gauche suivant laquelle le cône circonscrit à la surface par le point considéré touche la surface. La surface peut être ainsi engendrée de cent trente-cinq façons différentes.

La surface passe par les sommets des quatre cônes du faisceau et par la droite D commune aux plans polaires de P par rapport aux surfaces du faisceau; chacune de ces dernières, outre la biquadratique B_4, coupe la surface S_3 suivant une conique dont le plan, plan polaire de P par rapport à une surface du faisceau, passe par D, ce qui donnerait lieu à un énoncé complétant le précédent [1]; mais on peut lui donner une forme plus générale, en ce sens que la biquadratique, base du faisceau, n'a pas besoin d'être la courbe de contact d'un cône circonscrit, et l'on peut dire :

Théorème VI. — *Lorsqu'un faisceau de surfaces du second degré a pour base une biquadratique située sur une surface du troisième degré, chaque surface du faisceau coupe en outre la dernière suivant une conique dont le plan passe par une des vingt-sept directrices restilignes, fixe.*

La première partie du théorème résulte immédiatement du théorème analogue de Géométrie plane; il suffit de couper toute la figure par un plan quelconque, variable.

7. Si nous revenons au cas précédent, nous voyons que la surface cubique pour laquelle nous venons d'obtenir un premier mode de génération peut être considérée comme le lieu des couples de points conjugués communs à toutes les surfaces du faisceau, points situés sur les droites issues du point P. Si donc on considère arbitrairement une de ces surfaces S_2, les deux points α et β où une sécante quelconque issue de P coupe la surface cubique sont conjugués harmoniques par rapport aux points a et b où elle rencontre

---

(1) Cremona. — *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Journal de Crelle*, t. 68, p. 100).

S_2, et si, la sécante venant à tourner, le point α décrit S_3, le point β, conjugué harmonique de α par rapport à a et b, décrira aussi S_3. En d'autres termes, si, par rapport au pôle P et à la surface du second degré considérée, on applique à S_3 la transformation quadrique, la surface S_3 se transformera en elle-même, et l'on peut dire que la surface S_3 est *anallagmatique* par rapport au pôle P et à la surface S_2, laquelle sera une surface d'*anallagmasie*.

D'après ce qui précède, ces surfaces forment cent trente-cinq faisceaux distincts. Chacune d'elles coupe la surface S_3, outre la biquadratique B_4, suivant une conique dont le plan passe par une directrice rectiligne D de S_2, et le pôle P correspondant est le point de contact de l'un des cinq plans tangents menés par D à S_3; enfin, par la définition même de S_3, la conique est la courbe de contact du cône de sommet P circonscrit à la surface du second degré considérée; de sorte que, par une conique C_2 de S_3, passent cinq surfaces d'anallagmasie, les biquadratiques B_4 correspondantes étant les courbes de contact des cônes circonscrits à S_3 de chacun des points de contact P des plans tangents menés par D à S_3. A chacune des directrices D correspondent ainsi cinq faisceaux d'anallagmasie, pour un desquels le pôle est un des cent trente-cinq points P. Ainsi :

Théorème VII. — *Les surfaces d'anallagmasie d'une surface du troisième degré forment cent trente-cinq faisceaux distincts. Il en passe en général cent trente-cinq par un point donné de l'espace; par une conique de la surface, il en passe cinq, et les pôles correspondants sont les points de contact des plans tangents menés à la surface par la directrice de la surface correspondant à la conique considérée.*

8. Considérons maintenant toutes les surfaces du second degré appartenant à un même système linéaire du quatrième ordre, surfaces dont l'équation générale serait

$$(1) \qquad \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 + \lambda_5 S_5 = 0,$$

$S_1 = 0, \ldots, S_5 = 0$ étant les équations de cinq surfaces quelconques du système.

Un plan quelconque détermine dans le système un système plan

de même ordre, dont les coniques renferment aussi quatre indéterminées, et conséquemment sont assujetties à une condition; on sait que cette condition est d'être harmoniquement circonscrites à une conique fixe C dont on peut écrire l'équation lorsque l'on connaît cinq coniques du système : c'est la conique harmoniquement inscrite à ces cinq courbes [1]. Cela posé, supposons que le plan sécant vienne à tourner autour d'une droite fixe D, et cherchons la surface lieu des coniques C. Remettant à une autre occasion l'étude géométrique de cette surface qui exige au préalable une étude spéciale du faisceau, du réseau et des systèmes du troisième et du quatrième ordre, nous nous bornerons à constater analytiquement quel en est le degré. Rappelons pour cela que, si

$$(2) \qquad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2F\beta\gamma + 2G\gamma\alpha + 2H\alpha\beta = 0$$

et

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + 2f_1 yz + 2g_1 zx + 2h_1 xy = 0$$

sont les équations tangentielle et ponctuelle de deux coniques, la condition pour que la première soit harmoniquement inscrite à la seconde, ou la seconde harmoniquement circonscrite à la première, est

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + 2Ff_1 + 2Gg_1 + 2Hh_1 = 0.$$

Si la première doit également être harmoniquement inscrite à quatre autres coniques, on aura, entre les coefficients tangentiels de cette courbe, quatre conditions analogues, et, en éliminant ces coefficients entre l'équation (2) et les cinq équations de condition, on aura, pour l'équation tangentielle de la conique harmoniquement inscrite aux cinq coniques données, l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & f_5 & g_5 & h_5 \end{vmatrix} = 0,$$

---

[1] *Voir* notre Mémoire *Sur les invariants communs à deux fonctions quadratiques* (*Comptes rendus du Congrès de Lille*, 1874, p. 1211). Si une conique est harmonique-

dans laquelle les mineurs correspondant aux éléments de la première rangée sont précisément, au signe près, les coefficients tangentiels A, B, C, 2F, 2G, 2H, et l'équation ponctuelle de la même courbe sera, comme on le sait, en faisant $z = 1$, pour revenir aux coordonnées cartésiennes,

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & H & G & x \\ H & B & F & y \\ G & F & C & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Revenons maintenant au système (1), et supposons que

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 + 2 l_1 yz + 2 m_1 zx \\ + 2 n_1 xy + 2 p_1 x + 2 q_1 y + 2 r_1 z = 0 \end{aligned}$$

soit l'équation ponctuelle de la surface S_1. Considérons un plan quelconque

$$(4) \qquad z = \lambda y,$$

passant par l'axe des x; il coupe la surface suivant une courbe dont la projection sur le plan des xy a pour équation

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + (b_1 + 2 l_1 \lambda + c_1 \lambda^2) y^2 + 2 (m_1 \lambda + n_1) xy \\ + 2 p_1 x + 2 (q_1 + r_1 \lambda) y + d_1 = 0. \end{aligned}$$

On aura de même les projections sur le même plan des coniques d'intersection des quatre surfaces S_2, S_3, S_4, S_5 avec le même plan sécant, et l'équation tangentielle de la conique harmoniquement inscrite aux cinq premières, projection sur le plan des xy de la courbe génératrice du lieu dans le plan (4), s'en conclura comme il a été dit; l'équation ponctuelle (3) en résultera de même. Éliminant ensuite λ entre cette équation et l'équation (4), on aura la surface cherchée, lieu des coniques du système contrevariant du système (1), coniques situées dans les plans passant par l'axe des x.

---

ment circonscrite à une autre, celle-ci est harmoniquement inscrite à la première; et la conique harmoniquement inscrite à cinq coniques données joue dans le plan un rôle tout à fait analogue à celui que joue sur une droite le couple des points conjugués communs à deux couples donnés.

Mais on peut commencer par remplacer λ par sa valeur dans les coefficients A, B, C, F, G, H de l'équation tangentielle, de sorte que l'équation n'est autre que l'équation (3) dans laquelle A, B, 2H, 2G, 2F, C seraient les mineurs, pris alternativement avec le signe + et le signe —, correspondant aux éléments de la première ligne du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \alpha\beta & \alpha & \beta & 1 \\ a_1y^2 & b_1y^2+2l_1yz+c_1z^2 & y(n_1y+m_1z) & p_1y^2 & y(q_1y+r_1z) & d_1y^2 \\ a_2y^2 & b_2y^2+2l_2yz+c_2z^2 & y(n_2y+m_2z) & p_2y^2 & y(q_2y+r_2z) & d_2y^2 \\ a_3y^2 & b_3y^2+2l_3yz+c_3z^2 & y(n_3y+m_3z) & p_3y^2 & y(q_3y+r_3z) & d_3y^2 \\ a_4y^2 & b_4y^2+2l_4yz+c_4z^2 & y(n_4y+m_4z) & p_4y^2 & y(q_4y+r_4z) & d_4y^2 \\ a_5y^2 & b_5y^2+2l_5yz+c_5z^2 & y(n_5y+m_5z) & p_5y^2 & y(q_5y+r_5z) & d_5y^2 \end{vmatrix}.$$

Tous ces coefficients seront du dixième degré et homogènes en y et z; A, G, C seront divisibles par y^6, H et F par y^7, B par y^8. Finalement, l'équation (3), qui, développée, peut s'écrire

$$\begin{aligned} &x^2(BC-F^2)+y^2(CA-G^2)+2xy(FG-CH) \\ &\quad+2x(HF-BG)+2y(GH-AF)+AB-H^2=0, \end{aligned}$$

paraît être du vingt-deuxième degré; mais le binôme coefficient de y^2 est divisible par y^{12}, les coefficients de xy et de y par y^{13}, et ceux des termes indépendants de y par y^{14}, de sorte qu'en somme l'équation est divisible par y^{14}; elle s'abaisse au huitième degré et peut s'écrire, en désignant par A_1, B_1, C_1, F_1, G_1, H_1 les coefficients divisés chacun par la plus haute puissance possible de y,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & H_1 & G_1 & x \\ H_1 & B_1 & F_1 & 1 \\ G_1 & F_1 & C_1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

A_1, B_1, C_1 sont du quatrième degré, H_1 et F_1 du troisième, B_1 du second en y et z.

Ainsi la surface cherchée est du huitième degré; par suite l'axe des x est une directrice singulière du sixième ordre : elle renferme en outre dix autres directrices rectilignes. On sait en effet que le lieu des droites de l'espace sur lesquelles se trouvent deux points

conjugués à toutes les surfaces du système (1) est une surface réglée du dixième degré [1]. Chacun de ces couples de points est une conique infiniment aplatie, harmoniquement inscrite au système; comme l'axe des x rencontre cette surface en dix points, il y aura dix plans passant par l'axe des x pour lesquels la conique génératrice de la surface (5) se réduit à deux droites confondues.

Si les surfaces du système (1) ont un point commun, toute droite passant par ce point les coupe suivant des couples de points conjugués par rapport à deux points confondus au point fixe, et peut dès lors être considérée comme conique infiniment aplatie, harmoniquement inscrite au système.

Il en résulte immédiatement que le plan passant par l'axe des x et le point fixe fera tout entier partie de la surface (5), laquelle enfin, s'abaissera au troisième degré, si toutes les surfaces (1) ont cinq points communs. La droite fixe qui est ici l'axe des x, étant une fois dans chacun des plans suivant lesquels se décompose la surface complète, demeure une fois sur la surface cubique, et chacun des cinq plans est tangent à la surface au point correspondant.

Théorème VIII. — *Le lieu de la conique harmoniquement inscrite aux coniques du système du quatrième ordre que l'on obtient en coupant par un plan tournant autour d'une droite fixe toutes les surfaces du second degré passant par cinq points est une surface du troisième degré passant par la droite fixe. Les cinq plans tangents menés à la surface par cette droite sont les cinq plans qui la joignent aux cinq points, lesquels sont les points de contact.*

9. Réciproquement, si l'on considère une surface cubique S_3 et une directrice D de cette surface, on sait que parmi tous les plans passant par cette droite, lesquels sont bitangents à la surface, il y en a cinq qui la touchent encore une fois en dehors de la droite. Si, relativement à la droite et aux surfaces du second degré passant par les cinq points de contact π, on cherche le lieu précédent, on obtiendra une surface cubique passant comme la première par la

---

[1] Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. I, p. 357.

droite D, et tangente à cette surface aux cinq points π. Ces deux surfaces satisfont à dix-neuf conditions linéaires communes, savoir quatre provenant de la droite D et trois de chaque point de contact. Elles ne peuvent donc que coïncider, à moins que ces dix-neuf conditions ne soient pas distinctes. Faute de démonstration suffisamment rigoureuse, nous admettrons que ces conditions sont distinctes, sauf à justifier cette proposition par ses conséquences (10). La surface S_3 considérée peut donc être engendrée comme le lieu précédent, relativement à chacune de ses vingt-sept directrices, et l'on obtient ce nouveau mode de génération :

Théorème IX. — *Toute surface du troisième degré peut être considérée de vingt-sept façons différentes comme le lieu de la conique harmoniquement inscrite aux coniques du système du quatrième ordre obtenu en coupant par un plan tournant autour d'une droite fixe des surfaces du second degré ayant cinq points communs. La droite fixe est une des vingt-sept directrices, et les cinq points communs sont les points de contact des cinq plans tangents que l'on peut mener à la surface par cette droite.*

Il est bien entendu que la conique génératrice de la surface ne peut être réelle si la directrice correspondante est imaginaire; mais, comme il y a toujours au moins une directrice réelle, ce mode de génération peut convenir pour toutes les surfaces du troisième degré.

10. Cela posé, si l'on veut qu'une surface cubique soit anallagmatique dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, il faut chercher s'il n'y a pas, dans les faisceaux d'anallagmasie (7), de sphères ayant leur centre au pôle de transformation. On voit d'abord que la surface devra passer par le cercle de l'infini, puisqu'elle est le lieu des points de contact des tangentes menées du pôle à toutes les surfaces du faisceau d'anallagmasie correspondant, et que, pour la sphère considérée en particulier, les points de contact des tangentes menées du centre sont sur le cercle de l'infini. Réciproquement, si la surface passe par le cercle de l'infini, il y a cinq surfaces d'anallagmasie passant par cette courbe, c'est-à-dire cinq sphères. Les pôles correspondants sont les points de contact des cinq plans tangents menés par la droite à l'infini de la sur-

face (7) et sont les centres des cinq sphères, puisque le cercle de l'infini est alors pour l'une d'elles la courbe de contact du cône circonscrit dont le sommet est le pôle de transformation (5).

Ainsi toute surface du troisième degré qui passe par le cercle de l'infini est anallagmatique par rapport à cinq pôles de transformation par rayons vecteurs réciproques. C'est la première partie du théorème de M. Moutard; la seconde consiste en ce que ces cinq points sont les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent : elle résulte de ce qui précède, si l'on admet notre mode de génération.

En effet, d'après ce mode de génération, tout plan passant par la droite à l'infini de la surface ou, si l'on veut, parallèle à la direction de plans déterminée par cette droite, coupe encore la surface suivant une conique harmoniquement inscrite à toutes les coniques suivant lesquelles il coupe toutes les surfaces du second degré qui passent par les cinq pôles, lesquelles coniques sont alors harmoniquement circonscrites à la première.

En particulier, le plan de l'infini coupe toutes ces surfaces suivant des coniques harmoniquement circonscrites au cercle de l'infini qui est la conique à l'infini de la surface cubique : c'est dire que toutes ces surfaces sont des hyperboloïdes équilatères [1]. Pour tous les couples de plans passant par les cinq points, cette condition se traduit par la perpendicularité: donc, tout plan passant par deux des points, et par suite la droite qui joint ces deux points, sont perpendiculaires sur le plan des trois autres; donc quatre quelconques des cinq points sont les sommets d'un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent au cinquième.

Si, au contraire, on admet cette relation réciproque entre les positions des cinq points, elle confirme notre mode de génération, en tant qu'il paraitrait reposer sur une hypothèse gratuite (9), et le démontre alors rigoureusement. Si, en effet, les cinq points satisfont à cette relation, toutes les surfaces du second degré qui les

---

(1) *Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 1233. Il y est démontré que, si la conique à l'infini d'une surface du second degré est harmoniquement circonscrite au cercle de l'infini, la somme des carrés des coefficients des variables, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, est nulle.

renferment sont des hyperboloïdes équilatères [1], et par suite sont harmoniquement circonscrites à la conique à l'infini de la surface cubique. Au moyen d'une transformation homographique, ce théorème devient :

Théorème X. — *Si un plan coupe une surface du troisième degré suivant une conique et une droite, et si, par la droite, on mène les cinq plans tangents à la surface, toutes les surfaces du second degré passant par les cinq points de contact sont harmoniquement circonscrites à la conique* [2].

Ce qui n'est qu'une autre manière d'énoncer le mode de génération; il suffit, pour le voir, de faire tourner le plan autour de la droite. Appliqué à la conique à l'infini d'une surface anallagmatique, ce théorème devient la généralisation du théorème de M. Fouret, et peut s'énoncer ainsi :

Théorème XI. — *Toute surface anallagmatique du troisième degré peut être considérée comme le lieu de la conique harmoniquement inscrite aux hyperboloïdes équilatères passant par les cinq pôles principaux, conique située dans des plans parallèles dont la direction est déterminée par la droite à l'infini de la surface.*

Les pôles principaux sont les points de contact des cinq plans tangents menés à la surface par une de ses directrices rectilignes, qui est la droite à l'infini de la surface : ils font donc partie des cent trente-cinq points auxquels on peut appliquer le mode de génération Steiner-Cremona. On obtient ainsi la généralisation d'un théorème précédent (4) :

---

(1) *Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 1234. Si un hyperboloïde équilatère est circonscrit à un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, il passe par le point de rencontre des hauteurs, d'où résulte la réciproque que nous invoquons. Elle peut d'ailleurs se voir directement en remarquant que, si cinq surfaces d'un système du quatrième ordre sont des hyperboloïdes équilatères, il en est évidemment de même de toutes les autres; or toutes les surfaces du second degré passant par les cinq points forment un pareil système dont tous les couples de plans étant rectangulaires sont des hyperboloïdes équilatères.

(2) C'est-à-dire coupent le plan de la conique suivant une conique qui lui est harmoniquement circonscrite. (*Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 1226.)

Théorème XII. — *Toute surface anallagmatique du troisième degré peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées d'un pôle principal à toutes les surfaces du second degré qui passent par la biquadratique, courbe d'intersection à distance finie de la surface et de la sphère de transformation correspondante.*

Nous ne terminerons pas sans faire ressortir l'importance du théorème sur lequel est basé le dernier mode de génération des surfaces du troisième degré. Il permet en effet de construire la surface du troisième degré qui passe par une droite et qui est tangente en cinq points à cinq plans menés par cette droite. Si, en effet, on considère les traces sur un plan fixe mené par la droite des couples de plans passant par les cinq points, on aura des couples de droites qui, étant harmoniquement circonscrits à la conique d'intersection, seront conjugués par rapport à cette courbe. L'une des droites d'un couple est la trace sur le plan du plan passant par trois des points donnés; la seconde est la trace d'un plan quelconque passant par la droite qui joint les deux autres. On a donc sur le plan considéré deux droites conjuguées dont l'une est fixe et l'autre est variable, en tournant autour d'un point : c'est dire que le point doit être le pôle de la droite fixe.

Ainsi le pentagone des cinq points de contact est *conjugué* à la conique cherchée, puisque la trace sur le plan de la conique du plan passant par trois quelconques des cinq points est la polaire du point, trace sur ce plan de la droite qui joint les deux autres, et l'on sait construire par la règle et le compas la conique située dans un plan donné et conjuguée à un pentagone gauche. Le théorème peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème XIII. — *Le lieu de la conique conjuguée à un pentagone gauche, conique située dans un plan tournant autour d'une droite fixe, est la surface du troisième degré passant par la droite et tangente à chaque sommet du pentagone au plan passant par ce point et par la droite fixe.*

Ce qui donne, pour le théorème de M. Fouret étendu à l'espace, ce nouvel énoncé :

Théorème XIV. — *Toute surface anallagmatique du troisième*

degré peut être considérée comme le lieu de la conique conjuguée au pentagone des cinq pôles principaux, conique située dans des plans parallèles dont la direction est déterminée par la droite à l'infini de la surface.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU MERCREDI 26 JANVIER 1876,

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

Est présenté, comme nouveau membre, M. Vicaire, ingénieur des mines, à Saint-Etienne.

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur les stéréo-imaginaires ou solides évanescents,* et donne quelques détails sur les polyèdres antiques conservés dans les musées de Lyon, de Vienne et de Rouen.

M. Jordan fait une communication *Sur certains caractères des courbes gauches et des surfaces, se rapportant à la géométrie de situation.*

MM. de la Gournerie, Rouché et Halphen ajoutent quelques mots à ce sujet.

M. Fouret donne une démonstration élémentaire d'un théorème déjà connu et relatif au rapport anharmonique des quatre points de rencontre d'une transversale avec un tétraèdre.

SÉANCE DU MERCREDI 9 FÉVRIER 1876,

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. Vicaire est élu membre de la Société.

M. Cahen, élève de l'École Polytechnique, communique une *Construction nouvelle de la courbe d'ombre portée par un tore sur lui-même.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur les cubo-octaèdres du British Museum et du Louvre.*

M. Jordan fait une communication *Sur une question de géométrie de situation.*

M. Halphen fait une communication sur le même sujet.

SÉANCE DU MERCREDI 23 FÉVRIER 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM.

Est présenté, comme nouveau membre, M. Caron, chef des travaux graphiques à l'École Normale, à Paris.

M. Jordan fait une communication *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, dont les intégrales sont algébriques.*

M. le comte Léopold Hugo communique une *Généralisation d'une propriété du tore.*

SÉANCE DU MERCREDI 8 MARS 1876,

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. Caron est élu membre de la Société.

M. Désiré André, ne disposant plus du temps nécessaire pour remplir ses fonctions de trésorier, prie la Société de vouloir bien accepter sa démission.

M. Houbigant, ne disposant plus du temps nécessaire pour remplir ses fonctions d'archiviste, prie la Société de vouloir bien accepter sa démission.

M. Jordan fait une communication *Sur une question de géométrie de situation relative à la décomposition d'un contour fermé en plusieurs autres.*

M. Halphen communique à la Société un *Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation.*

M. Mannheim présente, de la part de M. Léauté, une *Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis.*

SÉANCE DU MERCREDI 22 MARS 1876,

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

La Société procède, par la voie du scrutin, au remplacement du trésorier et de l'archiviste.

M. Claude-Lafontaine est élu trésorier.

M. Maurice Cabart est élu archiviste.

M. Ch. Brisse fait une communication *Sur une formule de la théorie des surfaces.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur les caractéristiques planétaires.*

M. Halphen fait une communication *Sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques.*

SÉANCE DU MERCREDI 5 AVRIL 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM.

Le Secrétaire annonce que M. Hirst s'est fait inscrire comme sociétaire perpétuel.

M. Haton de la Goupillière fait une communication *Sur les transformations qui conservent une relation invariable entre les dérivées d'un même ordre quelconque.*

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur un dodécaèdre antique conservé au British Museum.*

M. Darboux communique *Quelques propriétés du mouvement d'une figure invariable, relatives aux aires et aux arcs des courbes décrites.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. Jordan donne la démonstration d'un des théorèmes énoncés par M. Darboux.

SÉANCE DU MERCREDI 19 AVRIL 1876,

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. G. Jung adresse à la Société une Note *Sur la construction de la chaînette par points et sur la division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés.*

M. Haton de la Goupillière fait une communication relative au problème inverse des brachistochrones envisagé dans un système de coordonnées curvilignes quelconques, et aux théorèmes généraux auxquels conduit cette recherche.

M. Picquet fait une communication *Sur quelques propriétés des surfaces du troisième degré.*

M. Fouret communique *Quelques théorèmes sur les anallagmatiques du troisième ordre.*

M. Saltel fait une communication *Sur certains cas de décomposition des lieux géométriques.*

M. Halphen présente quelques observations à ce sujet, et fait une communication *Sur les courbes définies par l'équation polaire* $\rho^n = \cos n\theta$.

SÉANCE DU MERCREDI 3 MAI 1876,

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. Laguerre, ne disposant plus du temps nécessaire pour remplir ses fonctions de secrétaire, prie la Société de vouloir bien accepter sa démission.

M. le comte Léopold Hugo fait une communication *Sur le spires des ovhélites planétaires.*

M. de Polignac fait une communication *Sur les substitutions linéaires.*

M. Jordan présente une autre démonstration relative à la même question.

M. Halphen ajoute quelques détails aux remarques qu'il a faites dans la séance précédente sur la détermination du degré et de la classe des lieux géométriques.

SÉANCE DU MERCREDI 17 MAI 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN.

M. Laguerre fait une communication *Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre.*

M. G. Jung adresse à la Société une Note *Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima dans le Mémoire « Sur la stabilité des voûtes », de M. Peaucellier.*

M. Mannheim communique de *Nouvelles propriétés de quelques courbes.*

M. Picquet fait une communication *Sur les sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré.*

M. Laguerre fait connaître un certain nombre de systèmes orthogonaux de courbes algébriques.

M. Mannheim fait une remarque sur la surface des ondes.

M. Fouret présente quelques remarques sur un théorème relatif au nombre des solutions d'un système d'équations.

SÉANCE DU MERCREDI 31 MAI 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. LEMONNIER.

M. Perrin fait une communication *Sur une formule de sommation de quelques séries.*

M. Laguerre fait une communication *Sur le lieu des points tels, que les tangentes menées de ce point à deux courbes planes soient égales entre elles.*

SÉANCE DU MERCREDI 14 JUIN 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN.

M. Fouret communique un *Théorème sur le lieu des contacts d'une surface algébrique avec les surfaces d'un implexe.*

M. Halphen donne quelques développements sur la théorie des caractéristiques au sujet d'un récent Mémoire de M. Schubert.

SÉANCE DU MERCREDI 28 JUIN 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. BIENAYMÉ.

Est présenté, comme nouveau membre, M. Guélot, major au 122e régiment d'infanterie, à Montpellier.

M. Resal fait hommage à la Société du tome IV de son *Traité de Mécanique générale*.

SÉANCE DU MERCREDI 12 JUILLET 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. BIENAYMÉ.

M. Guélot est élu membre de la Société.

SÉANCE DU MERCREDI 26 JUILLET 1876,

PRÉSIDÉE PAR M. CABART.

M. le comte Léopold Hugo fait une communication relative aux divers polyèdres antiques conservés dans les musées.

Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet.

(Séance du 17 mai 1876.)

Théorème I. — *Il y a, sur une surface du troisième degré, non réglée, cent huit paraboles, réelles ou imaginaires, correspondant quatre par quatre aux vingt-sept directrices rectilignes de la surface.*

En effet, tout plan coupant la surface suivant une conique, passe par une des vingt-sept directrices rectilignes. Considérons donc une de ces directrices D, et cherchons la condition pour qu'un plan qui la renferme coupe la surface suivant une parabole. Ce plan, supposé variable, a pour trace sur le plan de l'infini une droite δ tournant autour d'un point fixe α, trace de la droite D sur ce même plan. Cette droite δ coupe la cubique à l'infini de la surface en deux autres points, réels ou imaginaires, traces sur le plan de l'infini de l'ellipse ou de l'hyperbole déterminée dans la surface par le plan considéré : pour que cette conique devienne une parabole, il faudra que la droite δ soit tangente à la cubique à l'infini de la surface. Or, par le point α de cette cubique, on peut lui mener quatre tangentes réelles ou imaginaires; il y aura donc quatre plans, réels ou imaginaires, passant par la droite D et coupant la surface suivant une parabole.

Remarque. — Il n'y a pas lieu de considérer le plan ayant pour droite à l'infini la tangente en α à la cubique à l'infini de la surface : il coupe la surface suivant une conique dont un point à l'infini est venu en α, c'est-à-dire suivant une hyperbole dont une asymptote est parallèle à la directrice D. Seulement, si α était un point d'inflexion, une des quatre tangentes issues de α se confondrait avec la tangente en α : le plan considéré, tangent en α, serait alors un des quatre plans à section parabolique, laquelle aurait son axe parallèle à la droite D.

Théorème II. — *Il y a, sur une surface du troisième degré non réglée, quatre-vingt-une hyperboles équilatères, réelles ou imaginaires, correspondant trois par trois aux vingt-sept directrices rectilignes de la surface.*

En effet, pour que le plan considéré, passant par la droite D, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que les deux points variables γ et δ, où sa droite à l'infini rencontre la cubique à l'infini de la surface, soient conjugués harmoniques par rapport aux points a et b, également variables, où la même droite rencontre le cercle de l'infini. Or la géométrie des courbes du troisième degré apprend que, lorsque deux points a et b sont conjugués harmoniques par rapport à deux des points d'intersection d'une sécante avec une cubique plane, ils sont sur

une conique passant par les quatre points de contact des tangentes menées à la courbe par le troisième point d'intersection [1]. Il faut donc considérer le faisceau des coniques passant par les points de contact des tangentes issues de α et chercher, parmi les droites issues de α, celles qui coupent le cercle de l'infini suivant deux points situés sur une de ces coniques. Une des droites cherchées coupera donc, outre les coniques du faisceau, le cercle de l'infini suivant des points en involution, et par suite toutes les coniques du réseau défini par le faisceau considéré et le cercle de l'infini. Or les droites qui coupent les coniques d'un réseau suivant des points en involution enveloppent une courbe de troisième classe, cayleyenne du réseau [2], et les points doubles décrivent une cubique, hessienne du réseau. Il y aura donc par le point α trois droites, dont deux pourront être imaginaires, répondant à la question.

Remarque. — A toute directrice réelle correspond au moins une section équilatère réelle : comme une, au moins, des vingt-sept directrices est réelle, toute surface du troisième degré admet au moins une section équilatère réelle.

Théorème III. — *Les plans passant par une directrice rectiligne d'une surface du troisième degré, qui la coupent suivant une hyperbole équilatère, sont les plans tangents menés par cette droite au cône enveloppe des plans cycliques de tous les cônes du second degré passant par les quatre droites menées par un point quelconque de la directrice parallèlement aux axes des quatre paraboles de la surface dont les plans passent par cette directrice.*

Pour le démontrer, d'un point O de la directrice comme point de vue, faisons la perspective de la figure précédemment considérée dans le plan de l'infini. Au faisceau de coniques correspond un faisceau de cônes du second degré ayant quatre génératrices communes, dont les directions sont déterminées par les points de contact des quatre tangentes issues de α à la cubique à l'infini de la sur-

---

(1) C'est une conséquence immédiate de la proposition XIII du Traité de Maclaurin *Sur les courbes du troisième degré.* (*Voir* la traduction française de ce traité, par M. de Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure*, p. 236.)

(2) *Voir* notre *Étude géométrique des systèmes linéaires de coniques*, p. 19.

face, c'est-à-dire par les axes des quatre sections paraboliques passant par la directrice : au cercle de l'infini correspond une sphère concentrique de rayon nul, et les plans des sections équilatères cherchées sont ceux qui coupent cette sphère suivant deux droites situées sur un cône du faisceau, c'est-à-dire qui coupent un cône du faisceau suivant deux droites isotropes, ou enfin qui sont cycliques pour un certain cône du faisceau; d'où il résulte que le cône cayleyen d'un réseau de cônes du second degré, à sommet commun, déterminé par trois cônes dont l'un est une sphère de rayon nul, n'est autre que le cône enveloppe des plans cycliques des cônes du faisceau déterminé par les deux autres, et le cône hessien le lieu des rayons doubles des faisceaux en involution suivant lesquels ces plans coupent les cônes du faisceau. Par suite :

Théorème IV. — *Le cône enveloppe des plans cycliques d'un faisceau de cônes du second degré à sommet commun est un cône de troisième classe. Ces plans coupent les cônes du faisceau suivant des faisceaux en involution dont les rayons doubles engendrent un cône du troisième degré.*

Dans le cas particulier où le cercle de l'infini ferait partie du faisceau de coniques considéré dans le plan de l'infini, c'est-à-dire où les tangentes en quatre des points d'intersection de ce cercle avec la cubique à l'infini de la surface concourraient en un même point qui serait le point α de la cubique, la condition cherchée serait évidemment remplie pour toute droite issue de α, et l'on aurait une surface particulière du troisième degré, qu'on peut appeler *équilatère,* satisfaisant à quatre conditions, et telle que tout plan passant par une certaine directrice de la surface la coupe en outre suivant une hyperbole équilatère.

Rectification; par M. H. Picquet.

(Séance du 3 mai 1876.)

Dans sa traduction allemande de la *Géométrie analytique à trois dimensions* de M. Salmon, M. Fiedler a bien voulu consacrer une page à quelques théorèmes relatifs aux surfaces du second degré

ayant six, sept ou huit plans tangents communs, présentés par nous à la Société philomathique de Paris, dans sa séance du 9 décembre 1865, et insérés au *Bulletin* de cette Société (tome II, p. 196), ainsi qu'au journal *l'Institut* (numéro du 20 décembre 1865). Nous remercions ici M. Fiedler d'avoir considéré comme une lacune leur absence dans l'ouvrage original anglais, mais nous nous plaisons à lui faire remarquer qu'il a commis une erreur involontaire en les attribuant à M. Rich. Townsend. Cet auteur anglais les a en effet publiés dans le tome VIII du *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics* (p. 10-14), mais en juin 1866 seulement; nous espérons donc qu'il ne trouvera pas extraordinaire de nous en voir revendiquer la priorité.

Les théorèmes en question sont relatifs à la sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une surface du second degré (sphère nommée par M. Townsend *directrice,* par nous *orthogone,* et plus tard *orthoptique. Systèmes linéaires de coniques,* p. 42). Ils indiquent que les sphères correspondant à un faisceau tangentiel de surfaces du second degré ont même plan radical; à un réseau, même axe radical, et à un système du troisième ordre, même centre radical; avec application aux paraboloïdes. M. Chasles nous a également fait l'honneur de les citer dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie,* en faisant remarquer que M. Townsend était parvenu de son côté aux mêmes résultats, et, de plus, avait démontré que les sphères directrices des surfaces tangentes à six plans ont même centre radical. Nous profitons de la circonstance pour faire observer que ce dernier résultat n'est autre que notre théorème VII, d'après lequel *les plans directeurs des paraboloïdes tangents à six plans ont un point commun.* Il suffit, pour s'en apercevoir, de le rapprocher du théorème XIII, d'après lequel *le plan radical des sphères correspondant aux surfaces d'un faisceau est le plan directeur du paraboloïde du faisceau.*

Nouvelles propriétés de quelques courbes; par M. A. Mannheim.

(Séance du 17 mai 1876.)

Dans la séance du 19 avril dernier, M. Halphen a fait connaître quelques propriétés de certaines courbes dont M. Haton a donné une intéressante monographie dans le numéro de mars 1876 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Je me propose d'énoncer quelques propriétés de ces courbes et de quelques autres.

Aux auteurs cités par M. Haton, nous ajouterons M. Archer Hirst, qui, dans son beau Mémoire *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes*, a aussi étudié les courbes dont l'équation polaire est

$$r = a \cos^{\varepsilon} \frac{a}{\varepsilon}.$$

M. Hirst désigne ces courbes par la lettre E. Nous adopterons cette notation et nous appellerons B la courbe dont M. Bonnet s'est occupé et qui est engendrée par le pôle de E lorsque cette courbe roule sur une droite D.

Cette génération de B conduit immédiatement à cette propriété :

Les rayons de courbure d'une courbe B *sont partagés par* D *dans un rapport constant.*

On sait, en vertu d'un théorème de Steiner, que l'arc de la roulette, engendrée par un point du plan d'une courbe qui roule sur une droite, est égal à l'arc de la podaire de la courbe mobile par rapport au point décrivant. Il résulte de là et de cette propriété : la podaire d'une courbe E, par rapport à son pôle, est une courbe E, que :

Les arcs d'une courbe B *sont exprimables en arcs d'une courbe* E.

Il est facile de construire le centre de courbure de la développée d'une courbe E ou d'une courbe B. Au moyen de ces constructions et de quelques considérations géométriques, on arrive aux résultats suivants :

Le lieu des positions successives des centres de courbure d'une

courbe E *qui roule sur une droite est une courbe que l'on obtient en dilatant dans un rapport constant les ordonnées d'une courbe* B.

Les centres de courbure que l'on considère dans cet énoncé sont ceux qui, à chaque instant, correspondent aux points de contact de E et de D; quant aux ordonnées de B, ce sont les distances des points de cette courbe à la droite D.

Lorsqu'une courbe B *roule sur une droite, l'enveloppe de sa base* D *est une courbe* B.

Lorsqu'une courbe B *roule sur une courbe qui lui est égale et symétrique par rapport à l'une de ses tangentes, sa base* D *enveloppe une certaine courbe; les arcs de cette courbe sont exprimables en arcs d'une courbe* B;

Elle peut être considérée comme le lieu des points qui partagent dans un rapport constant les rayons de courbure d'une courbe B.

Comme cas particulier, on peut considérer l'enveloppe de la base d'une cycloïde qui roule sur une cycloïde qui lui est égale et symétrique par rapport à l'une de ses tangentes : on trouve que cette enveloppe est une développante de cycloïde.

Le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe B *qui roule sur une droite est une courbe que l'on obtient en dilatant dans un rapport constant les ordonnées d'une courbe* B.

En un point quelconque d'une courbe B, *on mène la tangente et la normale à cette courbe. Du point où la normale rencontre* D, *on élève une perpendiculaire à cette droite; cette perpendiculaire rencontre la tangente en un certain point : le lieu des points analogues est une courbe que l'on obtient en dilatant les ordonnées d'une courbe* B.

On projette : 1° *un point quelconque m d'une courbe* B *sur la droite* D; 2° *le pied de cette perpendiculaire sur la tangente en m à* B : *le lieu des points analogues à celui que l'on obtient ainsi est une courbe qui partage dans un rapport constant les rayons de courbure d'une courbe* B.

On arrive encore à quelques énoncés très-simples en considérant les courbes lieu des extrémités des droites égales et parallèles aux rayons de courbure d'une courbe E ou d'une courbe B.

Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 17 mai 1876.)

1. Considérons une courbe gauche quelconque rapportée à trois axes rectangulaires et dont les équations soient $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, X, Y et Z étant trois fonctions données d'une même variable indépendante t. En chaque point m de cette courbe, menons une droite $m\mu$ normale à cette courbe et dont la longueur, ainsi que la direction, soit fixée à chaque instant par la valeur de la variable t correspondant au point m. Projetons ensuite sur la corde mm' les segments normaux $m\mu$ et $m'\mu$ menés respectivement par les extrémités de cette corde; je me propose d'abord d'évaluer la somme algébrique de ces projections.

En désignant par ω cette somme, par A, B, C les dérivées de X, Y Z par rapport à t et par L, M, N les projections sur les axes du segment $m\mu$, on a évidemment

$$\begin{aligned} MM'.\omega &= \sum\left(dx + \frac{d^2x}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3}\cdots\right)\left(2L + dL + \frac{d^2L}{1.2}\cdots\right) \\ &= \sum\left(A\,dt + \frac{A'\,dt^2}{1.2} + \frac{A''\,dt^3}{1.2.3}\cdots\right)\left(2L + dL + \frac{d^2L}{1.2}\cdots\right). \end{aligned}$$

Je poserai, pour abréger,

$$(1)\qquad MM'.\omega = P_1\frac{dt^2}{1.2} + P_2\frac{dt^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{P_n\,dt^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \cdots,$$

le coefficient de dt étant nul dans ce développement, en vertu de l'équation $\Sigma AL = 0$, qui exprime que le segment est normal à la courbe.

2. Des considérations très-simples montrent immédiatement que chaque coefficient d'ordre pair P_{2n} s'exprime linéairement au moyen des coefficients d'ordre inférieur et de leurs dérivées; il s'annule donc en même temps que ces derniers; par suite, la formule (1) montre que ω ne peut être qu'un infiniment petit d'*ordre impair*.

P_1 et P_2 étant identiquement nuls, on voit que généralement la quantité ω sera du troisième ordre; si elle est d'un ordre supérieur, elle sera du cinquième ordre et l'équation suivante devra être satisfaite :

$$(2) \qquad \Sigma A'' L + 3\Sigma A' L' = 0.$$

Si elle est d'un ordre supérieur au cinquième, elle sera du septième, avec la condition suivante :

$$(3) \qquad \Sigma A^{\text{IV}} L + 5\Sigma A''' L' + 10\Sigma A'' L'' = 0.$$

Enfin, si elle est d'un ordre supérieur au septième, elle sera *identiquement nulle,* avec la condition

$$(4) \qquad \Sigma A^{\text{VI}} L + 7\Sigma A^{\text{V}} L' + 21\Sigma A^{\text{IV}} L'' + 35\Sigma A''' L''' = 0,$$

et alors la courbe *pourra être placée sur une surface du second ordre.*

3. Si l'on se propose, étant donnée une courbe, de trouver un système de segments normaux ayant cette courbe pour base et tels que ω soit une quantité infiniment petite du septième ordre, on devra déterminer les segments par les équations (2) et (3).

Je les transformerai d'abord en définissant, en chaque point de la courbe, le segment normal par ses deux projections U et W sur la normale principale et sur la binormale en ce point. En désignant, suivant l'usage habituel, par ρ et par r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe au point considéré, et en prenant l'arc s comme variable indépendante, les formules (2) et (3) se mettront facilement, au moyen des formules de M. Serret, sous la forme suivante :

$$(2)' \qquad U d\left(\frac{1}{\rho}\right) + 3\frac{dU}{\rho} + \frac{2}{r\rho} W ds = 0,$$

$$(3)' \qquad \left\{\begin{aligned} & 10\, d^2 U\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) - 10\frac{d^2 W\, ds}{r\rho} + 5\, dU\left[d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) ds^2\right] \\ & \quad + 5\, dW\, ds\left[\frac{2}{r} d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & \quad + U\left[d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{9}{\rho^2} - \frac{3}{r^2}\right) ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{12\, ds^2}{r\rho} d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & \quad + W ds\left[\frac{2}{r} d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} d^2\left(\frac{1}{r}\right)\right. \\ & \qquad \left. + 7\, d\left(\frac{1}{r}\right) d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{6}{r\rho}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) ds^2\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant W entre les deux équations précédentes, on obtiendra une équation linéaire et du troisième ordre pour déterminer U; on voit donc que, la courbe étant donnée, le problème que je m'étais proposé a une infinité de solutions, qui toutes peuvent se déduire de trois solutions indépendantes, conséquence à laquelle quelques propositions géométriques très-simples conduiraient directement.

4. Laissant de côté ces considérations générales, ainsi que les conséquences qui en découlent relativement aux équations différentielles (entre r, ρ et s) qui définissent les courbes que l'on peut tracer sur une surface de second ordre, les biquadratiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité simple de surfaces du second ordre), et les cubiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité double de surfaces du second ordre), je vais rechercher quelles sont les courbes que l'on peut prendre comme base de segments normaux dirigés suivant *les normales principales de la courbe* et jouissant de la propriété que ω soit du septième ordre.

On devra, dans les équations précédentes, poser $W = 0$; l'équation (2)' s'intègre alors immédiatement et donne

$$U = \alpha \rho^{\frac{1}{3}},$$

α désignant une constante arbitraire. Portons cette valeur de U dans l'équation (3)'; il vient, toutes réductions faites,

$$5 \left\{ \begin{aligned} & 9 d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) - 45\rho\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{35}{\rho^2} ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ & + 40\rho^2 d\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + 18\, ds^2\left[\frac{6}{r\rho} d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{4}{r^2} d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est remarquable que cette équation puisse s'intégrer sans établir aucune relation entre ρ et r; si on l'intègre en effet en considérant $\frac{1}{r}$ comme la fonction inconnue (ce qui ne présente aucune difficulté), on trouve que la quantité sous le signe $\int$ est une diffé-

rentielle exacte, et l'on obtient l'intégrale suivante :

$$(6) \qquad 1 \quad \left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{4}{3}} - 3\rho\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds^2} + 4\rho^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}{ds^2},$$

C désignant une constante arbitraire.

Telle est la relation qui doit exister entre la torsion et la courbure d'une courbe pour qu'elle jouisse de la propriété énoncée ci-dessus.

5. En particulier, on peut remarquer que, si une ligne géodésique est tracée sur une surface du second ordre quelconque, en portant en chaque point de la courbe sur la normale principale une longueur proportionnelle à $\sqrt[3]{\rho}$, les segments ainsi obtenus jouissent de la propriété que la somme algébrique des projections de deux d'entre eux, sur la corde qui joint leurs pieds, est identiquement nulle; la quantité que j'ai appelée ω étant nulle, on voit qu'en chaque point d'une telle ligne géodésique la torsion est donnée par la relation (6), la constante C ayant une valeur convenablement déterminée.

Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima, dans le Mémoire de M. Peaucellier « Sur la stabilité des voûtes »; par M. G. Jung, de Milan.

(Séance du 17 mai 1876.)

Le cahier n° 24 du *Mémorial du Génie* contient un intéressant Mémoire de M. Peaucellier, sur l'importance duquel le beau Rapport de MM. les commissaires de l'Académie des Sciences a appelé l'attention des géomètres et des constructeurs.

Le but de cette Note est de modifier la partie du Mémoire du savant colonel, qui se rapporte à *la courbe représentative des poussées maxima ou minima résultant de la condition de donner lieu à des courbes des pressions tangentes à l'intrados et à l'extrados,* pour en faciliter la construction et la rendre plus pratique.

Pour la description de cette courbe, je donne trois méthodes diffé-

rentes, qui cependant *sont toutes basées sur la construction de certains polygones funiculaires* et sur des constructions très-élémentaires et bien connues du Calcul graphique et de la Statique graphique.

Un de nos confrères, M. le commandant du génie Dewulf, m'a fait l'honneur de m'inviter à traiter ce sujet; si donc on trouve que ces simples modifications peuvent vraiment faciliter l'application pratique de la méthode de M. Peaucellier, c'est à M. Dewulf qu'il faut en être redevable.

1. Considérons la courbe des pressions tangentes à l'intrados en un point quelconque j [1] et cherchons quelle est la poussée correspondante P et le point d'application M de cette force.

La somme des moments par rapport à j de toutes les forces qui sollicitent le voussoir $J_0 j_0 J j$ devant être nulle, on a l'équation $P \times \overline{MK} = \text{mom.}R$ (voir *Mémorial du Génie*, n° 24, p. 187), équation qui peut s'écrire

$$P \times \overline{MK} = \text{mom.}R = hR = z^2,$$

où h est la longueur de la perpendiculaire abaissée de j sur R, et z est la moyenne géométrique entre h et R.

Par rapport au point j' de l'intrados, voisin de j, on aura de même

$$P \times \overline{MK'} = \text{mom.}R' = h'R' = z'^2,$$

K' étant la projection horizontale de j' sur la clef $\overline{J_0 j_0}$, R' la résultante des forces qui sollicitent le voussoir $(J_0 j')$ et h' la longueur de la perpendiculaire abaissée de j' sur R'.

Donc

$$P(\overline{MK'} - \overline{MK}) = \text{mom.}R' - \text{mom.}R,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad P \times \overline{KK'} = P\Delta y = h'R' - hR,$$

ou

$$(2) \qquad P\Delta y = h'\Delta R + R\Delta h \qquad \begin{pmatrix} \Delta R = R' - R \\ \Delta h = h' - h \end{pmatrix},$$

---

[1] Pour faciliter la lecture de cette Note, je maintiens les notations adoptées par M. Peaucellier et, dans le n° 1, je me reporte à la *fig.* 15 de son Mémoire.

ou

$$(3) \qquad P\Delta y = (z' + z)\,\Delta z \quad (\Delta z = z' - z).$$

Chacune de ces trois relations identiques déterminera (approximativement) la poussée P qui donne lieu à la courbe des pressions tangente en j à l'intrados, *pourvu que j' soit assez voisin de j.*

La poussée P étant connue, son point d'application M se trouve immédiatement (n° 8).

CONSTRUCTIONS PRÉLIMINAIRES.

2. Prenons (*fig.* 1) sur l'intrados, à partir du point B où l'axe de symétrie $\overline{AB}$ est coupé par cette courbe, des points $j_0, j_1, j_2, \ldots$ [1], de manière que l'intrados soit divisé en des arcs *assez petits;* soient $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots$ les projections horizontales, sur AB des arcs $j_0 j_1, j_1 j_2, j_2 j_3, \ldots$, c'est-à-dire soit

$$\Delta y_i = K_i K_{i+1}.$$

Les poids et les surcharges des voussoirs élémentaires (Aj_0), $(j_0 j_1)$, $(j_1 j_2)$, ... sont donnés : formons-en le polygone des forces $a \ldots b_0 \ldots b_1 \ldots b_2 \ldots$ (*fig.* 2). Les rayons 0, 1, 2,... du faisceau $a(b_0 b_1 b_2 \ldots)$ représentent, en grandeur et en direction, les résultantes $R_0, R_1, R_2, \ldots$ des forces qui sollicitent respectivement les voussoirs (Aj_0), (Aj_1), (Aj_2),....

En formant le *polygone funiculaire* relatif à ce polygone des forces et correspondant à un pôle arbitraire, on aura (*fig.* 1) les $R_0, R_1, R_2, \ldots$, lignes d'action des forces du même nom.

Finalement, soient (*fig.* 1) $h_0, h_1, h_2, \ldots$ les longueurs des perpendiculaires abaissées des points $j_0, j_1, j_2, \ldots$ sur les lignes $R_0, R_1, R_2, \ldots$, respectivement.

3. *Remarque.* — Les *fig.* 1 et 2, comme toutes les autres qui suivent, sont des figures schématiques. Pour plus de clarté, on n'a tracé ni le polygone funiculaire, ni toutes les lignes R_i dans la *fig.* 1,

---

[1] Dans la *fig.* 1, ces points sont représentés par les indices 0, 1, 2, ... sur l'intrados; et les points $K_0, K_1, K_2, \ldots$ sont représentés par les mêmes indices sur l'axe de symétrie AB.

ni toutes les résultantes dans la *fig.* 2, et l'on a pris ces lignes très-inclinées.

Une droite R_i de la *fig.* 1 est parallèle au rayon $i \equiv ab_i$ de la *fig.* 2.

A partir du point K_4, on a supposé que les segments K_4K_5, K_5K_6, ... sont de même longueur.

CONSTRUCTION DES POUSSÉES P MOYENNANT LA FORMULE (1)

$$P_i \Delta y_i = h_{i+1} R_{i+1} - h_i R_i.$$

4. Sur l'horizontale (Δ) (*fig.* 3), *à partir d'une origine* δ, prenons les segments

$$\overline{\delta 0} = m\,\Delta y_0 = m\,\overline{K_0 K_1},$$
$$\overline{\delta 1} = m\,\Delta y_1 = m\,\overline{K_1 K_2},$$
$$\overline{\delta 2} = m\,\Delta y_2 = m\,\overline{K_2 K_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

m étant un nombre entier positif quelconque [1]; sur la verticale (H), passant par le point δ, prenons les segments *consécutifs*

$$\overline{00} = nh_0, \quad \overline{11} = nh_1, \quad \overline{22} = nh_2 \quad , \ldots,$$

n étant un nombre entier positif quelconque [1]; et traçons les verticales 0, 1, 2, ... passant par les points 0, 1, 2, ... de (Δ).

Formons le polygone [2] $\Sigma \equiv 00123456\ldots$ dont les sommets 0, 1, 2, ... se trouvent sur les verticales 0, 1, 2, ..., et dont les côtés 00, 01, 12, ... passent respectivement par les points 0, $\overline{01}$, $\overline{12}$, ... de la ponctuelle (H) : par exemple le côté $i.i+1$ de Σ passe par le point $i.i+1$ de (H).

Le premier côté 00 de Σ passe par le point 0 de (H), mais est d'ailleurs arbitraire.

Formons ensuite un autre polygone $\Sigma' \equiv \overline{01}\,01'2'3'4'5'6'\ldots$ ayant pour premier côté le second côté 01 de Σ, et pour premier sommet le premier sommet 0 de Σ, et ayant, comme Σ, les autres

---

[1] Dans notre *fig.* 3, $m = 10$, $n = 2$.

[2] *Voir* Culmann : *Die graphische Statik*, 2e édition, § 4, et Cremona : *Elementi di Calcolo grafico*, § III.

sommets $1', 2', 3', \ldots$ sur les verticales $1, 2, 3, \ldots$ et les autres côtés $01', 1'2', \ldots$, passant par les points $\overline{12}, \overline{23}, \ldots$ de (H).

Sur une horizontale (R), à partir d'une origine r, prenons des segments

$$r0 = R_0,$$
$$r1 = R_1,$$
$$r2 = R_2,$$
$$\ldots\ldots,$$

et traçons les verticales $0, 1, 2, \ldots$ par les points $0, 1, 2, \ldots$, extrémités de ces segments.

Formons : 1° le polygone $\Pi \equiv 0012345 6\ldots$ dont les sommets i sont sur les verticales i, les côtés $i.i+1$ sont parallèles aux côtés $i.i+1$ de Σ, et le premier sommet 0 est arbitrairement pris sur la verticale 0;

2° Le polygone $\Pi' \equiv 1'1'2'3'4'5'6'\ldots$, dont les sommets i' sont sur les verticales i, les côtés $i'.i'+1$ sont parallèles aux côtés $i-1.i$ de Σ' (en particulier $1'1'$ parallèle à $\overline{10}.0$), et le premier sommet $1'$ est un point quelconque de la verticale 1.

5. Cela posé, il est évident que les segments déterminés par les côtés du polygone Π sur la verticale (P) passant par le point r, c'est-à-dire les segments consécutifs

$$00 \equiv q_0, \quad 11 \equiv q_1, \quad 22 \equiv q_2, \quad 33 \equiv q_3, \ldots$$

de (P) sont respectivement égaux à

$$\frac{nh_0}{m\Delta y_0}R_0, \quad \frac{nh_1}{m\Delta y_1}R_1, \quad \frac{nh_2}{m\Delta y_2}R_2, \quad \frac{nh_3}{m\Delta y_3}R_3, \ldots,$$

et les segments déterminés sur la même verticale par les côtés du polygone Π', c'est-à-dire les segments

$$1'1' \equiv p_0, \quad 2'2' \equiv p_1, \quad 3'3' \equiv p_2, \quad 4'4' \equiv p_3, \ldots$$

de (P) sont respectivement égaux à

$$\frac{nh_1}{m\Delta y_0}R_1, \quad \frac{nh_2}{m\Delta y_1}R_2, \quad \frac{nh_3}{m\Delta y_2}R_3, \quad \frac{nh_4}{m\Delta y_3}R_4, \ldots;$$

par conséquent, se rappelant la formule (1), on a

$$P_0 = \frac{m}{n}(p_0 - q_0), \quad P_1 = \frac{m}{n}(p_1 - q_1), \quad P_2 = \frac{m}{n}(p_2 - q_2), \ldots$$

Si donc, sur une droite (υ) (*fig.* 4), on prend un segment NN égal n fois à un segment arbitraire λ, et des segments consécutifs

$$00 \equiv \upsilon_0, \quad 11 \equiv \upsilon_1, \quad 22 \equiv \upsilon_2, \ldots,$$

respectivement égaux aux différences

$$p_0 - q_0, \quad p_1 - q_1, \quad p_2 - q_2, \ldots,$$

différences que l'on déduit facilement de la ponctuelle (P); si, sur une autre droite (υ_1), parallèle à (υ), on prend un segment $MM = m\lambda$; et si, du point S commun aux droites MN, MN, on fait la projection de la ponctuelle (υ) sur (υ_1), on trouvera que les segments

$$0_1 0_1, \quad 1_1 1_1, \quad 2_1 2_1, \ldots$$

de (υ_1) sont respectivement égaux aux poussées cherchées

$$P_0, \quad P_1, \quad P, \ldots$$

correspondant aux points $j_0, j_1, j_2, \ldots$ de l'intrados.

CONSTRUCTION DES POUSSÉES P MOYENNANT LA FORMULE (2)

$$P_i \Delta y_i = (z_i + z_{i+1}) \Delta z_i.$$

6. Sur les rayons 0, 1, 2, ... du faisceau a (du polygone des forces) comme diamètres, on décrit des demi-cercles et l'on prend les segments $h_0, h_1, h_2, \ldots$ (*fig.* 5); on construit ensuite les segments z_i de manière que

$$z_i^2 = h_i \times i = h_i R_i,$$

c'est-à-dire que z_i soit moyenne géométrique entre h_i et R_i.

Ou autrement : on prend (*fig.* 6) sur une droite, à partir d'une origine z, des segments $z0, z1, z2, z3, \ldots$ égaux aux rayons correspondants $R_0, R_1, R_2, R_3, \ldots$ du faisceau a, et l'on décrit les demi-cercles sur ces segments zi; sur la même droite, et à partir de la même origine, on prend les segments $z0', z1', z2', \ldots$ égaux à

$h_0, h_1, h_2, \ldots,$ et l'on forme le faisceau $z\,(0_1\ 1_1\ 2_1 \ldots)$ dont les rayons z_i soient moyennes géométriques entre h_i et R_i.

Sur une horizontale (Δ), à partir d'une origine a (*fig.* 7), prenons les segments

$$\begin{aligned} a0 &= m\Delta y_0, \\ a1 &= m\Delta y_1, \\ a2 &= m\Delta y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

m étant un nombre entier et positif [1], et tirons les verticales par les points 0, 1, 2, ...; et sur la verticale passant par a, des deux côtés de a, prenons des segments

$$\begin{aligned} a0 = a0' &= n z_0, \\ a1 = a1' &= n z_1, \\ a2 = a2' &= n z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

n étant un nombre entier et positif [2].

Alors on a sur cette verticale les segments

$$i.i+1 = n(z_{i+1} - z_i) = n\Delta z_i,$$

et

$$i.i'+1 = n(z_i + z_{i+1}).$$

Sur une horizontale (Z), à partir d'une origine Z (*fig.* 7), prenons les segments

$$\begin{aligned} Z0 = 01' &= n(z_0 + z_1), \\ Z1 = 12' &= n(z_1 + z_2), \\ Z2 = 23' &= n(z_2 + z_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par les points 0, 1, 2, ... extrémités de ces segments Zi, tirons les verticales.

---

(1) Dans notre *fig.* 7, $m = 10$.

(2) Dans notre *fig.* 7, $n = 2$. Dans les deux constructions indiquées au commencement de ce numéro, on pourrait prendre, au lieu des segments $= h_i$, des segments $= n^2 h_i$; on aurait alors, au lieu des segments $z_i\,(= \sqrt{h_i R_i})$, les segments $z'_i\,(= n z_i)$; et ici il suffirait de prendre $a0 = a0' = z'_i$. Les *fig.* 5 et 6 en seraient peut être plus claires.

Formons (*fig.* 7) le polygone $\Sigma \equiv 00123\ldots$, comme au n° 4; et, comme au n° 4, déduisons de celui-ci le polygone $\Pi \equiv 00123\ldots$.

Les côtés du polygone Π interceptent sur la verticale passant par Z les segments

$$i.i+1 = \frac{(z_i + z_{i+1})\,\Delta z_1}{m\,\Delta y_i} = \frac{n^2}{m}\,P_i.$$

Donc, avec la construction de la *fig.* 4, où cependant on prendra $\overline{NN} = n^2\lambda$ (λ étant un segment arbitraire) et $\overline{MM} = m\overline{NN}$, on déduit les poussées P_i correspondant aux points j_i de l'intrados [1].

7. La construction des P_i avec la formule (2) ne présentant aucune difficulté et pouvant se déduire facilement de ce qui précède, je pense pouvoir me passer d'en faire la description.

CONSTRUCTION DE LA COURBE.

8. Lorsque les P_i sont déterminés, on fixe leurs points d'application M_i sur $\overline{AB}$ de la manière suivante.

On tire par a dans le polygone des forces l'horizontale (α), et, à partir du point a on porte les segments (*fig* 2)

$$a0 = P_0, \quad a1 = P_1, \quad a2 = P_2, \quad \ldots.$$

De l'extrémité b_i du $i^{\text{ième}}$ rayon ($= R_i$) du faisceau a, on tire la droite $b_i\,i$, et, du point correspondant j_i de l'intrados (*voir* n° 2 et *fig.* 1 et 2), on tire la parallèle à $b_i\,i$ jusqu'à sa rencontre en m_i avec la R_i correspondante.

La projection horizontale M_i de m_i (*fig.* 1) sur l'axe de symétrie $\overline{AB}$ est le point d'application de la poussée P_i qui donne lieu à une courbe des pressions tangente au point j_i à l'intrados.

Si donc on porte les segments $P_i = ai$ (*fig.* 2) en direction horizontale et à partir de M_i (*fig.* 1), les extrémités P_i de ces segments appartiennent à la courbe transcendante cherchée.

---

[1] Cette construction n'est pas effectuée dans nos figures.

OBSERVATIONS.

9. Des procédés tout à fait analogues s'appliquent à la détermination des poussées qui engendrent des courbes des pressions tangentes à l'extrados, au lieu de l'être à l'intrados, et à la construction de la courbe représentative correspondante.

10. Il n'est pas inutile peut-être de rappeler ici une remarque pratique de M. Culmann sur la construction des polygones funiculaires en général.

Je reproduis les paroles de l'illustre savant de Zurich [1] : « Avant de conclure, nous ferons observer que les figures (*analogues aux fig.* 3 *et* 7) deviendraient très-compliquées et presque indéchiffrables, si l'on prolongeait de côté et d'autre tous les côtés des polygones (*funiculaires*). Il suffit complétement de tracer les côtés *entre* les verticales correspondantes et de marquer leurs points d'intersection avec la ligne » verticale (H) où (P) de la *fig.* 3.

« Nous recommandons aussi de faire bien attention à notre notation... » ; c'est celle que j'ai adoptée dans les *fig.* 3 et 7.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 28.

FIN DU TOME QUATRIÈME.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

État de la Société au 31 janvier 1876 5
Statuts de la Société 9
Règlement administratif 10

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

Séance du mercredi 3 novembre 1875 90
Séance du mercredi 17 novembre 1875 91
Séance du mercredi 1er décembre 1875 91
Séance du mercredi 15 décembre 1875 92
Séance du mercredi 29 décembre 1875 92
Séance du mercredi 12 janvier 1876 93
Séance du mercredi 26 janvier 1876 148
Séance du mercredi 9 février 1876 148
Séance du mercredi 23 février 1876 149
Séance du mercredi 8 mars 1876 149
Séance du mercredi 22 mars 1876 150
Séance du mercredi 5 avril 1876 150
Séance du mercredi 19 avril 1876 151
Séance du mercredi 3 mai 1876 151
Séance du mercredi 17 mai 1876 152
Séance du mercredi 31 mai 1876 152
Séance du mercredi 14 juin 1876 152
Séance du mercredi 28 juin 1786 153
Séance du mercredi 12 juillet 1876 153
Séance du mercredi 26 juillet 1876 153

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

De la répartition des nombres entre les diviseurs de $\varphi(M)$, lorsque M est une puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance; par M. L. Sancery 17
Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes; par M. Halphen 29

Pages.

Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes; par M. H. Brocard 42
Sur une surface remarquable du huitième degré; par M. Picquet 45
Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré; par M. Halphen 59
Note sur la division mécanique de l'angle; par M. Perrin 85
Ombre portée par un tore sur lui-même; par M. Cahen 87
Note sur l'épure du conoïde; par M. Cahen 88
Théorèmes concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation; par M. Halphen 94
Sur une formule de la théorie des surfaces; par M. Ch. Brisse 96
Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis; par M. H. Léauté 99
Sur les courbes de troisième ordre; par M. Laguerre 110
Construction de la chaînette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés; par M. G. Jung 114
Note sur les substitutions linéaires; par M. C. de Polignac 120
Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet 128
Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet 153
Rectification; par M. H. Picquet 156
Nouvelles propriétés de quelques courbes; par M. A. Mannheim 158
Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre; par M. Laguerre 160
Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima, dans le Mémoire de M. Peaucellier « Sur la stabilité des voûtes »; par M. G. Jung, de Milan 163

FIN DE LA TABLE.

2612 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Fig. 1

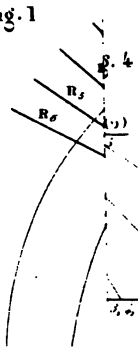


Fig. 5

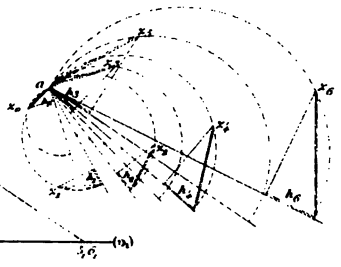


Fig. 6

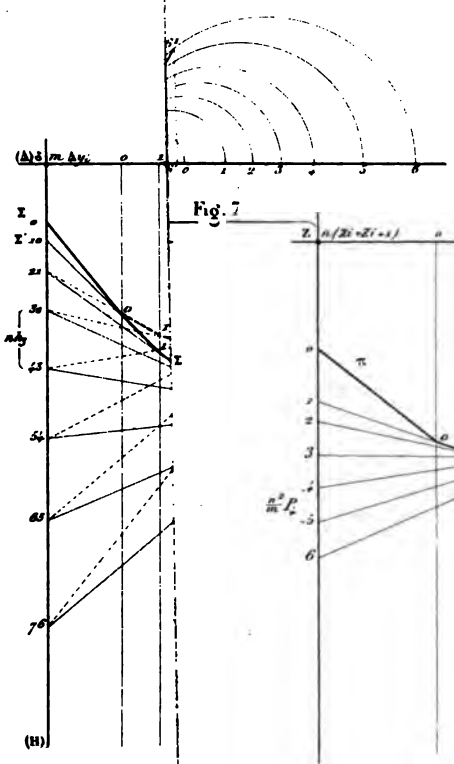
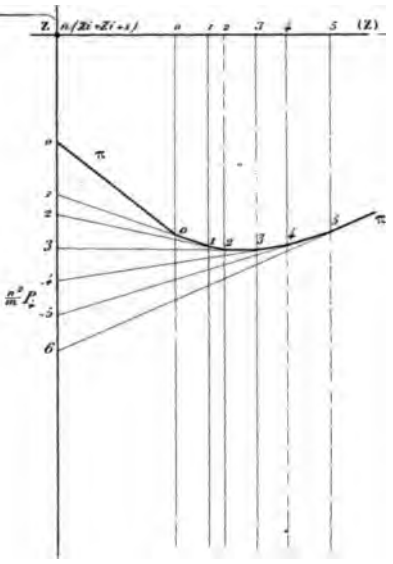


Fig. 7



Gravé par P. Méa.

Imp. P. Méa, R. des Chantiers, 1 ; Paris

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES

TOME DEUXIÈME

PARIS

AU SIÉGE DE LA SOCIÉTÉ

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1874

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

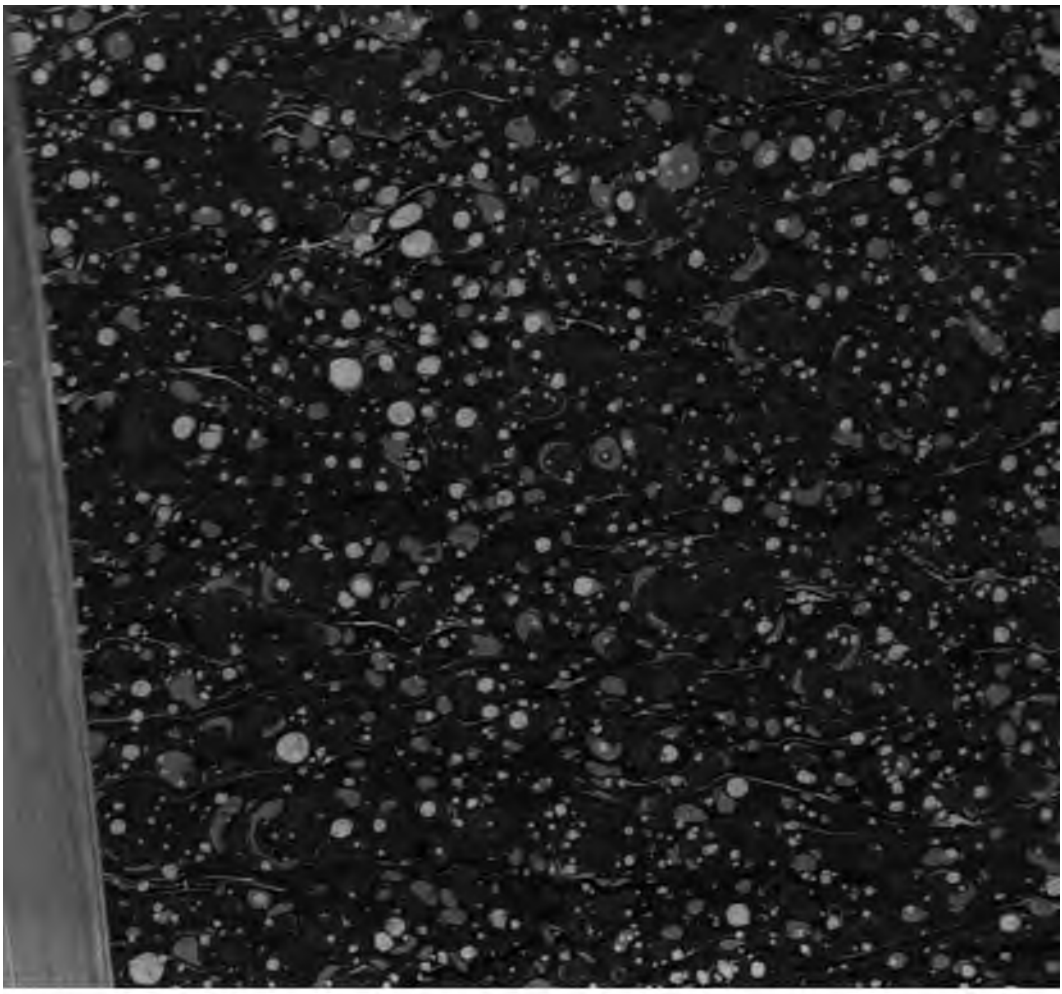
PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUATRIÈME.

PARIS,

AU SIÉGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1876